Chapitre 7

Logarithme

Sommaire

7.1 Généralités

7.1.1 Un peu d'histoire

La fin du XVI$^{\text{è}}$ est l'époque des grands voyages maritimes et de la découverte des lois régissant le mouvement des planètes (COPERNIC, KEPLER, etc.).
Les mesures astronomiques, nécessaires pour la navigation, impliquent des calculs compliqués. Les multiplications, divisions et extractions de racines sont particulièrement longues et pénibles. Pour simplifier ces calculs, on cherche des tables numériques à deux colonnes, mettant en correspondances les nombres de telle manière qu'à la *multiplication* de deux nombres de la colonne de gauche corresponde l'*addition* de deux nombres de la colonne de droite.
La première table de ce type est publiée par l'écossais JOHN NEPER en 1614, après quarante ans de travail, et il crée leur nom, composé des mots grec ancien *lógos* (« rapport ») et *arithmos* (« nombre »).
Le livre dans lequel figurait ces tables servait ainsi à déterminer et à noter sa position jour après jour, mais aussi la météo, l'état du navire, le moral de l'équipage…

Ce journal de bord s'appelait un *log-book*.
On a conservé ce terme et lorsque son support a changé, que le journal s'est écrit non plus sur un livre mais sur internet, il s'est dénommé *web-log* qui, par contraction, a donné le mot *blog*!

7.1.2 Définition

Définition 7.1. La fonction *logarithme népérien*, notée ln, est une fonction définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ telle que :

- la fonction ln s'annule en 1, soit $\ln(1) = 0$;
- la dérivée de la fonction ln est la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$, soit pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

Remarque. Le nombre $\ln(x)$ n'existe que si $x > 0$.

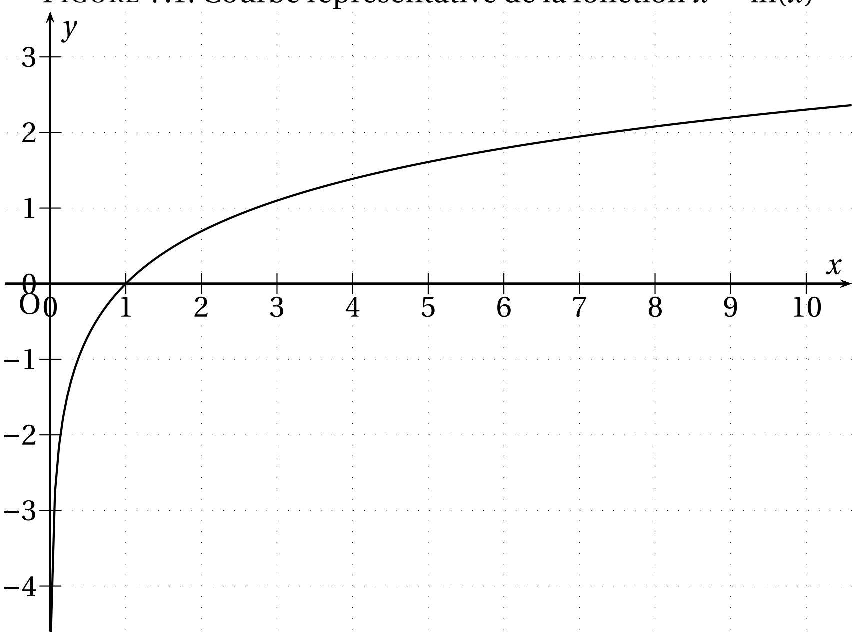
Exemple 7.1. En utilisant la touche $\boxed{\ln}$ de la calculatrice, compléter le tableau suivant (on arrondira à 10^{-3}) :

x	1	2	3	4	6	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$\ln(x)$							

7.1.3 Courbe représentative

La courbe représentative de la fonction ln est donnée par la figure 7.1 de la présente page.

FIGURE 7.1: Courbe représentative de la fonction $x \mapsto \ln(x)$



7.1.4 Sens de variation

Propriété 7.1. *La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur* $]0\,;+\infty[$ *et on a :*

x	0		1		$+\infty$
$(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$	||	$+$		$+$	
$\ln(x)$	||	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

7.1.5 Équations et inéquations

Propriété 7.2. *Pour tous réels a et b positifs,*

- $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$,
- $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$.

Remarque. Cette propriété traduit le fait que la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, c'est-à-dire qu'elle conserve l'ordre.

Exemple 7.2.

1. Résoudre sur $]0\,;+\infty[$ l'équation $\ln(x) = 2$. Donner la valeur exacte de la solution puis une valeur approchée à 0,01 près.
2. Résoudre sur $]0\,;+\infty[$ l'inéquation $\ln(x) < 5$.
3. En utilisant la fonction ln, déterminer le plus petit entier naturel n tel que $1,05^n > 1,4$.

7.1.6 Signe de $\ln(x)$

On déduit du tableau de variations le signe de $\ln(x)$:

Propriété 7.3. *Si* $0 < x \leqslant 1$ *alors* $\ln(x)$ *est négatif et si* $1 \leqslant x$ *alors* $\ln(x)$ *est positif.*

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	||	$-$	0	$+$	

7.2 Propriétés algébriques du logarithme népérien

7.2.1 Nombre e

Graphiquement, il existe un unique point de la courbe yant pour ordonnée 1 ; son abscisse est notée e et vaut environ $2,72$.

Définition 7.2. e est le nombre tel que $\ln(\mathrm{e}) = 1$.

7.2.2 Propriété fondamentale

Théorème 7.4. *Pour tous réels a et b strictements positifs, on a :* $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.

Remarque. Le logarithme d'un produit est donc égal à la somme des logarithmes. On dit abusivement que « le logarithme transforme le produit en somme ». Ainsi par exemple $\ln(6) = \ln(2 \times 3) = \ln(2) + \ln(3)$.

7.2.3 Autres propriétés

Propriété 7.5. *Pour tous réels a et b strictements positifs et tout entier relatif n, on a :*

- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Exemple 7.3.

1. Simplifier au maximum en utilisant les propriétés de la fonction ln les nombres $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$, $\ln\left(\frac{\text{e}}{8}\right)$, $\ln(32)$ et $\ln\left(\sqrt{2}\right)$.
2. Calculer en fonction de $\ln(3)$ le nombre $A = 4\ln(\sqrt{3}) - \ln(81) + \ln(3\text{e})$.

7.3 Fonction logarithme décimal : log

Définition 7.3. La fonction *logarithme décimal* est la fonction, notée log, définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

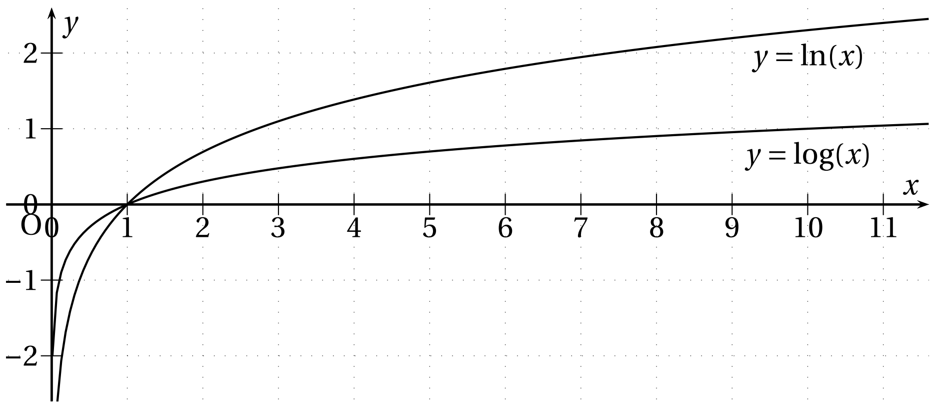
Remarques.

- $\log(10) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\log(1) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- la fonction log vérifie les mêmes propriétés algébriques que la fonction ln, en particulier, pour tout entier relatif n, $\log(10^n) = n$.

Propriété 7.6. *La fonction* log *est strictement croissante sur* $]0\,;+\infty[$ *et :*

x	0		1		$+\infty$
$\log(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

La courbe représentative de la fonction log est donnée ci-dessous.



7.4 Exercices

EXERCICE 7.1.
Indiquer le signe des nombres suivants :

1. $\ln(3)$
2. $\ln(1,07)$
3. $\ln(0,4)$
4. $\ln(0,95)$
5. $\ln\left(10^3\right)$
6. $\ln\left(10^{-3}\right)$
7. $\ln\left(\frac{5}{3}\right)$
8. $\ln\left(\frac{e}{3}\right)$

EXERCICE 7.2.
Simplifier l'écriture des réels suivants :

1. $\ln\left(e^3\right)$
2. $\ln\left(e^{-2}\right)$
3. $2\ln(e)$
4. $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$
5. $\ln\left(\sqrt{e}\right)$
6. $8\ln\left(e^4\right)$
7. $\ln\left(e^2\right)-\ln(e)$

EXERCICE 7.3.
Exprimer en fonction de $\ln(2)$ les réels suivants. Écrire le résultat sous la forme $a\ln(2)$.

- $A=\ln(16)$
- $B=\ln\left(\frac{1}{16}\right)$
- $C=\ln(0,5)$
- $D=\ln\left(\sqrt{2}\right)$
- $E=\frac{1}{2}\ln(4)$

EXERCICE 7.4.
Exprimer en fonction de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$ les réels suivants. Écrire le résultat sous la forme $a\ln(2)+b\ln(3)$.

- $A=\ln(6)$
- $B=\ln(12)$
- $C=4\ln(18)$
- $D=\ln\left(\frac{9}{8}\right)$
- $E=\frac{\ln(9)}{8}$

EXERCICE 7.5.
Écrire les nombres suivants sous la forme d'un seul logarithme, c'est-à-dire sous la forme $\ln(a)$.

- $A=\ln(5)+\ln(2)$
- $B=\ln(4)+2\ln(5)$
- $C=\ln(18)+2\ln(5)-\ln(15)$
- $D=\ln(100)+3\ln\left(\frac{1}{10}\right)$
- $E=3\ln(2)-1$
- $F=\frac{1}{2}+2\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

EXERCICE 7.6.
Résoudre graphiquement, à l'aide de la calculatrice, les équations suivantes. Donner une valeur approchée de la solution à 0,1 près.

1. $\ln(x)=3$
2. $\ln(x)=x$
3. $\ln(x)=1-2x$
4. $2\ln(x)=x^2-2$
5. $-2\ln(x)+1=x$

EXERCICE 7.7.
Résoudre dans $]0\,;+\infty[$ les équations suivantes.

1. $\ln(x)=0$
2. $\ln(x)=1$
3. $\ln(x)=-4$
4. $2\ln(x)=1$
5. $2\ln(x)-6=0$

EXERCICE 7.8.
Résoudre dans $]0\,;+\infty[$ les inéquations suivantes.

1. $\ln(x)\leqslant 1$
2. $\ln(2x)>-2$
3. $2-\ln(x)\geqslant 0$
4. $2\ln(3x)\geqslant 3$

EXERCICE 7.9.
Résoudre dans l'intervalle I donnée les inéquations suivantes.

1. $\ln(x-2)\leqslant 0$ sur $I=]2\,;+\infty[$
2. $\ln(x-3)>1$ sur $I=]3\,;+\infty[$
3. $\ln(3x+1)-\ln(x+1)\geqslant\ln(2)$ sur $I=\left]-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

EXERCICE 7.10.
Étudier le signe des expressions suivantes sur $]0\,;+\infty[$.

1. $f(x)=\ln(x)+1$
2. $f(t)=2-\ln(t)$

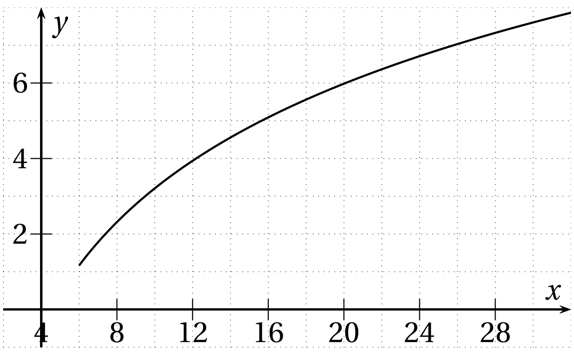
EXERCICE 7.11.
Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2\ln(x)[\ln(x)+1]$.

1. Calculer les valeurs exactes de $f(1)$, $f(\mathrm{e})$ et $f\left(\mathrm{e}^2\right)$. On pourra vérifier ses résultats à la calculatrice en calculant les valeurs approchées de vos résultats. Pour obetnir la valeur de e, on doit taper e^1.
2. (a) Résoudre sur $]0\,;+\infty[$ les inéquations $\ln(x) \geqslant 0$ et $\ln(x)+1 \geqslant 0$.
   (b) À l'aide d'un tableau de signes, déterminer le signe de $f(x)$.

EXERCICE 7.12.
En utilisant le logarithme népérien, déterminer le plus petit entier n vérifiant l'inégalité.

1. $1{,}045^n > 2$
2. $1{,}025^n \geqslant 10$
3. $0{,}95^n < 0{,}2$.

EXERCICE 7.13.
Dans un pays dont la population active est de 30 millions, on modélise de PIB (en centaines de milliards de dollars US) en fonction du nombre x d'emplois (en millions) par la fonction f définie par $f(x) = 4\ln(x) - 6$ pour $x \geqslant 6$.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f.



1. (a) Calculer $f(30)$. Arrondir à 0,1 près. Interpréter le résultat.
   (b) Dans ce pays, il y a 3,5 millions de chômeurs. Calculer le PIB de ce pays. Arrondir à 1 milliards près.
   (c) Par lecture graphique, donner le nombre d'emplois pour un PIB de 700 milliards de \$.
2. L'épargne de ce pays représente 100 milliards de \$. On imagine que l'on investit la totalité de cette épargne, ce qui augmente d'autant le PIB calculé à la question 1b.
   (a) Calculer, avec la calculatrice, le nombre d'emplois total après cette augmentation du PIB.
   (b) Y aura-t-il encore des chômeurs ?

EXERCICE 7.14.
En 2000 un pays a sa population égale à 25 millions. Celle-ci diminue de 1 % par an. On note u_n la population (en millions) pour l'année $2000+n$. Ainsi $u_0 = 25$.

1. (a) Calculer u_1 et u_2. Interpréter les résultats.
   (b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la suite (u_n).
   (c) Exprimer u_n en fonction de n.
2. On veut déterminer l'année à partir de laquelle la population aura diminué de moitié.
   (a) Montrer que cela revient à résoudre l'inéquation $n \times \ln(0{,}99) < \ln(0{,}5)$.
   (b) Justifier que $\ln(0{,}99)$ est strictement négatif.
   (c) En déduire la réponse au problème posé.

7.5 Travaux dirigés

EXERCICE 7.15.
Nathalie place 3 000 € sur un compte rémunéré au taux annuel de 0,5 % le 1er janvier 2000.
On note c_n le capital obtenu à l'année $2000 + n$.
Elle désire savoir si son capital acquis au bout de 20 ans dépassera 3 300 €.

1. Sur une feuille du tableur, en colonne **A**, elle note le rang des années suivant 2000 et en colonne **B** le capital acquis.

	A	B	C	D
1	Année n	Capital c_n	$\ln(c_n)$	Variation absolue
2	0	3 000,00 €		
3	1			
4	2			

   (a) Quelle formule a-t-elle écrit en **B3** puis récopié vers le bas pour obtenir le capital de l'année $2000 + n$?

   (b) Son capital a-t-il dépassé 3 300 € en 2020 ?

   (c) Sinon, à partir de quelle année ce capitaldépassera-t-il 3 300 € ?

2. Compléter la feuille de calcul,

   (a) en colonne **C**, calculer $\ln(c_n)$

   (b) en colonne **D**, calculer la variationabsolue entre deux valeurs consécutives de la colonne **C** en saisissant en **D3** la formule **=C3-C2**.

   (c) Comparer les nombres obtenus en colonne **D**.

   (d) Représenter le nuage de points $(n\,;\ln(c_n))$. Comment sont ces points ? Pourquoi ?

3. On rappelle que l'on note c_n le capital obtenu à l'année $2000 + n$.

   (a) Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n.

   (b) Justifier pourquoi $c_n = 3000 \times 1,005^n$.

   (c) Proposer une autre écriture de $\ln(c_n)$.

   (d) Montrer que l'inéquation $3000 \times 1,005^n > 3300$ équivaut à résoudre $n\ln(1,005) > \ln(1,1)$.

   (e) Après avoir justifié le signe de $\ln(1,005)$, résoudre cette inéquation et conclure.