Chapitre 11

Dérivation

Sommaire

11.1 Nombre dérivé, fonction dérivée

11.1.1 Nombre dérivé et tangente

Définition 11.1. Soit f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère. Si la courbe $\mathscr{C}_f$ admet au point $A\left(a\,;\,f(a)\right)$ une tangente T non parallèle à l'axe des ordonnées, alors on appelle *nombre dérivé de f en a*, noté $f'(a)$, le coefficient directeur de cette tangente.

Remarques.

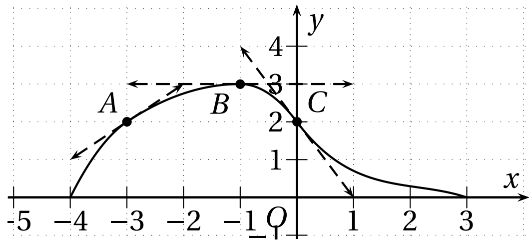
- Si la tangente à une courbe au point d'abscisse a est horizontale, alors $f'(a) = \ldots\ldots$.
- Il ne faut pas confondre :
  - $f(a)$ qui est ....du point A de la courbe d'abscisse a ;
  - $f'(a)$ qui est .... de la tangente à la courbe au point A d'abscisse a.

Propriété 11.1. *Lorsque f est dérivable en a, l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a est :*

$$T : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exemple. Dans le repère ci-après, la courbe $\mathscr{C}_f$ représente une fonction f définie sur $[-4\,;3]$. Les droites T_1, T_2 et T_3 sont les tangentes à $\mathscr{C}_f$ respectivement en A, B et C.

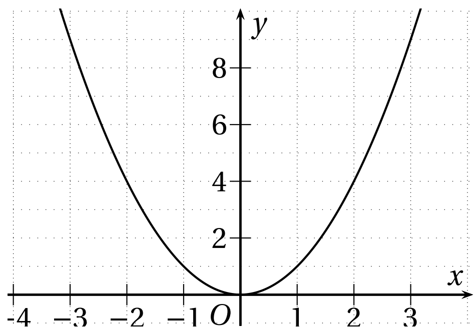
1. Compléter par lecture graphique :
   - $f(-3) = \dots\dots\dots\dots$;
   - $f'(-3) = \dots\dots\dots\dots$;
   - $f(-1) = \dots\dots\dots\dots$;
   - $f'(-1) = \dots\dots\dots\dots$;
   - $f(0) = \dots\dots\dots\dots$;
   - $f'(0) = \dots\dots\dots\dots$
2. Déterminer les équations réduites de ces trois tangentes.



11.1.2 Fonction dérivée

Définition 11.2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si f admet un nombre dérivé pour tout réel x de I, on dit que f est dérivable sur I.
La fonction qui, à tout réel x de I, associe le nombre dérivée $f'(x)$, est appelée *fonction dérivée* (ou *dérivée*) de f sur I et notée f'.

Exemple. Soit f la fonction définie sur $[-3;3]$ par $f : x \longmapsto x^2$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet en chaque point d'abscisse a une tangente qui a pour coefficient directeur le nombre dérivé de f en a, c'est-à-dire $f'(a)$. Ainsi la fonction f admet un nombre dérivé $f'(a)$ pour tout réel a ; on dit alors que f est dérivable sur $[-3;3]$.



Remarque. Dans des problèmes d'étude de coût, on définit la fonction *coût marginal* C_m comme étant la fonction dérivée de la fonction coût C : $C_m = C'$. De même pour les fonctions *bénéfice marginal* et *recette marginale* qui sont les dérivées respectives des fonctions *bénéfice* et *recette*

11.2 Calcul différentiel

11.2.1 Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Propriété 11.2. *Soit k un réel et n un entier naturel non nul. Les fonctions usuelles suivantes sont dérivables sur leur ensemble de définition et on a :*

- *Si $f : x \longmapsto f(x) = k$ alors $f' : x \longmapsto f'(x) = 0$;*
- *Si $f : x \longmapsto f(x) = x$ alors $f' : x \longmapsto f'(x) = 1$;*
- *Si $f : x \longmapsto f(x) = x^2$ alors $f' : x \longmapsto f'(x) = 2x$;*
- *Si $f : x \longmapsto f(x) = x^n$ alors $f' : x \longmapsto f'(x) = nx^{n-1}$;*
- *Si, pour $x \neq 0$, $f : x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x}$ alors $f' : x \longmapsto f'(x) = -\frac{1}{x^2}$;*
- *Si, pour $x > 0$, $f : x \longmapsto f(x) = \ln x$ alors $f' : x \longmapsto f'(x) = \frac{1}{x}$;*
- *Si $f : x \longmapsto f(x) = e^x$ alors $f' : x \longmapsto f'(x) = e^x$.*

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto x^3$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f' : x \longmapsto f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

11.2.2 Opérations sur les fonctions dérivées

Propriété 11.3. *Soit u et v deux fonctions dérivables et de dérivées u' et v' sur un intervalle I et soit k un réel.*

1. *La fonction $f = u + v$ est dérivable sur I et $f' = u' + v'$.*
2. *La fonction $f = k \times u$ est dérivable sur I et $f' = k \times u'$.*
3. *La fonction $f = u \times v$ est dérivable sur I et $f' = u' \times v + v' \times u$.*
4. *Pour $v(x) \neq 0$ sur I, la fonction $f = \frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $f' = -\frac{v'}{v^2}$.*
5. *Pour $v(x) \neq 0$ sur I, la fonction $f = \frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $f' = \frac{u' \times v - v' \times u}{v^2}$.*

EXERCICE.
Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

- $f : x \longmapsto -x^2 + 2x - 1$;
- $g : x \longmapsto 3x^3 + \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$;
- $h : x \longmapsto x^2 \mathrm{e}^x$;
- $i : x \longmapsto \frac{1}{3x-4}$ pour $x \neq \frac{4}{3}$;
- $j : x \longmapsto \frac{x}{\ln x}$ pour $x > 0$.

11.2.3 Dérivées des fonctions u^n, $\ln u$ et e^u

Propriété 11.4. *Soit u une fonction dérivable sur I et n un entier naturel non nul.*
La fonction f définie par $f : x \longmapsto u^n(x) = [u(x)]^n$ est dérivable sur I et $f' : x \longmapsto n \times u'(x) \times u^{n-1}(x)$.

EXERCICE.
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto (5x-2)^4$. Calculer $f'(x)$.

Propriété 11.5. *Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur I.*
La fonction f définie sur I par $f : x \longmapsto \ln[u(x)]$ est dérivable sur I et $f' : x \longmapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$.

EXERCICE.
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto \ln\left(x^2+1\right)$. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.

Propriété 11.6. *Soit u une fonction dérivbale sur I.*
La fonction f définie sur I par $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur I et $f' : x \longmapsto u'(x) \times eu(x)$.

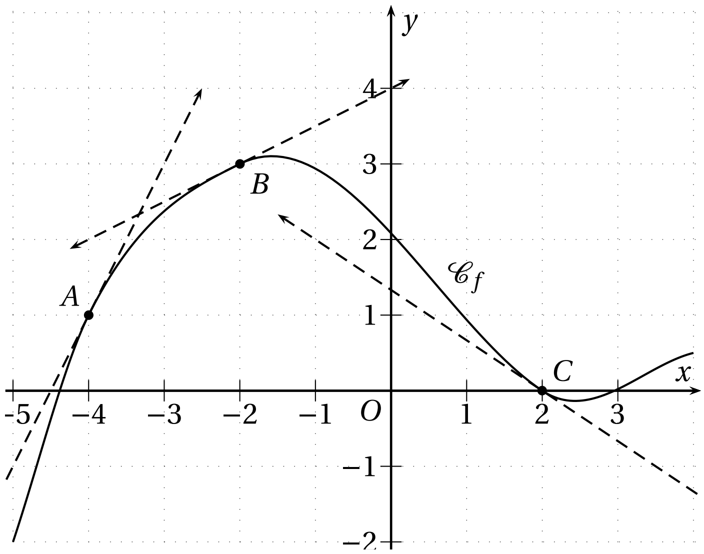
EXERCICE.
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{(x^2)}$. Calculer $f'(x)$.

11.3 Exercices

EXERCICE 11.1.

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-6\,;3]$ et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique ci-contre.
Les tangentes aux points A, B et C sont tracées.

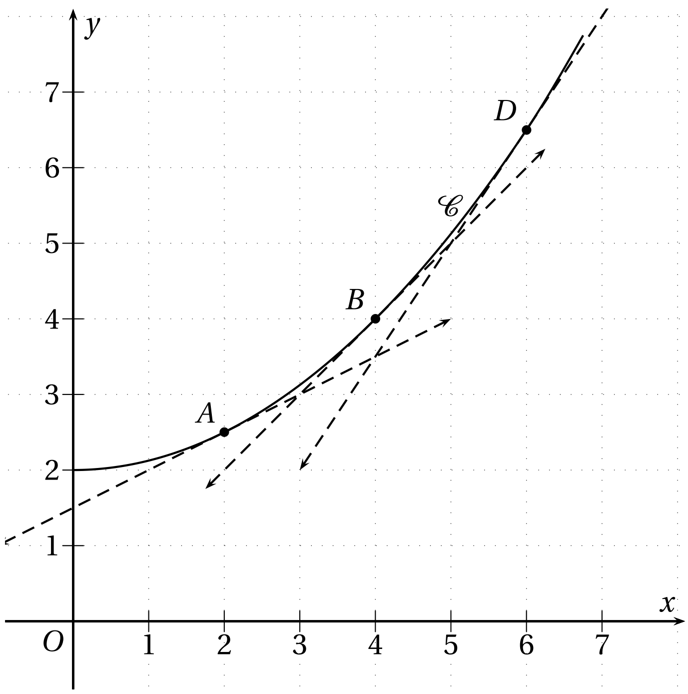
1. Lire graphiquement les nombres suivants :
   - $f(-4) = \ldots\ldots$;
   - $f'(-4) = \ldots\ldots$;
   - $f(-2) = \ldots\ldots$;
   - $f'(-2) = \ldots\ldots$;
   - $f(2) = \ldots\ldots\ldots$;
   - $f'(2) = \ldots\ldots\ldots$
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A.
   ....
   ....



EXERCICE 11.2.

La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre représente la fonction coût total de production C (en milliers d'euros) de x tonnes de fruits. Trois tangentes à $\mathscr{C}$ sont tracées.
On admet que le coût marginal pour a tonnes de fruits est assimilé à $C'(a)$, nombre dérivé de la fonction coût total en a.

1. Lire les coefficients directeurs des tangentes à $\mathscr{C}$ en A, B et D.
2. En déduire le coût marginal de production lorsqu'on a produit 2 tonnes de fruits. Exprimer ce coût marginal en euros par tonne.
3. Même question pour une production de 6 tonnes.

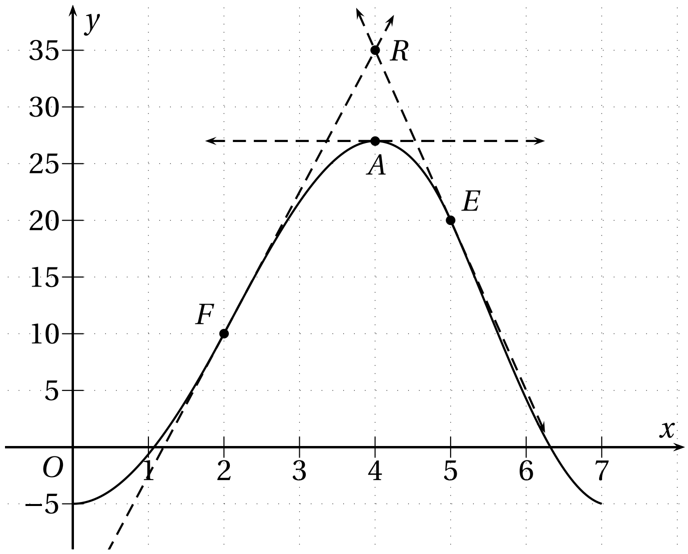


EXERCICE 11.3.

Le bénéfice (en milliers d'euros) réalisé par une entreprise lorsqu'elle fabrique et vend x milliers de jouets est modélisé par la fonction $\mathscr{B}$ représentée par la courbe ci-dessous.
On admet que le bénéfice marginal pour a milliers de jouets fabriqués et vendus est assimilé à $\mathscr{B}'(a)$, nombre dérivé de la fonction $\mathscr{B}$ en a.
Sur le graphique, on a tracé des tangentes à la courbe :

- au point $A(4\,;27)$, elle est horizontale ;
- aux points $E(5\,;20)$ et $F(2\,;10)$, les tangentes tracées se coupent en $R(4\,;35)$.

1. (a) Déterminer graphiquement le bénéfice pour 4 000 et 5 000 jouets fabriqués et vendus.
   (b) Calculer le bénéfice moyen pour 5 000 jouets fabriqués et vendus.
2. En utilisant les tangentes tracées, déterminer le bénéfice marginal pour 4 000 jouets, puis pour 2 000 jouets fabriqués et vendus.
3. (a) Si l'entreprise fabrique et vend 5 000 jouet, le bénéfice marginal est-il une perte ou un profit ?
   (b) Même question pour 2 000 jouets fabriqués et vendus.

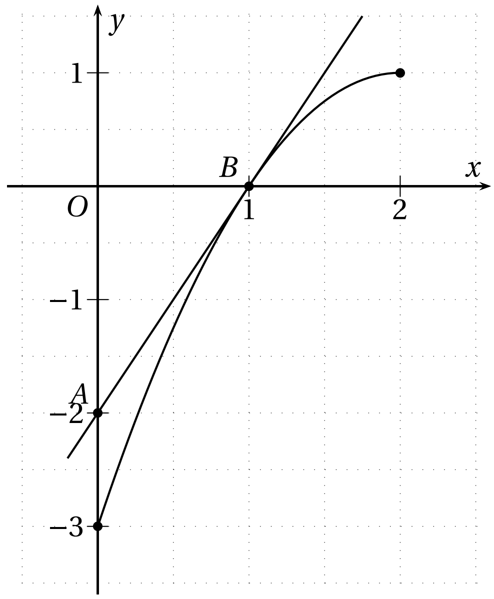


EXERCICE 11.4.
Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto -x-5$;
2. $f : x \longmapsto 3x^2+5x-10$;
3. $f : x \longmapsto -0{,}1x^3+6x+10$;
4. $f : x \longmapsto 0{,}001x^3 - x^2 + 0{,}1x+50$;
5. $f : t \longmapsto \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}$;
6. $f : x \longmapsto \frac{1}{3}\left(x^3+2x+3\right)$;
7. $f : q \longmapsto \frac{3q^2-q+1}{5}$;
8. $f : x \longmapsto 2\ln(x) + \frac{7}{x}$;
9. $f : x \longmapsto -2e^x+3-\frac{1}{x}$.

EXERCICE 11.5.
Soit f la fonction définie sur $[0;2]$ dont on donne la courbe représentative ci-contre.

1. (a) Déterminer l'équation de (AB)
   (b) On admet que la droite (AB) est la tangente à la courbe en $B(1;0)$. En déduire $f'(1)$.
2. L'expression de la fonction f sur $[0;2]$ est $f(x) = -x^2+4x-3$.
   (a) Calculer $f'(x)$ et retrouver le résultat de la question 1b.
   (b) Calculer $f'(2)$. Que peut-on en déduire pour la tangente correspondante ?



EXERCICE 11.6.
On rappelle que la fonction coût moyen f est donnée par le quotient de coût total $C(x)$ par la quantité x, soit $f(x) = \frac{C(x)}{x}$. Exprimer le coût moyen en fonction de la quantité x et calculer sa dérivée pour chacune des fonctions coût total C suivantes :

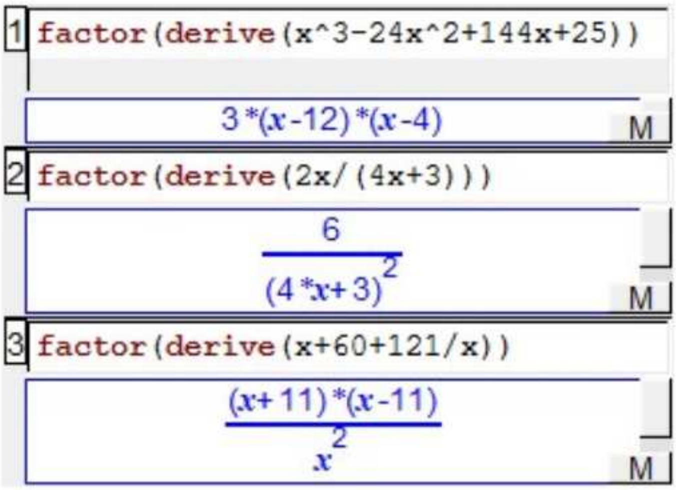
1. $C : x \longmapsto x^3 + 3x + 12$;
2. $C : x \longmapsto 0{,}2x^3 + 4x + 10$;
3. $C : x \longmapsto -0{,}01x^3 + 2x^2 - x + 100$.

EXERCICE 11.7.
Soit $C : q \longmapsto q^2 + 2q + 36$, la fonction modélisant un coût total de fabrication en euros pour une quantité q variant de 0 à 10 unités.

1. (a) Calculer la dérivée du coût total.
   (b) En déduire la coût marginal pour 4 unités produites.
2. (a) Caculer le coût moyen de 4 unités.
   (b) Exprimer le coût moyen $M(q)$ en fonction de q.
   (c) Cacluler la dérivée du coût moyen.

EXERCICE 11.8.
Justifier par un calcul détaillé l'expression de $f'(x)$ qui est donnée avec un logiciel de calcul formel sur l'image ci-contre.

1. $f : x \longmapsto x^3 - 24x^2 + 144x + 25$;
2. $f : x \longmapsto \frac{2x}{4x+3}$;
3. $f : x \longmapsto x + 60 + \frac{121}{x}$.



EXERCICE 11.9.
Calculer la dérivée des fonctions suivantes sur l'intervalle I donné.

1. $f : x \longmapsto x^2 \ln(x)$ sur $I =]0\,;+\infty[$;
2. $f : x \longmapsto (2x+1)\mathrm{e}^x$ sur $I = \mathbb{R}$;
3. $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 2)$ sur $I = \mathbb{R}$;
4. $f : x \longmapsto \frac{1}{2x-1}$ sur $I = \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$;
5. $f : x \longmapsto \frac{4}{x^2+2x}$ sur $I =]0\,;+\infty[$;
6. $f : x \longmapsto \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}$ sur $I = \mathbb{R}$;
7. $f : x \longmapsto \frac{3x-7}{-x+2}$ sur $I =]2\,;+\infty[$;
8. $f : x \longmapsto \frac{-x^2+2x+3}{x-1}$ sur $I =]1\,;+\infty[$;
9. $f : x \longmapsto \frac{\ln(x)-1}{x}$ sur $I =]0\,;+\infty[$.

EXERCICE 11.10.

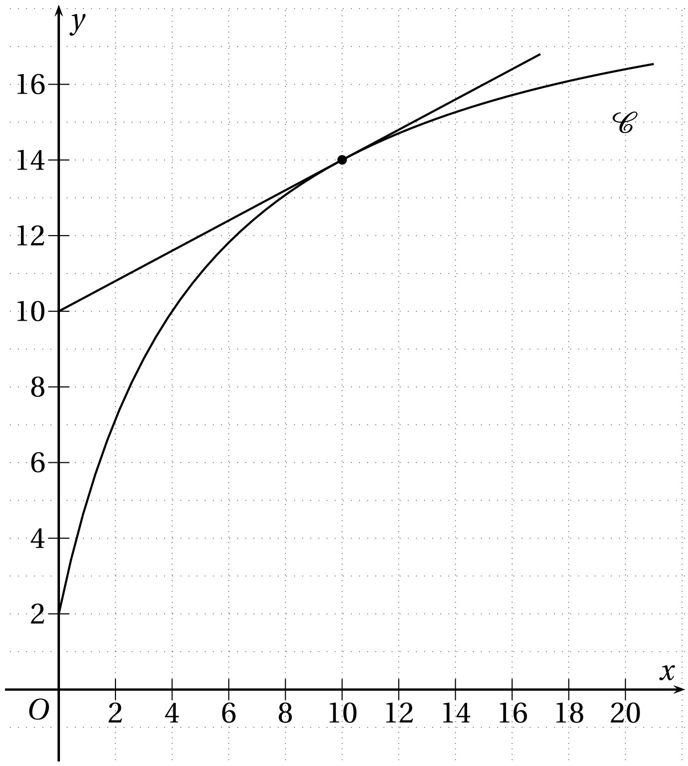
La population d'une ville nouvelle est modélisée par $f : t \longmapsto \frac{20t+10}{t+5}$ où :

- t est le temps écoulé, en années, depuis l'année 2000 ;
- $f(t)$ est la population, en milliers d'habitants.

La fonction f est représentée ci-contre.

Le nombre $f'(a)$, nombre dérivé de f en a, est assimilé au rythme de croissance de la population de cette ville à l'année $2000 + a$.

1. Déterminer graphiquement le rythme de croissance en 2010.
2. Calculer $f'(t)$ et en déduire $f'(4)$ et $f'(6)$.
3. Interpréter ces résultats et les faire figurer sur le graphique.



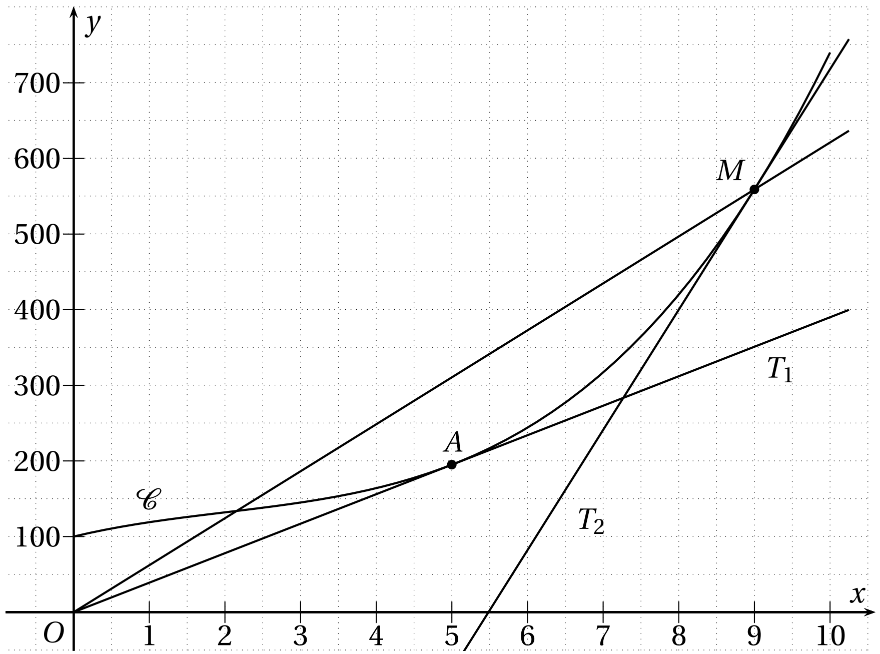
EXERCICE 11.11.

Calculer la dérivée des fonctions suivantes sur l'intervalle I donné.

1. $f : x \longmapsto (2x+1)^3$ sur $I = \mathbb{R}$;
2. $f : x \longmapsto (-5x-1)^2$ sur $I = \mathbb{R}$;
3. $f : x \longmapsto [\ln(x)]^2$ sur $I =]0\,;+\infty[$;
4. $f : x \longmapsto 2x - 1 + \frac{3}{x-1}$ sur $I =]1\,;+\infty[$;
5. $f : x \longmapsto \frac{1}{(3x-2)^2}$ sur $I = \left]\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$.

11.4 Travaux dirigés

EXERCICE 11.12 (Coût de production d'une farine)**.**
Le coût total de production d'une farine alimentaire est donné par la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f ci-dessous. Les droites T_1 et T_2 sont les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ en A et en M.
Ce coût est modélisé par $f : x \longmapsto x^3 - 6x^2 + 24x + 100$, exprimé en euros, en fonction de la quantité produite x, de 0 à 10 tonnes.



1. On désire faire quelques lectures graphiques, que l'on vérifiera par le calcul sur le modèle ensuite.
   (a) Lire le coût fixe.
   (b) Lire le coût de production de 9 tonnes et en déduire le coût moyen par tonne.
   Lire le coefficient directeur de la droite (OM). Que constate-t-on ?
   (c) Lire le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en M.
   (d) Pour 5 tonnes de farine, lire le coût de production ? En déduire le coût moyen par tonne.
   Lire le coefficient directeur de la droite (OA).
   Justifier graphiquement que le coût moyen ne peut pas être inférieur à 40 euros par tonne.
   Que dire de la tangente en A ?
2. (a) Calculer $f(0)$ et interpéter.
   (b) Calculer $\frac{f(x)}{x}$ pour $x = 9$. Interpréter ce résultat.
   (c) Calculer $f'(x)$ où f' est la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(9)$.
   On rappelle que le coût marginal est assimilé à la dérivée du coût total.
   En déduire le coût marginal de production lorsqu'on a produit 9 tonnes de farine.
   (d) Vérifier que, lorsque $x = 5$, alors $\frac{f(x)}{x} = f'(x)$.
   Compléter les phrases suivantes :
   - Le coût moyen est égal au coût marginal pour une quantité de .... ;
   - La tangente à la courbe de coût total passe alors par ....

EXERCICE 11.13 (Coût de production d'une lessive).
Une usine fabrique de la lessive. Le coût de production en euros de x litres de lessive est donné par $C : x \longmapsto 0{,}5x^2 + 600x + 30\,000$.
La fonction C a été tabulée dans la colonne **B** de la feuille de calcul donnée ci-dessous.

1. Quelle formule doit-on saisir en **B2** et recopier vers le bas pour calculer le coût total ?
   En **C2**, on a saisi puis recopié vers le bas la formule $\boxed{\textbf{=B3-B2}}$. À quoi correspond cette différence ?
2. On envisage une production de 100 hectolitres. Combien coûterait le 101ᵉ hectolitre ?
3. Calculer le nombre dérivé de la fonction C en $x = 100$, c'est-à-dire $C'(100)$.
4. Pour tracer la tangente à la courbe représentative de la fonction C au point d'abscisse 100, on a saisi en **D1** et recopié vers le bas la formule $\boxed{\textbf{=700*(A2-100)+95000}}$.
   (a) Expliquer cette formule.
   (b) Comparer $C'(100)$ avec le coût supplémentaire pour fabriquer un 101ᵉ hectolitre de lessive, appelé coût marginal au rang 100.

	A	B	C	D
1	Quantité x (en hL)	Coût total $C(x)$ (en €)	Coût d'1 hL supplémentaire	Tangente à l'abscisse 100
2	0	30 000,0	600,5	25 000
3	1	30 600,5	601,5	25 700
4	2	31 202,0	602,5	26 400
5	3	31 804,5	603,5	27 100
101	99	94 300,5	699,5	94 300
102	100	95 000,0	700,5	95 000
103	101	95 700,5	701,5	95 700
104	102	96 402,0	702,5	96 400