Chapitre 9

Fonction exponentielle

Sommaire

9.1 Introduction

Propriété 9.1. *Pour tout réel k, l'équation* $\ln(x) = k$ *a une unique solution dans l'intervalle* $]0\,;+\infty[$.

En effet la fonction $\ln(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0 et vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et elle passe de l'un à l'autre sans discontinuité. Entre les deux, elle passe donc par toutes les valeurs réelles.

x	0				$+\infty$
$\ln(x)$	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$	k	$\nearrow$ $+\infty$

Définition 9.1. Pour tout réel x on note $\exp(x)$ le nombre dont le logarithme népérien vaut x. Ainsi, pour tout réel strictement positif y, $y = \exp(x) \Leftrightarrow \ln(y) = x$.

Propriété 9.2. $\ln(\exp(x)) = x \Leftrightarrow \ln(\exp(x)) = x\ln(e) \Leftrightarrow \ln(\exp(x)) = \ln(e^x) \Leftrightarrow \exp(x) = e^x$

Exemple 9.1. $\ln(1) = 0 \Leftrightarrow \exp(0) = \mathrm{e}^0 = 1$ $\quad$ $\ln(\mathrm{e}) = 1 \Leftrightarrow \exp(1) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.

Remarque. On connaissait déjà e^5 ou e^{-2} mais pas $\mathrm{e}^{4,3}$ ou $\mathrm{e}^{-1,2}$.

- $\mathrm{e}^{4,3}$ est le nombre dont le logarithme népérien vaut .... $\mathrm{e}^{4,3} = \ldots\ldots$
- $\mathrm{e}^{-1,2}$ est le nombre dont le logarithme népérien vaut .... $\mathrm{e}^{-1,2} = \ldots\ldots$

9.2 Fonction exponentielle

9.2.1 Définition

Définition 9.2. La fonction exponentielle, notée exp, est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto \exp(x) = \mathrm{e}^x$.

9.2.2 Signe

Propriété 9.3. *Pour tout réel* x, $\exp(x) = e^x > 0$ *donc :*

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
e^x	$+$

9.2.3 Dérivée et sens de variation

Propriété 9.4. *La fonction* exp *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est* $\exp(x)' = \exp(x)$ *et est donc strictement positive. La fonction* exp *est donc strictement croissante.*

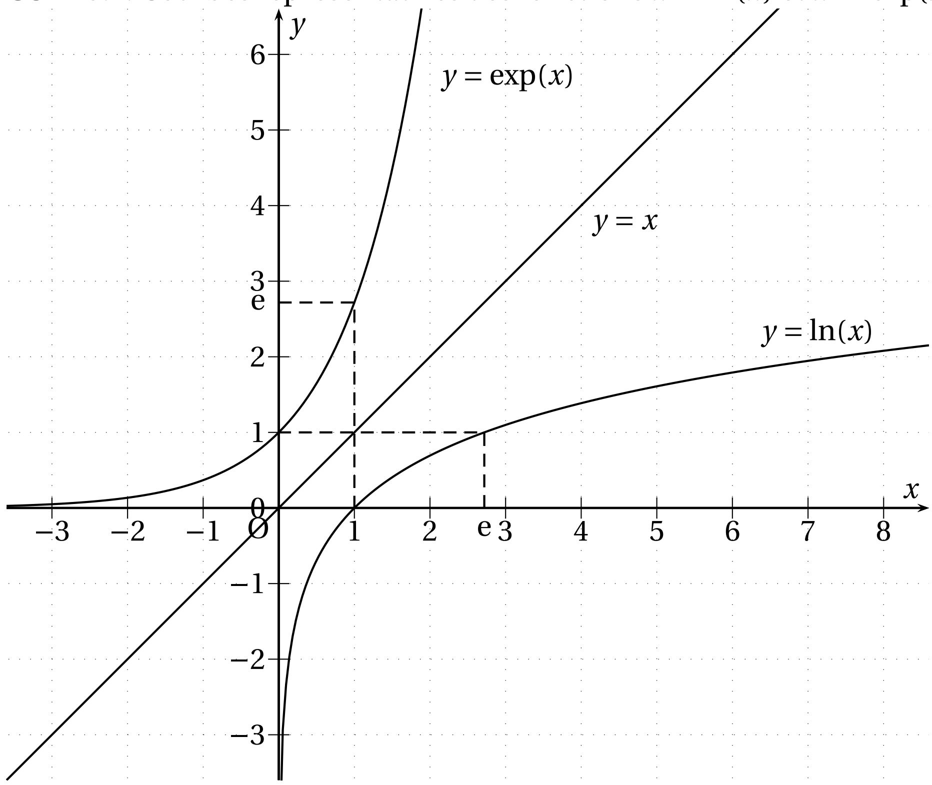
x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$(\exp(x))' = \exp(x) = e^x$	$+$
$\exp(x) = e^x$	$0 \nearrow +\infty$

9.2.4 Représentation graphique

Propriété 9.5. *Pour tout réel* x, $\ln(\exp(x)) = \ln(e^x) = x$.
Pour tout réel $x > 0$, $\exp(\ln(x)) = e^{\ln(x)} = x$.

On dit que ces deux fonctions sont réciproques l'une de l'autre.
Dans un repère orthonormé, les courbes représentant la fonction logarithme népérien et la fonction exponentielle sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ comme on peut le voir sur la figure 9.1 page suivante

FIGURE 9.1: Courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto \exp(x)$



9.3 Propriétés algébriques

9.3.1 Relation fondamentale

Propriété 9.6. *Pour tous réels a et b* $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b) \Leftrightarrow e^{a+b} = e^a \times e^b$.

L'exponentielle d'une somme est donc le produit des exponentielles.

9.3.2 Autres propriétés

Les propriétés algébriques suivantes sont aussi vérifiées :

Propriété 9.7. *Pour tous réels x et y on a :*
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $(e^x)^y = e^{x \times y}$

9.4 Équations et inéquations

Propriété 9.8. *Pour tous réels x et a :*
- $e^x = e^a \Leftrightarrow x = a$
- $e^x < e^a \Leftrightarrow x < a$

9.5 Exponentielle de base q

Définition 9.3. Soit q un réel strictement positif.
On appelle *fonction exponentielle de base q*, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto q^x$

Propriété 9.9. *Pour tous réels q et p strictements positifs et pour tous réels x et y, on a :*

- $q^{x+y} = q^x \times q^y$
- $q^{x-y} = \frac{q^x}{q^y}$
- $\left(q^x\right)^y = q^{xy}$
- $q^{-x} = \frac{1}{q^x}$
- $q^x p^x = (qp)^x$

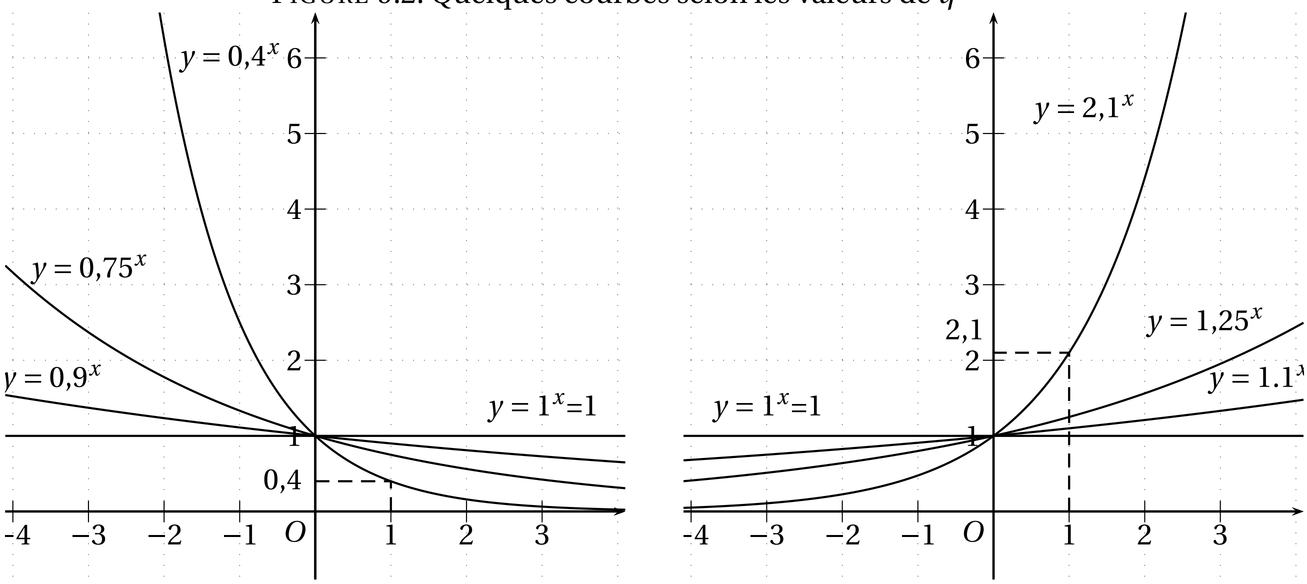
Propriété 9.10. *Soit q un réel strictement positif.*

- *Si $0 < q < 1$ alors la fonction $x \mapsto q^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$*
- *Si $q = 1$ alors la fonction $x \mapsto 1^x = 1$ est constante sur $\mathbb{R}$*
- *Si $q > 1$ alors la fonction $x \mapsto q^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$*

Trois types de courbes, donc, selon les valeurs de q. Plusieurs exemples sont donnés sur la figure de la présente page.
On remarquera que, pour tout réel q ($q > 0$) :

- $q^0 = 1$ et donc toutes les courbes passent par le point $(0\,;1)$;
- $q^1 = q$ et donc toutes les courbes passent par le point $(1\,;q)$.

FIGURE 9.2: Quelques courbes selon les valeurs de q



9.6 Exercices

Exercice 9.1.
Exprimer en fonction du nombre e chacun des nombres suivants :

- $A = \exp(-2)$
- $B = \exp(0{,}8) \times \exp(1) \times \exp(1{,}2)$
- $C = \frac{\exp(1{,}23)}{\exp(0{,}23)}$

Exercice 9.2.
Simplifier chacune des expressions :

- $A = \frac{\mathrm{e}^{1{,}5}}{\mathrm{e}}$
- $D = \mathrm{e} \times \mathrm{e}^2$
- $B = \left(\mathrm{e}^{0{,}5}\right)^4 \times \mathrm{e}^{-1}$
- $C = (\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x})^2$
- $E = (\mathrm{e}^3)^4 \times \frac{\mathrm{e}^{-2}}{\mathrm{e}^5}$

Exercice 9.3.
Simplifer les expressions suivantes :

- $A = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x}$
- $B = (\mathrm{e}^x + 1)(\mathrm{e}^x - 1)$
- $C = \left(\mathrm{e}^{x+1}\right)\left(\mathrm{e}^{x-1}\right)$

Exercice 9.4.
Factoriser en mettant e^x en facteur :

- $A = 2x\mathrm{e}^x - x^2\mathrm{e}^x$
- $B = \mathrm{e}^x - 4x^2\mathrm{e}^x$
- $C = x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 3\mathrm{e}^x$
- $D = 3x^2\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x$

Exercice 9.5.
Dresser le tableau de signe des expressions suivantes.

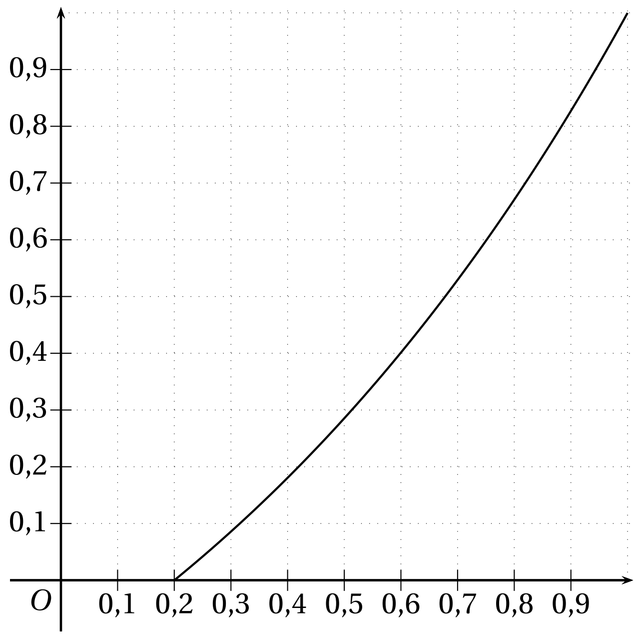
- $A(x) = (x-2)\mathrm{e}^x$
- $B(x) = \frac{-0{,}5x+3}{\mathrm{e}^x}$
- $C(x) = \frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$

Exercice 9.6.
Dans un pays, 20 % des ménages n'ont pas de véhicule et la répartition du parc motorisé est donnée par la fonction f telle que :

$$f(x) = 0{,}668\mathrm{e}^x - 0{,}816 \text{ pour } 0{,}2 \leqslant x \leqslant 1$$

où $f(x)$ est la proportion du parc motorisé détenue par la proportion x des ménages du pays.
On donne ci-contre la représentation graphique de f, appelée courbe de Lorentz.

1. Calculer $f(0{,}5)$ et interpréter ce résultat.
2. (a) Déterminer graphiquement la proportion des ménages du pays possédant 80 % du parc motorisé.
   (b) Retrouver ce résultat en résolvant une équation.



Exercice 9.7.
Thomas a 13 ans et demi. Il dispose de 800 € d'économies.
Ses parent décident de placer cet argent sur un livret à intérêts composés au taux annuel de 4 %.

1. Calculer au centime d'euro près le capital dont il disposera au bout de trois ans, c'est-à-dire sa valeur acquise au bout de trois ans.
2. On considère la fonction f définie sur $[0\,;18]$ par $f(x) = 800 \times 1{,}04^x$.
   Le nombre $f(x)$ représente la valeur acquise d'un captial de 800 € placé pendant une durée de x années au taux annuel de 4 %.
   (a) Calculer la valeur acquise lorsque Thomas atteindra sa majorité, soit dans quatre ans et demi.
   (b) Combien d'années Thomas devra-t-il patienter pour voir doubler son capital initial ?

EXERCICE 9.8.
Une entreprise récolte et conditionne des fruits exotiques. On estime que la quantité demandée q, en tonne, en fonction du prix p, en euros par kg, est modélisée par la fonction f :

$$q = f(p) = 7{,}4 \times 0{,}6^p \text{ où } p \in [1\,;4]$$

1. Établir les variations de la fonction f. Interpéter le résultat.
2. L'entreprise a deux tonnes de fruits à vendre.
   (a) À l'aide du tableau de variations de f, indiquer pourquoi l'équation $f(p)$ admet une unique solution α sur $[1\,;4]$.
   (b) À l'aide du solveur graphique de la calculatrice, donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
   (c) En déduire le prix maximum d'un kg de fruits permettant d'écouter totalement la production.

EXERCICE 9.9.
Une production est fonction de l'investissement x, en milliers d'euros.
La quantité produite $f(x)$, en tonnes, est modélisée par la fonction f telle que $f(x) = 10 \times 1{,}03^x - 14$.
La production n'est réelle qu'à partir d'un investissement x tel que $f(x) > 0$.
Combien est-il nécessaire d'investir (à 0,1 milliers d'euros près) pour produire ?

EXERCICE 9.10 (D'après BTS 2014)**.**
Une entreprise fabrique un certain type d'articles. Sa capicité maximale de production est 80 articles. Le tableau ci-dessous donne le coût total de production, en centaines d'euros, en fonction du nombre d'articles fabriqués par cette entreprise.

Nombre d'articles fabriqués x	10	20	30	50	70	80
Coût total de production y	2	3	5	8,5	18	38

1. (a) Donner le coefficient de corrélation linéaire r associé à cette série statistique à deux variables.
   (b) On estime que si $r^2 < 0{,}9$, un ajustement affine n'est pas pertinent. Est-ce le cas ?
2. On effectue le changement de variable $z = \ln(y)$.
   (a) Compléter le tableau suivant. On arrondira les valeurs approchées à 10^{-2}.

Nombre d'articles fabriqués x	10	20	30	50	70	80
$z = \ln(y)$						

   (b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite de régression de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés sous la forme $z = ax + b$ où les constantes a et b sont à arrondir à 10^{-2}.
   (c) En déduire que l'expression de y en fonction de x est $y = 1{,}36\mathrm{e}^{0{,}04x}$.
   (d) À l'aide de la question précédente, donner une estimation, à un euro près, du coût total de production de 60 articles.

9.7 Travaux dirigés

EXERCICE 9.11 (Étude de coût dans une entreprise)**.**
Dans uneentreprise, on a relevé quelques valeurs de quatre coûts : le coût de x tonnes de matière première, le coût de stockage de x m^3 de paquets, le coût de x centaines de pages de publicité et le coût de production de x kg de produit.
On cherche un modèle de fonction pour chacun de ces coûts.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Étude de coûts							
2	**Valeurs**	Matière première		Stockage de paquets		Pages de publicité		Production de produit	
3		x (en t)	$m(x)$	x (en m^3)	$s(x)$	x (par 100)	$p(x)$	x (en kg)	$g(x)$
4		1	5	1	6	1	0	1	2,718
5		2	7	2	11	2	0,693	2	7,389
6		3	9	3	18	3	1,099	3	20,085
7		4	11	4	27	4	1,386	4	54,598
8		5	13	5	38	5	1,609	5	148,41
9		6	15	6	51	6	1,792	6	403,43
10									
11		Étude de coûts							
12	**Valeurs**	Matière première		Stockage de paquets		Pages de publicité		Production de produit	
13		V. abs.	V. rel.	V. abs.	V. rel.	V. abs.	V. rel.	V. abs.	V. rel.
14	de 1 à 2								
15	de 2 à 3								
16	de 3 à 4								
17	de 4 à 5								
18	de 5 à 6								

1. Pour chacun de ces coûts, calculer la variation absolue et la variation relative entre deux valeurs entières consécutives indiquées.
2. Parmi les fonctions de référence, indiquer la fonction f telle que :
   (a) la variation absolue est constante
   (b) la variation relative est constante
   (c) $f(2)+f(3)=f(6)$
   (d) $f(2)\times f(3)=f(5)$
3. (a) À l'aide du tableau de valeurs et de la question précédente, indiquer le modèle de fonction de référence correspondant à chacun des coûts.
   (b) Représenter pour chaque coût le nuage de points de la série.
   (c) À l'aide d'une courbe de tendance, donner l'expression de chaque coût en fonction de x