Chapitre 2

Fonction affine

Sommaire

2.1 Définition et représentation

2.1.1 Définition

Définition 2.1. Soit m et p deux réels. Une fonction *affine* f est une fonction qui à tout réel x associe $f(x) = mx + p$.

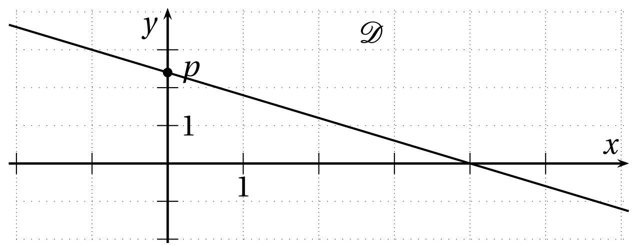
Remarques.

- Lorsque $p = 0$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx$ est une fonction affine dite *linéraire*;
- Lorsque $m = 0$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = p$ est une fonction affine dite *constante*.

EXERCICE 2.1.
Soit f, g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 2$, $g(x) = -0,5x$ et $h(x) = 3$. Justifier que f, g et h sont affines.

2.1.2 Représentation graphique

Propriété 2.1. *Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.*
La représentation graphique de f est une droite $\mathscr{D}$ qui coupe l'axe des ordonnées.
m est appelé coefficient directeur *de la droite $\mathscr{D}$.*
p est appelé ordonnée à l'origine *de la droite $\mathscr{D}$.*
On dit que la droite $\mathscr{D}$ a pour équation $y = mx + p$.



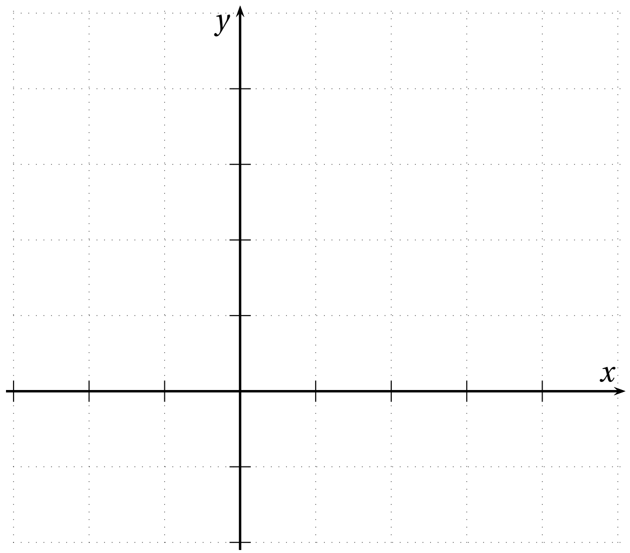
Remarques.

- La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère ;
- La représentation graphique d'une fonction constante est une droite parallèle à l'axe des abscisses ;
- Pour tracer une droite, on peut déterminer les coordonnées de deux de ses points, les plus éloignés possibles pour plus de précision dans le tracé.

EXERCICE 2.2.
Soit f, g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

- $f(x) = -0,5x + 3$
- $g(x) = -2x$
- $h(x) = 2$

Représenter graphiquement les fonctions f, g et h dans le repère ci-dessous.

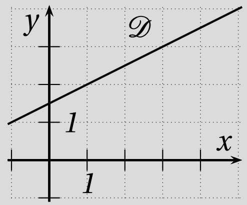


2.2 Sens de variation et signe

2.2.1 Sens de variation

Propriété 2.2. *Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.*

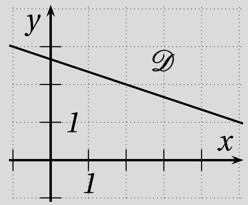
Si $m > 0$



f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
Son tableau de variations est :

x	$-\infty$	$+\infty$
f		

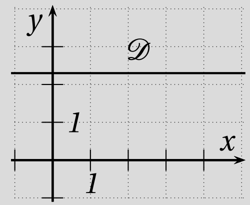
Si $m < 0$



f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Son tableau de variations est :

x	$-\infty$	$+\infty$
f		

Si $m = 0$



f est constante sur $\mathbb{R}$.
Son tableau de variations est :

x	$-\infty$	$+\infty$
f		

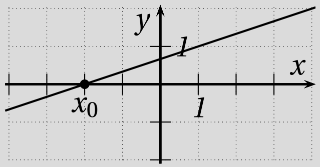
Remarque. Une fonction affine est monotone sur $\mathbb{R}$: son sens de variation ne change pas.

EXERCICE 2.3.
Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = -3x$.
Déterminer, en justifiant, le sens de variation des fonctions f et g et dresser alors leur tableau de variations.

2.2.2 Signe

Propriété 2.3. *Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.*

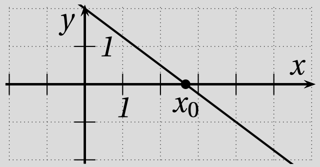
Si $m > 0$



f est négative, puis positive.
Son tableau de signe est :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

Si $m < 0$



f est positive, puis négative
Son tableau de signe est :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

Remarques.

- x_0 est la solution de l'équation $f(x) = 0$ soit $x_0 = -\frac{p}{m}$;
- Déterminer le signe de $f(x)$ revient à étudier la position de la droite d'équation $y = mx + p$ par rapport à l'axe des abscisses.

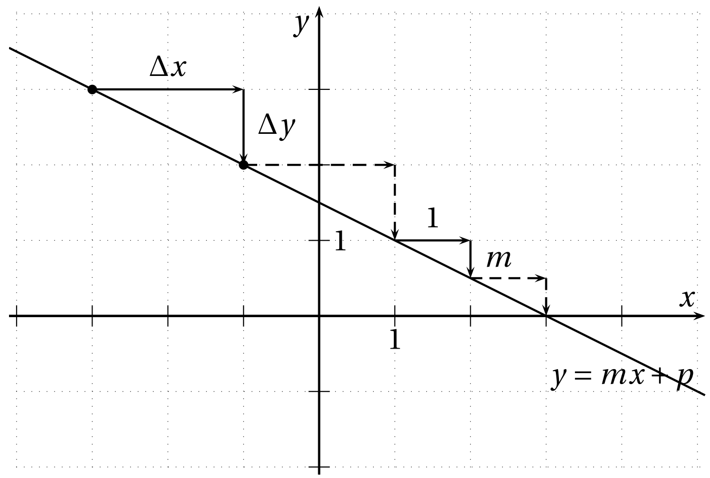
EXERCICE 2.4.
Étudier le signe des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = -3x$.

2.3 Détermination d'une fonction affine

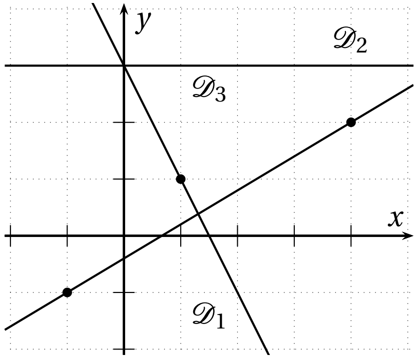
Propriété 2.4. *Soit f le fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$. Pour tous réels x_1 et x_2 tels que $x_1 \neq x_2$, $m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ et $f(x) = m(x - x_1) + f(x_1)$.*

Remarques.

- La variation des images $f(x_2) - f(x_1)$ est proportionnelle à la variation de la variable $x_2 - x_1$. Le coefficient de proportionalité est m ;
- Pour tous les points $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ distincts sur la droite $\mathscr{D}$, $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. On peut ainsi déterminer graphiquement le coefficent directeur de $\mathscr{D}$.



EXERCICE 2.5.
Dans le repère ci-contre, on donne les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$. Déterminer graphiquement le coefficient directeur de chacune de ces droites.



EXERCICE 2.6.
Un artisan fabrique des toupies. Le coût de fabrication est de 288 € pour 120 toupies et 345 € pour 150 toupies. On estime que le coût de fabrication est une fonction affine f de la quantité x fabriquée, soit $f(x) = mx + p$.

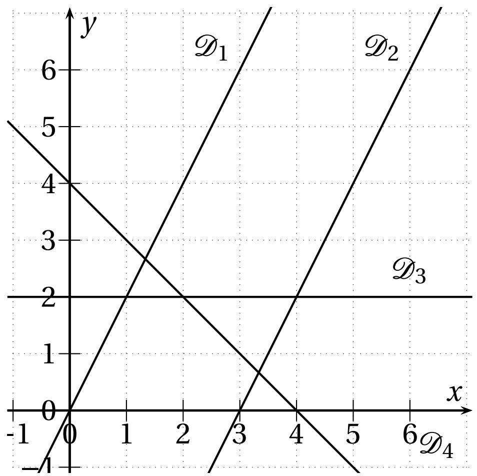
1. (a) Déterminer l'accroissement moyen du coût m pour une toupie.
   (b) En déduire l'expression de $f(x)$.
2. Chaque toupie est vendue 2,5 € pièce.
   (a) Déterminer l'expression de la fonction recette g en fonction de la quantité x vendue.
   (b) Quelle est la nature de la fonction g ?
3. À partir de combien de toupies fabriquées et vendues réalise-t-on un bénéfice ?

2.4 Exercices

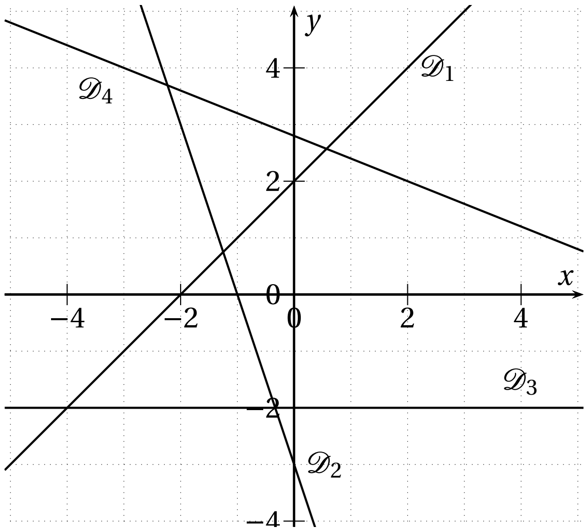
EXERCICE 2.7.
On donne cinq fonction affines.

- $f(x) = -x + 4$
- $j(x) = -2x + 4$
- $g(x) = 2$
- $h(x) = 2x$
- $k(x) = 2x - 6$

1. Parmi les quatre droites tracées ci-dessous, indiquer celles qui représentent les fonctions g et k.
2. L'une des fonctions est linéaire. Laquelle ? Quelle droite la représente ?
3. Indiquer le sens de variation de la fonction affine représentée par la droite $\mathscr{D}_4$.
4. Quelle fonction affine est représentée par $\mathscr{D}_1$?
5. Par lecture graphique, puis par le calcul, résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.



EXERCICE 2.8.
On donne dans le repère ci-dessous les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$ et $\mathscr{D}_4$.
Déterminer graphiquement leur coefficient directeur.



EXERCICE 2.9.
Dans un repère, tracer les droites passant par le point donné et de coefficient directeur m.

- $A(3\,;-1)$ et $m=-2$.
- $B(4\,;1)$ et $m=0$.
- $C(-2\,;1)$ et $m=\frac{1}{3}$.

EXERCICE 2.10.
Représenter chacune des droites données par leur équation. Vous pouvez utiliser les coefficients m et p ou déterminer les coordonnées de deux points de la droite d'une autre manière.

- $\mathscr{D}_1 : y=x-2$
- $\mathscr{D}_2 : y=-x+2$
- $\mathscr{D}_3 : y=x$
- $\mathscr{D}_4 : y=-3$
- $\mathscr{D}_5 : y=-x$

EXERCICE 2.11.
On donne les points $A(1\,;3)$ et $B(5\,;1)$.

1. Déterminer, par le calcul, l'équation réduite de la droite (AB).
2. Déterminer, par le calcul, l'ordonnée du point de la droite (AB) d'abscisse 4.
3. Déterminer, par le calcul, les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) avec l'axe des abscisses.

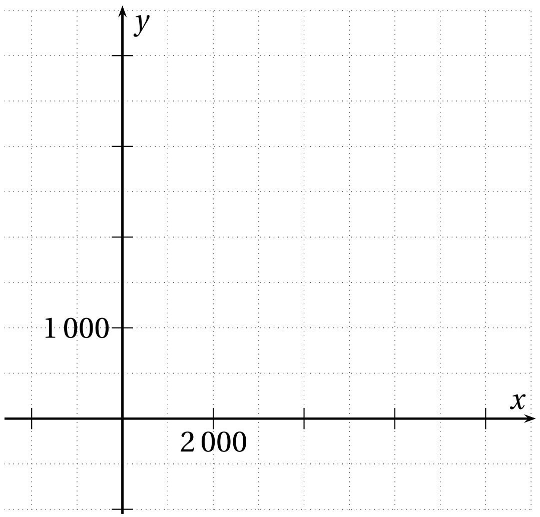
EXERCICE 2.12.
Sur le marché de Marseille, la demande y d'ananas du Ghana, en tonnes, est modélisée par la fonction f définie par $f(p)=-200p+280=y$, pour un prix p entre 0,65 € et 0,90 € par kg.

1. Déterminer la demande pour un prix de 0,80 €.
2. Calculer la variation absolue de la demande si le prix passe de 0,65 € à 0,90 € par kg.
3. Déterminer le prix du marché si la demande est de 140 tonnes.
4. Exprimer le prix p, en fonction de la demande y, sous la forme $p=g(y)=m'y+p'$.
Quel est le sens de variation de la fonction g ?

EXERCICE 2.13.
Dans une entreprise, trois catégories de salariés A, B et C réçoivent un salaire mensuel brut, fonction du nombre x de produits vendus par mois.

	Fixe	Par produit	Fonction
A	2 500 €	0,20 €	$f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
B	2 000 €	0,30 €	$g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
C	4 100 €	0 €	$h(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

1. Déterminer les fonctions f, g et h correspondant à ces salaires mensuels.
2. Représenter ces trois fonctions dans le repère ci-dessous.
3. À partir de quelle quantité de produits vendus le salaire de B devient-il supérieur au salaire A ? Et au salaire C ?
4. Déterminer par le calcul le nombre de produits à vendre pour que le salaire de B soit égal à 3 935 €.



EXERCICE 2.14.
Pour chaque question suivante, exprimer le coût total $f(x)$ pour x articles fabriqués, sous la forme $f(x) = mx + p$.

1. Tout article a un coût unitaire de 10,5 €.
2. Pour 30 articles fabriqués, au même coût unitaire, le coût total est de 105 €.
3. Le coût est de 450 € pour 20 articles et il est de 950 € pour 46 articles.

EXERCICE 2.15.

1. À l'occasion des soldes, un commerçant applique une remise de 25 % sur tout le magasin.
   (a) Exprimer le prix soldé $f(x)$ en fonction du prix initial x.
   (b) Calculer le prix initial d'un pull dont le prix soldé est de 19,80 €.
2. Sanghavi, de passe en France en décembre 2014, effectue ses achats dans ce magasin et demande à bénéficier de l'exonération de la TVA dont le taux est fixé à 20 %.
   (a) Calculer le prix payé par Sanghavi pour un manteau dont le prix TTC non soldé est 240 €.
   (b) Déterminer la fonction g exprimant le prix soldé et détaxé $g(x)$ en fonction du prix initial x.
   (c) Déterminer le prix TTC non soldé de ses cahats dans ce magasin, payés 300 €.

EXERCICE 2.16.
Déterminer selon les valeurs de x les signes de $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x + 5$, $g(x) = -4x - 30$ et $h(x) = 5x - 125$.

EXERCICE 2.17.
Déterminer selon les valeurs de x le signe des expressions suivantes :

- $A(x) = (2x+5)(5-x)$ définie dans $\mathbb{R}$.
- $B(x) = 3x(3x+5)$ définie dans $\mathbb{R}$.
- $C(x) = -6(x-3)(x-15)$ définie dans $[0\,;21]$.

EXERCICE 2.18.
Du 6 octobre au 10 octobre 2014, le CAC40 est passé de 4 286,5 points à 4 073,7 points.

1. (a) Calculer la variation absolue du CAC40 entre des deux dates. En déduire l'accroissement journalier moyen.
   (b) Calculer son taux d'évolution global.
2. On suppose que le cours du CAC40 est une fonction affine f du temps t (en jours) depuis le 10 octobre 2014.
   (a) Déterminer l'expression de $f(x)$.
   (b) En déduire une estimation du CAC le 9 octobre 2014.