

Chapitre 7

Évolutions moyennes

Sommaire

7.1 Évolution globale (rappel)	87
7.2 Évolution moyenne	88
7.2.1 Exposant $\frac{1}{n}$	88
7.2.2 Évolution moyenne de n évolutions	88
7.3 Évolutions réciproques	89
7.4 Exercices	89
7.5 Travaux dirigés	93

7.1 Évolution globale (rappel)

Propriété 7.1. Soit y_0, y_1, \dots, y_n des nombres strictement positifs qui sont des valeurs d'une même grandeur.

Soit t_1, t_2, \dots, t_n les n taux d'évolution respectifs de y_0 à y_1 , de y_1 à y_2 , ..., de y_{n-1} à y_n .

Soit c_1, c_2, \dots, c_n les n coefficients multiplicateurs respectifs de y_0 à y_1 , de y_1 à y_2 , ..., de y_{n-1} à y_n .

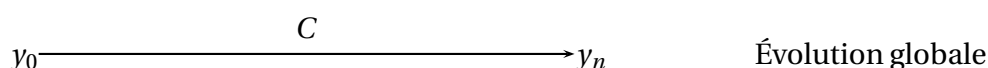
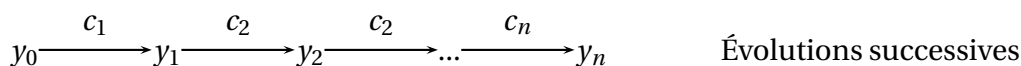
- Le coefficient multiplicateur global C de y_0 à y_n est le produit des coefficients multiplicateurs c_1 de y_0 à y_1 , c_2 de y_1 à y_2 , ..., c_n de y_{n-1} à y_n :

$$C = c_1 \times c_2 \times \dots \times c_n = (1 + t_1)(1 + t_2) \dots (1 + t_n)$$

- Le taux d'évolution global T de y_0 à y_n est donc :

$$T = C - 1 = (1 + t_1)(1 + t_2) \dots (1 + t_n) - 1$$

On a le schéma suivant :



7.2 Évolution moyenne

7.2.1 Exposant $\frac{1}{n}$

Propriété 7.2. Soit a un réel strictement positif et n un entier naturel non nul n .
L'équation $x^n = a$ possède une unique solution positive. Cette solution est le nombre noté $a^{\frac{1}{n}}$ et est appelé racine n -ième de a .

EXERCICE 7.1. 1. Trouver la valeur exacte du réel positif x tel que $x^8 = 2$ puis en donner la valeur arrondie au millième.

2. Luc place un capital de 1^{er} janvier 2000 à un taux annuel de t . Au bout de 11 ans, son capital a été multiplié par 1,5. Calculer le taux t (arrondir à 0,001 près).

7.2.2 Évolution moyenne de n évolutions

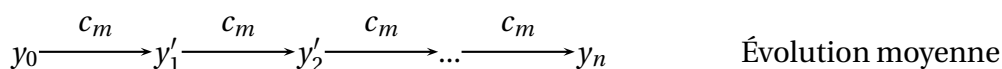
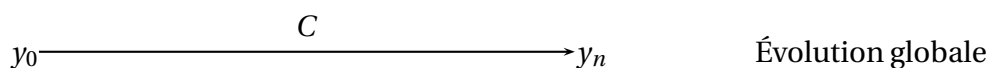
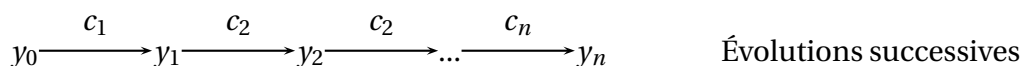
Définition 7.1. Le taux d'évolution moyen de y_0 à y_n est le taux unique, noté t_m tel que n évolutions successives au taux t_m fournit le même résultat que les n évolutions successives. Le coefficient multiplicateur moyen associé est noté c_m .

Propriété 7.3. Le coefficient multiplicateur moyen c_m est égal à la racine n -ième du coefficient multiplicateur global C de y_0 à y_n :

$$c_m^n = C \Leftrightarrow c_m = C^{\frac{1}{n}} = (1 + T)^{\frac{1}{n}}$$

Le taux d'évolution moyen t_m est donc $t_m = c_m - 1 = (1 + T)^{\frac{1}{n}} - 1$.

On a le schéma suivant :



EXERCICE 7.2.

Le prix de l'essence augmente de 5 % en janvier, de 2 % en février et de 8 % en mars.

1. Calculer le coefficient multiplicateur global C correspondant à ces trois augmentations.
2. En déduire le coefficient multiplicateur moyen et le taux moyen t_m d'augmentation mensuel sur cette période de trois mois (arrondir à 0,001 près).

7.3 Évolutions réciproques

Définition 7.2. Soit t et t' deux taux d'évolution appliqués successivement à une quantité Q . t et t' sont dites évolutions réciproques si elles s'annulent, c'est-à-dire si après les deux évolutions successives la quantité Q retrouve sa valeur initiale.

On a le schéma suivant, lorsque les évolutions sont réciproques :

$$Q \xrightarrow{t} Q' \xrightarrow{t'} Q$$

Propriété 7.4. Soit t et t' deux taux d'évolution et c et c' leurs coefficients multiplicateurs respectifs. Si t et t' sont des taux d'évolution réciproques alors $c \times c' = 1 \Leftrightarrow c' = \frac{1}{c}$.

7.4 Exercices

EXERCICE 7.3.

Pour chaque question, préciser si les pourcentages correspondent à une proportion ou à un taux d'évolution.

1. Cette année, 84 % des élèves de terminale ont eu le bac et 68 % sont issus des filières technologiques.
2. Notre ville a reçu 8 % de touristes supplémentaires par rapport à l'année précédente dont 32 % de touristes étrangers.
3. Cette année le nombre de filles de BICO a augmenté de 7 % et le nombre de garçons a diminué de 6 %.

EXERCICE 7.4.

Compléter le tableau ci-dessous :

y_1	y_2	Évolution de y_1 à y_2	Variation de y_1 à y_2	
			Absolue	Relative
10	15			
0,8	0,2			
150			12	
	196		-4	
			55	+25 %
18				+6 %

EXERCICE 7.5.

En septembre, on a relevé les baisses ou augmentations suivantes dans une grande surface.

1. Du jambon vendu 13,75 € le kilogramme, au lieu de 15,95 € le kilogramme.
 - (a) Calculer la variation absolue du prix au kilogramme de jambon.
 - (b) Calculer, sous la forme d'un nombre décimal arrondi à 10^{-4} , la variation relative du prix au kilogramme de jambon.
 - (c) Compléter la phrase suivante : Le prix au kilogramme de jambon a diminué de %
2. Des tomates vendues 1,99 € le kilogramme au lieu de 1,69 € le kilogramme.
 - (a) Calculer la variation absolue du prix au kilogramme de tomates.

- (b) Calculer, sous la forme d'un nombre décimal arrondi à 10^{-4} , la variation relative du prix du kilogramme de tomates.
- (c) Compléter la phrase suivante : Le prix du kilogramme de tomates a augmenté de %

EXERCICE 7.6.

Compléter les pointillés suivants par des nombres décimaux ou les mots « hausse » ou « baisse ».

1. Une grandeur est multipliée par 1,163, cette grandeur subit une de %
2. Une grandeur est multipliée par, cette grandeur subit une baisse de 68 %
3. Une grandeur est multipliée par 0,95, cette grandeur subit une ... de %
4. Une grandeur est multipliée par 4,12, cette grandeur subit une ... de %
5. Une grandeur est multipliée par, cette grandeur subit une hausse de 8 %
6. Une grandeur est multipliée par 0,05, cette grandeur subit une ... de %

EXERCICE 7.7.

Compléter le tableau suivant :

Ancien prix (en €)	156	316	542	
Nouveau prix (en €)		268,60		869,40
Coefficient multiplicateur			1,2	
Évolution (en %)	+15 %			-8 %

EXERCICE 7.8.

La taxe sur la valeur ajoutée (TVA) est toujours exprimée en pourcentage du prix hors taxe (HT) et la somme des deux est le prix toutes taxes comprises (TTC).

1. Le prix de vente HT d'un article est de 80 €. Le taux de TVA est de 20,6 %.
 - (a) Calculer le prix TTC de l'article.
 - (b) En déduire le montant de la TVA.
2. Le prix de vente TTC d'un article est de 9,20 €. Le taux de TVA est de 5,5 %.
 - (a) Calculer le prix HT de l'article.
 - (b) En déduire le montant de la TVA.

EXERCICE 7.9.

Dans une grande surface, on a relevé en octobre les promotions suivantes.

1. Huit pots de yaourts pour 2,10 € dont un pot gratuit.
 - (a) Déterminer le pourcentage de la remise.
 - (b) Sans cette remise combien aurait coûté le pack de huit yaourts ?
2. Huit pots d'un dessert allégé pour 3,12 € après une réduction de 20 %.
 - (a) Déterminer le prix des huit desserts allégés avant la réduction.
 - (b) Calculer la variation absolue du prix des huit desserts.

EXERCICE 7.10.

Chez un caviste, il y a deux promotions différentes pour les bouteilles de deux marques de champagne vendues à 15 € :

- pour l'achat de deux bouteilles de la marque « Chouette & Mandon », la seconde à moitié prix ;
- trois bouteilles pour le prix de deux pour la marque « Papps ».

Comparer les deux offres.

EXERCICE 7.11.

La cote de popularité d'un homme politique est de 35 % après une baisse de 24 % depuis de son élection. Le nombre de ses partisans est de 123 000. Quel était le nombre de ses partisans au moment de son élection ?

EXERCICE 7.12.

On place un capital $C_0 = 1000 \text{ €}$ sur un plan d'épargne logement, à 2,50 % par an avec « intérêts composés » (les intérêts d'une année s'ajoutent au capital et l'année suivante ils rapportent eux aussi des intérêts). Le capital est donc augmenté de 2,50 % chaque année. On note C_n le capital obtenu (ou la valeur acquise) au bout de n années. Calculer C_1 , C_2 et C_3 .

EXERCICE 7.13.

Pour fêter l'ouverture de son garage, un concessionnaire automobile fait une réduction de 10 % sur un modèle de voiture dont le prix initial est de 12 000 euro. Après discussion, un client obtient une remise supplémentaire de 5 %.

1. Calculer le prix final de la voiture.
2. Calculer le taux d'évolution du prix initial de la voiture payée par le client. La réduction totale est-elle de 15 % ?

EXERCICE 7.14.

Lors d'une journée, le cours d'une action a augmenté de 5 %, puis baissé de 4,5 %. Calculer le taux d'évolution de cette action, lors de cette journée, du cours initial au cours terminal. Le cours a-t-il augmenté ou baissé lors de cette journée ?

EXERCICE 7.15.

Calculer t (en %) dans chacun des cas suivants :

1. Après une hausse de 15 % puis une hausse au taux t , on obtient une hausse de 30 %.
2. Après une hausse de 10 % puis une baisse au taux de t , on obtient une baisse de 5 %.
3. Après une baisse de 10 % puis une hausse au taux t , on obtient une hausse de 20 %.

EXERCICE 7.16.

Un particulier achète une maison en janvier 2013. À la fin de l'année 2013, sa valeur a augmenté de 4 % et à la fin de l'année 2014, elle a diminué de 2 % par rapport à celle de l'année précédente.

1. Déterminer le taux d'évolution du prix de la maison de janvier 2013 à janvier 2015.
2. Déterminer le prix de la maison payé par le particulier en janvier 2013 sachant que la valeur de la revente de la maison fin 2014 est de 101 920 €.

EXERCICE 7.17. 1. Donner le taux global de hausse correspondant à 2 hausses successives au taux de 5 %.

2. On applique au prix d'un article 10 hausses successives au taux de 5 %. À quel taux global de hausse cela correspond-il ?

EXERCICE 7.18.

Le tableau suivant donne, pour chaque année, le pourcentage d'augmentation du nombre de sociétaires d'une mutuelle pour les travailleurs indépendants par rapport au nombre de sociétaires de l'année précédente :

Année	2011	2012	2013	2014
Augmentation	+8 %	+6 %	+6 %	+6 %

Il y avait 506 000 sociétaires dans cette mutuelle en 2010. Calculer le nombre de sociétaires en 2014.

EXERCICE 7.19.

Compléter le tableau suivant :

Taux d'évolution (en %)	Coefficient multiplicateur	Coefficient multiplicateur réciproque	Taux d'évolution réciproque (arrondi à 0,1 %)
+5 %			
	1,2		
-20 %			
	0,72		

EXERCICE 7.20.

Le prix d'un bien immobilier a augmenté de 47 % entre 2000 et 2015. Calculer le taux d'évolution, arrondi à 0,01 % près, à appliquer pour que le bien immobilier revienne à la valeur de 2000.

EXERCICE 7.21.

Une matière première coûtait 156 € la tonne la semaine dernière.

1. Calculer le prix P_1 au kilogramme de cette matière première après une hausse de 7 %.
2. Déterminer le taux d'évolution de la baisse qu'il faudrait appliquer au prix au kilogramme de cette matière première pour qu'il revienne à 156 €. Arrondir à 0,01 %.

7.5 Travaux dirigés

EXERCICE 7.22.

On souhaite comparer, sur une année, les prix de plats cuisinés chez un même traiteur.

Plat	Prix (en €) l'année		Variation absolue	Taux d'évolution
	1	2		
A	10	9,50		
B	7,50	9		
C	13,50	12		
D	7	11,50		
E	3	5,50		

- Avec le menu **STAT** de la calculatrice, entrer les prix de l'année 1 dans la liste 1 et ceux de l'année 2 dans la liste 2.
- Pour obtenir la variation absolue des prix de chacun des plats cuisinés entre l'année 1 et l'année 2, placer le curseur sur le nom de la liste 3 et entrer la séquence de touches :
 - Avec Casio : **OPTN** **LIST** List **2** **-** List **1** **EXE**
 - Avec TI : **2nde** **2** **-** **2nde** **1** **Entrer**
- Proposer une séquence de touches pour obtenir dans la liste 4, le taux d'évolution des prix de chacun des plats cuisinés entre l'année 1 et l'année 2.

EXERCICE 7.23.

Le tableau suivant présente le nombre de personnes pacsées en France de 2007 à 2012 :

	A	B	C	D	E	F	G
1		Homme-Homme	Femme-Femme	Homme-Femme	Déclarations totales	Taux d'évolution d'une année à l'autre	Taux d'évolution depuis 2007
2	2007	3 700	2 510	95 782	101 992		
3	2008	4 774	3 420	137 744	145 938		
4	2009	4 894	3 542	166 148	174 584		
5	2010	5 208	3 937	196 416	205 561		
6	2011	4 156	3 338	144 682	152 176		
7	2012	3 750	3 223	153 759	160 732		
8	2013						

- Quelle formule a-t-on saisie en **E2** et recopiée vers le bas jusqu'en **E7** pour calculer le nombre annuel de personnes pacsées ?
- Quelle formule doit-on saisir en **F3** et recopier vers le bas jusqu'en **F7** pour calculer les taux d'évolution du nombre de personnes pacsées d'une année à l'autre ? (les cellules sont au format pourcentage).
- Quelle formule doit-on saisir en **G3** et recopier vers le bas jusqu'en **G7** pour calculer les taux d'évolution du nombre de personnes pacsées par rapport à l'année 2007 ?
- Le nombre de personnes pacsées en 2013 était de 168 223. Quelles sont les valeurs des cellules **F8** et **G8** du tableau ?

EXERCICE 7.24.

Les volumes des ventes (en milliers de boîtes) d'un plat cuisiné surgelé mis sur le marché en 2010 sont donnés dans l'extrait de feuille de calcul d'un tableur ci-dessous.

	A	B	C	D	E	F
1	Année	2010	2011	2012	2013	2014
2	Volumes des ventes (en milliers)	11,8	13,8	16,7	18,5	21,3
3	Taux d'évolution annuel (en%)		16,9%		10,8%	

1. Calculer le pourcentage d'évolution entre 2011 et 2012. On arrondira le résultat à l'unité.
2. Donner une formule qui, entrée dans la cellule **C4**, permet, par recopie vers la droite, d'obtenir les taux d'évolution dans la plage **C4:F4** (la ligne 4 est au format pourcentage).

EXERCICE 7.25.

On donne l'algorithme suivant :

Entree : Saisir n

Instructions :

Pour i variant de 1 a n

Saisir t

C prend la valeur $C*(1+t)$

Fin Pour

T prend la valeur $C-1$

Sortie : Afficher T

1. Que représentent les variables i , n , C , t et T de l'algorithme?
2. Quel est le rôle de cet algorithme?
3. Programmer cet algorithme sur la calculatrice et le faire fonctionner pour déterminer le taux global des évolutions successives suivantes :

- hausse de 4 %, hausse de 8,1 % et hausse 5,6 %
- baisse de 5,2 %, hausse de 3,1 %, hausse de 5,6 % et baisse de 2,1 %

EXERCICE 7.26.

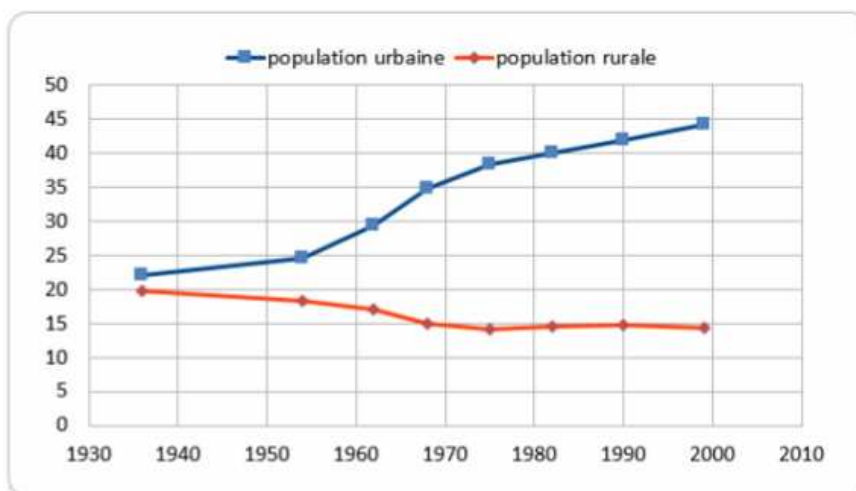
On désire comparer l'évolution des populations urbaines et rurales en France métropolitaine durant le XX^e siècle. Le tableau ci-dessous correspond à ces populations exprimées en milliers d'habitants :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Année	1936	1954	1962	1968	1975	1982	1990	1999
2	Population urbaine	22,1	24,5	29,4	34,8	38,4	39,9	41,9	44,2
3	Population rurale	19,7	18,2	17,1	14,9	14,2	14,5	14,7	14,3
4	Population totale								
5	Part de la population urbaine								
6	Evolution de la population urbaine								
7	Evolution de la population rurale								

Recopier le tableau sur tableur. Celui-ci sera à compléter au fur et à mesure des questions suivantes en respectant le nombre de décimales.

1. Quelle formule peut-on entrer en **B4**, puis recopier vers les droite pour obtenir la population totale?
2. Les lignes **5**, **6** et **7** sont au format pourcentage avec une décimale.

- (a) On a entré en **B5** la formule $=B\$2/B\4 qui affiche le résultat 52,9 %.
Donner par une phrase en français la signification de ce résultat.
Cette formule correspond à quel indicateur en mathématiques ?
- (b) Recopier vers la droite la formule entrée en **B5**.
Quelle formule contient la cellule **I5** et quel résultat affiche la cellule **I5** ?
3. (a) On a grisé la cellule **B6**. Pourquoi ?
- (b) On a entré en cellule **C6** la formule $=(C2-B2)/B2$. Que calcule cette formule ? Compléter le tableau.
4. (a) Quelles sont les périodes sur lesquelles la population rurale a augmenté ?
- (b) Insérer le graphique :



- (c) Sur les périodes où la population rurale a augmenté, la part de la population rurale a-t-elle augmenté ?