Chapitre 6

Suites

Sommaire

6.1 Deux activités d'introduction

ACTIVITÉ 6.1.

On donne ci-dessous le tableau d'effectifs, en million, de la population africaine depuis 1950.

Année	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Population	227,3	285	366,8	482,2	638,7	819,5	1011,2

1. Représenter cette évolution dans un repère.
2. Calculer les coefficients multiplicateurs permettant de passer de la population d'une décennie à celle de la suivante à partir de l'année 1950.
3. Un statisticien propose de modéliser la population africaine de la manière suivante : « À partir de 1950, tous les dix ans, la population africaine est multipliée par 1,28 ».
   (a) Comment justifier sa démarche ?
   (b) Représenter ce modèle sur le même graphique.
   Comparer le résultat obtenu par ce modèle en 2010 aux données réelles.
   (c) Que fait l'algorithme de la table 6.1 page ci-contre ?
   (d) Le programmer sur sa calculatrice.
   (e) Le modifier afin qu'il n'affiche que le dernier terme calculé.
   (f) À l'aide de l'algorithme précédent, en tatonnant, estimer au cours de quelle décennie la population africaine dépassera 3 milliards.
4. On cherche dans la suite de cette activité, toujours en utilisant le modèle du statisticien de la question précédente, à élaborer un algorithme qui éviterait d'avoir à tatonner pour obtenir la décennie à partir de laquelle la population africaine dépasserait les 3 milliards ou une quelconque autre valeur.
   (a) Compléter l'algorithme de la table 6.2, page suivante, qui, pour un seuil quelconque (par exemple 3 milliards), indique le nombre de décennies au bout duquel la population africaine dépasse ce seuil.
   (b) Programmer cet algorithme sur sa calculatrice.
   (c) À l'aide de cet algorithme, compléter le tableau de la table ci-dessous :

Seuil (en milliards)	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
Nombre de décennies								

   (d) Compléter les phrases suivantes :
   - « On peut conjecturer que, selon le modèle du statisticien, on peut rendre la population africaine aussi .... que l'on veut : il suffit de prendre n suffisamment .... »
   - On dira que la suite tend vers ....

TABLE 6.1: Premier algorithme de l'actitivé 6.1

```
ENTREE
   n
INITIALISATION
   u PREND LA VALEUR 227.3
TRAITEMENT
   POUR k ALLANT DE 1 A n FAIRE
     u PREND LA VALEUR u*1.28
     AFFICHER k
     AFFICHER u
   FIN POUR
```

TABLE 6.2: Second algorithme de l'activité 6.1

```
ENTREE
   seuil
INITIALISATION
   n PREND LA VALEUR 0
   u PREND LA VALEUR 227.3
TRAITEMENT
   Tant que u ......................
    n PREND LA VALEUR n+1
    u PREND LA VALEUR ..............
   Fin Tant que
SORTIE
   AFFICHER .........
```

ACTIVITÉ 6.2.
Le Roi demande à l'inventeur du jeu d'échecs de choisir lui-même sa récompense.
Celui-ci répond (en ce temps là, on tutoyait les rois) :
« Place deux grains de blé sur la première case de l'échiquier, quatre grains sur la deuxième, huit sur la troisième, seize sur la quatrième et ainsi de suite. Je prendrai tous les grains qui se trouvent sur l'échiquier ».
Le Roi sourit de la modestie de cette demande.
En réalité, cette demande était-elle vraiment modeste ?

1. On numérote les soixante-quatre cases de l'échiquier de 1 à 64 et, pour chaque entier n ($1 \leqslant n \leqslant 64$), on note u_n le nombre de grains de blé que le Roi doit déposer dans la n-ième case.
   (a) Calculer u_1, u_2, ..., u_{10}.
   (b) Comment passe-t-on d'un terme au suivant ?
   (c) Exprimer u_n en fonction de n et calculer u_{64}.
2. On donne l'algorithme ci-contre.
   (a) Que fait cet algorithme ?
   (b) Entrer cet algorithme dans votre calculatrice.
   (c) Utiliser cet algorithme pour obtenir S, le nombre total de grains sur l'échiquier.

```
ENTREES
   n
INITIALISATION
   u PREND LA VALEUR 1
   s PREND LA VALEUR 0
TRAITEMENT
   POUR k ALLANT DE 1 A n
     u PREND LA VALEUR u*2
     s PREND LA VALEUR s+u
   FIN POUR
SORTIES
   AFFICHER s
```

6.2 Généralités sur les suites

6.2.1 Définition et notations

Définition 6.1. Une suite numérique u est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une fonction qui à tout entier naturel n associe un réel, noté $u(n)$ ou, plus généralement, u_n.
Ainsi $u : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n \end{array} \right.$

Exemples.

1. La suite des carrés des nombres entiers est $0\,;\,1\,;\,4\,;\,9\,;\,16$; etc. On peut écrire ces termes sous la forme $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 4$; $u_3 = 9$; etc. On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) de terme général $u_n = n^2$.
2. La suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ n'est définie que pour $n \geqslant 1$, on la note $(u_n)_{n \geqslant 1}$.

Remarques (Vocabulaire, notations).

- n est l'indice (ou le rang) et u_n est le terme de rang n.
- *Attention :* (u_n) désigne la suite alors que u_n désigne le terme de rang n.

6.2.2 Modes de génération d'une suite

Relevés chronologiques

Dans la « vie courante », les principales suites rencontrées sont obtenues par des relevés, en général chronologiques, en économie, ou des mesures en physique.
En mathématiques, nous nous intéresserons essentiellement aux suites définies mathématiquement (par des formules) dont l'objet sera la modélisation des suites précédentes et à l'étude de leurs propriétés mathématiques.

Définition par une formule explicite

Une suite *explicite* est une suite dont le terme général s'exprime en fonction de n. Elle est du type $u_n = f(n)$ où f est une fonction. On a donc la définition suivante :

Définition 6.2. Soit f une fonction définie au moins sur $\mathbb{R}^+$. On peut alors définir une suite (u_n) de la façon suivante :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.

Remarques.

- On peut donc calculer directement n'importe quel terme de la suite à partir de l'indice n. C'est le côté agréable des suites explicites.
- Si f n'est définie que sur $[k;+\infty[$, avec $k > 0$, la suite n'est alors définie que pour $n \geqslant k$.

Exemples.

1. La suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 2n - 1$. On a $u_n = f(n)$ avec $f : x \mapsto 2x - 1$. Par exemple $u_4 = 2 \times 4 - 1 = 7$.
2. Les suites de l'exemple précédent sont toutes des suites explicites. La dernière n'est définie que pour $n \geqslant 1$.

Définition par récurrence

Une suite *récurrente* est définie par la donnée des premiers termes et la relation liant les termes de la suite (en général consécutifs). Plus généralement, on peut définir une suite récurrente de la façon suivante :

Définition 6.3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$. On peut alors définir une suite (u_n) par la donnée de $u_0 \in I$ et de la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Exemple. $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$ donne $u_0 = 4$; $u_1 = 2u_0 - 5 = 3$; $u_2 = 2u_1 - 5 = 1$; etc.

Remarques.

- Contrairement aux suites explicites, on ne peut pas, *a priori*, calculer un terme quelconque de la suite, sans avoir obtenu, avant, tous les termes le précédant.

  De nombreux exercices seront consacrés à obtenir, malgré tout, des moyens de calculer directement un terme donné, c'est-à-dire à transformer, lorsque c'est possible, la suite récurrente en une suite explicite.

- Toutes les fonctions f ne conviennent pas. Par exemple si $u_0 = 3$ et $f(x) = \sqrt{x-2}$, c'est-à-dire $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 2}$, on a $u_1 = \sqrt{u_0 - 2} = \sqrt{1} = 1$. Par contre on ne peut pas calculer u_2, donc la suite n'est pas définie pour $n > 1$.

6.2.3 Représentation graphique d'une suite

Définition 6.4. Dans un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la représentation graphique d'une suite (u_n) est l'ensemble des points M_n de coordonnées $(n; u_n)$.

Remarque. Contrairement à une fonction, la représentation graphique d'une suite n'est pas une courbe mais un nuage de points car la suite n'est définie que pour $n \in \mathbb{N}$. $u_{1,5}$ n'a, mathématiquement, pas de sens et donc le point $(1,5; u_{1,5})$ non plus.

6.2.4 Monotonie d'une suite

Une suite est une fonction particulière, on retrouve donc naturellement la notion de sens de variation pour une suite.

Définition 6.5. Soit (u_n) une suite. On dit que :

- la suite (u_n) est *croissante* si, pour tout entier n : $u_{n+1} \geqslant u_n$;
- la suite (u_n) est *décroissante* si, pour tout entier n : $u_{n+1} \leqslant u_n$;
- la suite (u_n) est *constante* ou *stationnaire* si, pour tout entier n, $u_n = u_{n+1}$.

Définition 6.6. Soit (u_n) une suite. On dit que (u_n) est *monotone* si son sens de variation ne change pas (elle reste croissante ou décroissante)

Remarque. On obtient les définitions de *strictement* croissante, décroissante ou monotone en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

Étudier la monotonie d'une suite c'est donc étudier ses variations.

6.3 Un type de suite particulier : Suites arithmétiques

6.3.1 Définition et formule de récurrence

Définition 6.7 (par récurrence)**.** On appelle *suite arithmétique* toute suite (u_n) telle que

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = u_n + r \text{ où } r \in \mathbb{R}$$

r est appelé *la raison* de la suite arithmétique.

Remarques.

- La suite arithmétique est ici définie par récurrence ; on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre, la raison r. On peut ainsi représenter une suite arithmétique par le schéma :
$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} \dots \xrightarrow{+r} u_{n-1} \xrightarrow{+r} u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1} \xrightarrow{+r} \dots$$
- Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, il suffit de montrer que, pour tout n, la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante. Cette constante sera alors la raison de la suite.

EXERCICE 6.1.
1. La suite formée par les nombres entiers naturels pairs est-elle une suite arithmétique ? Et celle formée par les nombres entiers naturels impairs ?
2. La suite définie par : pour tout n, $u_n = 3n - 2$ est-elle arithmétique ?
3. La suite définie par : pour tout n, $u_n = n^2$ est-elle arithmétique ?

6.3.2 Formule explicite

Propriété 6.1. *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.*

- *Lorsque u_0 est le premier terme : $u_n = u_0 + nr$*
- *Lorsque u_1 est le premier terme : $u_n = u_1 + (n-1)r$*
- *Plus généralement, pour tous entiers naturels n et p : $u_n = u_p + (n-p)r$*

EXERCICE 6.2.
Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $r = 2$.

1. Calculer u_1 et u_2. Écrire une relation entre u_{n+1} et u_n.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Déterminer le treizième terme et le terme u_{24} de la suite.

6.3.3 Représentation graphique

Propriété 6.2. *Soit une suite (u_n) et sa représentation graphique dans un repère, c'est-à-dire l'ensemble des points de coordonnées $(n\,;\,u_n)$. Alors :*

$$\text{La suite } (u_n) \text{ est arithmétique} \Leftrightarrow \text{les points } (n\,;\,u_n) \text{ sont alignés.}$$

Le coefficient directeur de la droite est alors égal à la raison r de la suite.

Remarque. La *variation absolue* entre deux termes consécutifs est constante et égale à la raison r. On dit que l'évolution est *linéaire*.

6.3.4 Variations d'une suite arithmétique

Propriété 6.3. *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors :*

- *si $r > 0$, alors (u_n) est strictement croissante;*
- *si $r < 0$, (u_n) est strictement décroissante;*
- *si $r = 0$, (u_n) est constante (ou stationnaire).*

EXERCICE 6.3.
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = -3n + 5$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de n.
2. Calculer $u_{n+1} - u_n$. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?
3. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

6.3.5 Somme des termes consécutifs

Propriété 6.4. *Soit (u_n) une suite artihmétique.*

- *Lorsque u_0 est le premier terme, la somme des $(n+1)$ premiers termes consécutifs de la suite (u_n) est :*
$$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$
- *Lorsque u_1 est le premier terme, la somme des n premiers termes consécutifs de la suite (u_n) est :*
$$S = u_1 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$
- *Plus généralement la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est, pour tous entiers naturels n et p avec $p \leqslant n$:*

$$\begin{aligned} S &= u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = \frac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2} \\ &= \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2} \end{aligned}$$

EXERCICE 6.4.
Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 0{,}8$.

1. Exprimer u_n en fonction de n et calculer u_{10}.
2. En déduire la somme $S_{10} = u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.

6.4 Un type de suite particulier : Suites géométriques

6.4.1 Définition et formule de récurrence

Définition 6.8 (par récurrence)**.** On appelle *suite géométrique* toute suite (v_n) telle que

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = q \times v_n \text{ où } q \in \mathbb{R}$$

q est appelé *la raison* de la suite géométrique.

Remarques.

1. La suite géométrique est ici définie par récurrence ; on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre, la raison q. On peut ainsi représenter une suite géométrique par le schéma :

$$v_0 \xrightarrow{\times q} v_1 \xrightarrow{\times q} v_2 \xrightarrow{\times q} \dots \xrightarrow{\times q} v_{n-1} \xrightarrow{\times q} v_n \xrightarrow{\times q} v_{n+1} \xrightarrow{\times q} \dots$$

2. Si $q = 0$, tous les termes de la suite, hormis peut-être v_0 sont nuls.

   Si $v_0 = 0$, tous les termes de la suite sont nuls.

   En dehors de ces deux cas triviaux, inintéressants, tous les termes de la suite sont différents de zéro.

   On considèrera par la suite que $q \neq 0$ et $v_0 \neq 0$.

3. Pour démontrer qu'une suite est géométrique (en dehors des deux cas triviaux), il suffit de montrer que, pour tout n, le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ est constant. Cette constante sera alors la raison de la suite.

EXERCICE 6.5.

1. La suite définie par : pour tout n, $v_n = n^2$ est-elle géométrique ?
2. La suite définie par : $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = 2 \times v_n$ est-elle géométrique ?
3. La suite définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 100 \times 1{,}01^n$ est-elle géométrique ?

6.4.2 Formule explicite

Propriété 6.5. *Soit (v_n) une suite géométrique de raison q.*

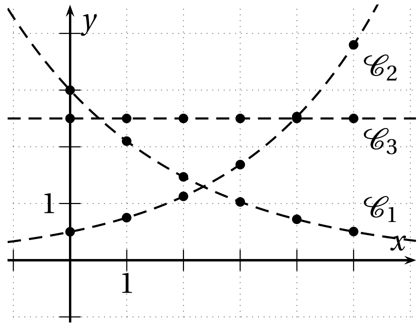
- *Lorsque v_0 est le premier terme :* $v_n = v_0 \times q^n$
- *Lorsque v_1 est le premier terme :* $v_n = v_1 \times q^{n-1}$
- *Plus généralement, pour tous entiers naturels n et p :* $v_n = v_p \times q^{n-p}$

EXERCICE 6.6.
Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 0{,}3$ et de raison $q = 2$.

1. Calculer v_1 et v_2.
2. Écrire une relation entre v_{n+1} et v_n.
3. Déterminer le septième terme de la suite et le terme v_{12}.

6.4.3 Représentation graphique

Propriété 6.6. *Soit une suite (v_n) et sa représentation graphique dans un repère, c'est-à-dire l'ensemble des points de coordonnées $(n\,;\,v_n)$. Alors : si la suite est géométrique de raison $q \neq 1$, les points $(n\,;\,v_n)$ sont situés sur une courbe dite* exponentielle.



- $\mathscr{C}_1$: $v_0 = 3$, $q = 0{,}7$
- $\mathscr{C}_2$: $v_0 = 0{,}5$, $q = 1{,}5$
- $\mathscr{C}_3$: $v_0 = 2{,}5$, $q = 1$

Remarque. La *variation relative* entre deux termes consécutifs est constante. On dit que l'évolution est *exponentielle.*

6.4.4 Variations d'une suite géométrique

On ne s'intéresse, en première, qu'aux variations de suites géométriques de raison positive.

Propriété 6.7. *Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 strictement positif et de raison $q > 0$. Alors :*

- *si $0 < q < 1$, (v_n) est strictement décroissante ;*
- *si $q = 1$, (v_n) est constante (ou stationnaire) ;*
- *si $q > 1$, (v_n) est strictement croissante.*

Il pourra être utile de retenir aussi la propriété suivante qui permet d'étudier la monotonie de davantage de type de suites :

Propriété 6.8. *Soit $q \in \mathbb{R}$:*
- *Si $0 < q < 1$ alors $q^n > q^{n+1}$;*
- *Si $q > 1$ alors $q^n < q^{n+1}$.*

EXERCICE 6.7.
Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 200$ et, pour tout entier naturel n, par $v_{n+1} = 1{,}1\,v_n$.

1. Préciser la nature de la suite (v_n) et sa raison q.
2. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).
3. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il permette de déterminer le rang n à partir duquel $v_n \geqslant 20$.

```
INITIALISATION
 Affecter \'a n la valeur .........
 Affecter \'a v la valeur .........
INSTRUCTIONS
 Tant que v .........
  Affecter \'a v la valeur .........
  Affecter \'a n la valeur .........
 Fin Tant que
SORTIES
 Afficher n
```

6.4.5 Somme des termes consécutifs

Propriété 6.9. *Soit* (v_n) *une suite géométrique de raison* $q > 0$ *et* $q \neq 1$.

- *Lorsque* v_0 *est le premier terme, la somme des* $(n+1)$ *premiers termes consécutifs de la suite* (v_n) *est :*
$$S = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
- *Lorsque* v_1 *est le premier terme, la somme des* n *premiers termes consécutifs de la suite* (v_n) *est :*
$$S = v_1 + v_2 + \ldots + v_n = v_1 \times \frac{1-q^{n}}{1-q}$$
- *Plus généralement la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique est, pour tous entiers naturels* n *et* p *avec* $p \leqslant n$ *:*
$$\begin{aligned} S &= v_p + v_{p+1} + \ldots + v_n = v_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \\ &= \textit{premier terme de la somme} \times \frac{1-q^{\textit{nombre de termes}}}{1-q} \end{aligned}$$

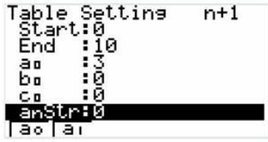
EXERCICE 6.8.
Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_1 = 5$ et de raison $q = 2$.
Calculer la somme $S_8 = v_1 + v_2 + \ldots + v_8$.

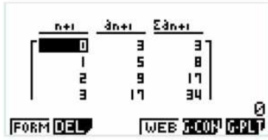
6.5 Utilisation de la calculatrice

Exemple 6.1. Soit la suite (v_n) définie par $v_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par $v_{n+1} = 2v_n - 1$.

1. Calculer les trois termes suivnats le terme initiel de la suite (v_n).
2. Calculer le terme v_{10} en utilisant la calculatrice ou le tableur.
3. Calculer la somme $S = v_0 + v_1 + \ldots + v_{10}$ des 11 premiers termes de la suite.

Calculatrice Casio





- Dans le menu **RECUR** :
- Définir la nature de la suite **type** ($\boxed{\text{F3}}$) : **an** ($\boxed{\text{F1}}$) pour suite explicite ou **an+1** ($\boxed{\text{F2}}$) pour suite de récurrence).

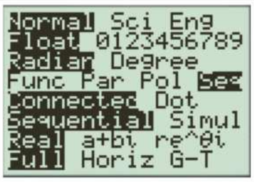
Ecrire l'expression de la suite : **na$_n$** ($\boxed{\text{F3}}$) pour obtenir **an** ($\boxed{\text{F2}}$) et **n** ($\boxed{\text{F1}}$) et **EXE**.

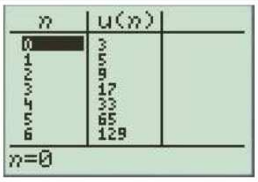
- Choisir **SET** ($\boxed{\text{F5}}$) pour compléter les paramètres de la suite :

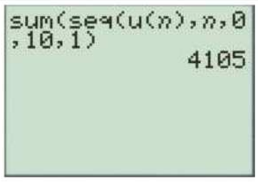
Start pour le rang du terme initial, **End** pour le rang du terme final, **a0** pour le terme initial.

- On obtient les termes de la suite avec **TABL** ($\boxed{\text{F6}}$).
- Pour obtenir la somme des termes de la suite : **SET UP** ($\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{MENU}}$) et choisir **Σ Display** : **On** ($\boxed{\text{F1}}$).

Calculatrice TI







- Dans le menu **mode**, choisir **SUITE** dans la ligne **FONCTION**, puis ***f*(*x*)**.
- Ecrire l'expression de la suite dans la ligne **u(*n*)**. Pour obtenir **n** ($\boxed{\text{X,T,θ,n}}$) et **u** ($\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{7}}$).
- Modifier les paramètres de la suite : ***n*Min** pour le rang du terme initial et **u(*n*Min)** pour le terme initial.
- Définir les paramètres du tableau : **def tabl** ($\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{fenetre}}$) puis **début table** (rang du terme initial) et **Δtbl** (1).

On obtient les termes de la suite avec **TABLE** ($\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{graphe}}$).

- Pour obtenir la somme des termes de la suite, sortir du menu SUITE, **quitter** ($\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{mode}}$), puis **List** ($\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{stats}}$), **MATH**, **5:Somme(** $\boxed{\text{entrer}}$, puis **List** ($\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{stats}}$), **OPS**, **5:Seq(** $\boxed{\text{entrer}}$.

Compléter les paramètres de la somme : Exp : **u(*n*)**, variable : ***n***, début : **rang du terme initial**, fin : **rang du terme final**, pas : **1** et $\boxed{\text{entrer}}$ $\boxed{\text{entrer}}$.

Remarques.

- Pour calculer les termes de la suite, on peut aussi utiliser :
  - la touche **ANS** de la calculatrice en tapant la séquence : 3 **EXE**, puis 2×**ANS** -1 **EXE**, puis **EXE**, etc.
  - un algorithme avec une boucle « Pour »
- Pour calculer la somme des termes, si l'on dispose de la formule explicite (u_n en fonction de n), on peut se dispenser d'utiliser le mode *suite* pour seulement utiliser **sum(seq(...**

6.6 Exercices

EXERCICE 6.9.
On considère la suite (u_n) de nombres :

3 10 17 24 31 38 45 52 59 66

On note u_0 le premier terme, soit $u_0 = 3$.

1. Compléter :
   - $u_{\dots} = 31$
   - $u_7 = \dots$
   - $59 = \dots$
2. Indiquer le 4ᵉ terme de la suite.
3. Si $n = 7$, indiquer le terme u_{n-1}.
4. Quel est l'indice du terme qui précède 45 ?

EXERCICE 6.10.
Un conteneur à ordures contient 23 kg de déchets. Chaque jour, on ajoute 7 kg supplémentaires. On note u_n le nombre de kg de déchets contenus dans le conteneur le jour n.
On pose $u_0 = 23$.

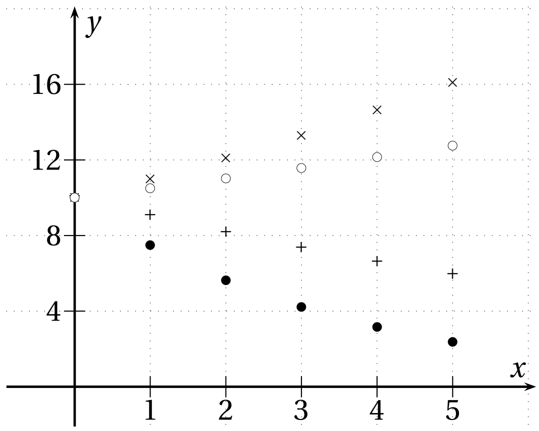
1. Expliquer pourquoi la suite (u_n) est arithmétique et préciser sa raison.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer u_{10} et u_{20}.
4. On doit faire appel à la déchetterie lorsque le conteneur contient plus de 500 kg d'ordures. Déterminer le jour n où l'on doit appeler la déchetterie.

EXERCICE 6.11.
Une commerçante passe une commande de 128 robes auprès de la société PRO-VET en août. On suppose qu'elle continue en augmentant sa commande de 25 % chaque mois qusqu'en mars. Pour tout entier n on note b_n le nombre de robes commandées le $n^{\text{è}}$ mois après août.

1. Déterminer b_1 et interpréter concrètement le résultat.
2. Exprimer b_{n+1} en fonction de b_n. en déduire la nature de la suite (b_n).
3. Exprimer b_n en fonction de n.
4. Déterminer :
   - le nombre de robes commandées en janvier
   - le mois à partir duquel le nombre de robes dépassera 500
5. Déterminer le nombre total de robes commandées par la commerçante jusqu'en mars.

EXERCICE 6.12.
Quatre suites géométriques sont représentées graphiquement ci-contre.
Associer à chaque formule l'une des suites :

u_n	$10 \times 0{,}9^n$	$10 \times 1{,}1^n$	$10 \times 0{,}75^n$	$10 \times 1{,}05^n$
Suite				



EXERCICE 6.13.
Le nombre d'adhérents d'un club sportif augmente de 5 % chaque année. En 1990, il y avait 500 adhérents.
Question : le nombre d'adhérents peut-il doubler et, si oui, en quelle année ?

Indications :
Pour chaque année à partir de 1990 on note u_n le nombre d'adhérents l'année $1990 + n$.

1. Quelle est la valeur de u_0 ? de u_1 ?
2. Préciser la nature de la suite (u_n) puis exprimer u_n en fonction de n.
3. Étudier la monotonie de (u_n).
4. Utiliser la calculatrice pour répondre à la question.

EXERCICE 6.14.
Pour répondre à une nouvelle norme antipollution, un industriel doit diminuer progressivement sa quantité de rejets, qui est 50 000 tonnes par an en 2010. Il s'engage à r'duire chaque ann'e sa quantit' de rejets de 4 %. On note q_n la quantité de rejets pour l'année $2010+n$.

1. Que vaut q_0 ?
2. Exprimer q_{n+1} en fonction de q_n.
3. Quelle est la nature de la suite (q_n) ? En préciser la raison.
4. Exprimer q_n en fonction de n.
5. Calculer, à la tonne près, la quantité de rejets prévus pour l'année 2020.
6. En fait la nouvelle norme antipollution demande d'avoir ramené à une valeur inférieure à 30 000 tonnes en 10 ans au plus. Cette norme est-elle respectée en 2020 ?

EXERCICE 6.15.
L'unité d'intensité du son utilisée dans l'exercice est le décibel noté dB.
Une source sonore émet un son d'intensité 100 dB.
On appelle i_n l'intensité du son mesurée après la traversée de n plaques d'isolation phonique. Ainsi $i_0 = 100$. De plus, chaque plaque absorbe 10 % de l'intensité du son qui lui parvient.

1. Calculer i_1 et i_2.
2. Écrire i_{n+1} en fonction de i_n.
3. Déterminer la nature de la suite (i_n). Préciser la raison.
4. Exprimer i_n en fonction de n.
5. Déterminer le nombre minimum de plaques nécessaires pour que l'intensité sonore ne dépasse pas 20 dB.

EXERCICE 6.16.
On s'intéresse à la production d'un gisement de pétrole.

Partie A. Le gisement a produit 200 000 barils en 1987. On note p_n la production de pétrole, exprimée en barils, de l'année $1987+n$ avec n entier positif. Jusqu'en 1999 inclus, c'est-à-dire pour $n \leqslant 12$, la production a diminué régulièrement de 2 000 barils par an.

1. Calculer p_1 et p_2.
2. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n. En déduire la nature de la suite (p_n).
3. Exprimer p_n en fonction de n.
4. Quelle est la production de ce gisement en 1999 ?

Partie B. À partir de l'an 2000 (année 2000 incluse), on prévoit une reprise avec une augmentation de la production de 1,5 % par an.

1. Vérifier que la production du gisement en l'an 2000 est égale à 178 640 barils.
2. Pour tout entier naturel n, on note q_n la production de l'année $2000+n$ (ce nombre n'est pas forcément entier).
   (a) Exprimer q_{n+1} en fonction de q_n. En déduire la nature de la suite (q_n).
   (b) Exprimer le terme général q_n en fonction de n.
   (c) À partir de quelle année la production annuelle sera-t-elle supérieure à celle de 1987 ?

EXERCICE 6.17.
Un bail est un contrat de location entre un locataire et un propriétaire. Traditionnellement sa durée est de trois ans.
On propose à un locataire deux types de bail :

- Contrat A : Le premier loyer est de 1 000 euros et il augmente chaque mois de 11,5 euros pendant la durée des trois ans.
- Contrat B : Le premier loyer est de 1 000 euros et il augmente chaque mois de 1 % pendant la durée des trois ans.

1. (a) Déterminer, avec éventuellement un algorithme programmé sur votre calculatrice, le loyer du dernier mois avec le contrat A.
   (b) Déterminer, avec éventuellement un algorithme programmé sur votre calculatrice, la somme des loyers que le locataire devrait payer avec le contrat A.
2. Mêmes questions avec le contrat B.
3. Déterminer quel est le contrat le plus avantageux pour le locataire.

EXERCICE 6.18.
Un fournisseur fait une étude sur la fidélité de sa clientèle depuis l'année $n = 0$, où il y a eu 200 clients. Chaque année, sa clientèle est composée de 50% des clients de l'année précédente auxquels s'ajoutent 400 nouveaux clients.
Question : En supposant que cette évolution se poursuive, comment va se comporter le nombre de clients sur le long terme ?

Indications :

1. Soit u_n le nombre de clients l'année n.
   Justifier que $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 400$, puis calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 800$.
   (a) Vérifier que $v_{n+1} = 0{,}5v_n$.
   (b) Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
   (c) En déduire l'expression de v_n, puis celle de u_n, en fonction de n.
   (d) Étudier la monotonie de (u_n). Interpréter le résultat.
   (e) Calculer u_{100}, u_{1000} et u_{10000}.
   Que peut-on alors conjecturer concernant le nombre de clients du fournisseur ?

EXERCICE 6.19.
Une ville comprenait 300 000 habitants au premier janvier 1950. On estime que la ville accueille tous les ans 2% de nouveaux arrivants et a un taux annuel de natalité de 3%. On constate curieusement un nombre fixe de décès et de départ de 800 personnes par an. On veut déterminer à partir de quelle année la population de la ville sera supérieure au double de la population en 1950.
Question : À partir de quelle année la population de la ville sera supérieure au double de la population en 1950 ?

Indications :

1. Quelle était la population estimée de la ville le premier janvier 1951 ?
2. On note p_n la population de la ville à l'année $1950 + n$.
   Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
3. On pose $q_n = p_n - 16000$.
   (a) Montrer que cette suite est une suite géométrique.
   (b) Exprimer q_n puis p_n en fonction de n.
4. Montrer que (p_n) est croissante.
5. En déduire, à l'aide de la calculatrice, la réponse à la question.

6.7 Travaux dirigés

EXERCICE 6.20 (Calcul d'une liste de termes et de la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique)**.**
Le responsable d'une PME possède depuis le 1[er] janvier 2014 une messagerie électronique professionnelle, sur laquelle il conserve tous les messages reçus ou envoyés, en les classant par année.
Il a constaté au 31 décembre 2014 que la taille du dossier contenant les messages de l'année 2014 était de 4 mégaoctets (Mo).
Une étude a montré que la taille du dossier contenant les messages électroniques professionnels augmentait en moyenne de 5 % par an.
On fait l'hypothèse que cette augmentation se maintient au moins jusqu'en 2020.
On note u_n la taille (en Mo) du dossier contenant les messages de l'année $(2014+n)$ selon le modèle décrit précédemment. On a donc $u_0 = 4$.
On utilise une feuille de calcul d'un tableur pour observer l'évolution de la taille de l'ensemble des dossiers de cette PME depuis 2014.

	A	B	C	D
1	Année	n	u_n	Taille totale (en Mo)
2	2014	0	4,00	4,00
3	2015	1		
4	2016	2		

Partie A. Avec le tableur

1. Préparer ce tableau sur Excel, compléter les colonnes **A** et **B**. Ce tableau sera à compléter au fur et à mesure des questions suivantes en respectant le nombre de décimales.
2. Donner une formule qui, saisie en **C3** puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir les valeurs de la colonne **C**.
3. Insérer le graphique représentant l'évolution de la taille des dossiers.
4. Parmi les formules suivantes, indiquer toutes celles qui, saisies dans la cellule **D3**, puis recopiées vers le bas, permettent d'obtenir les valeurs de la colonne **D**.

   (a) **=SOMME(C2 :C3)**
   (b) **=SOMME($C$2 :C3)**
   (c) **=C2+C3**
   (d) **=$C$2+C3**
   (e) **=D2+C3**
   (f) **=$D$2+C3**

5. Selon ce modèle :
   (a) quelle est la taille du dossier de l'année 2020 ?
   (b) quelle est la taille de l'ensemble des dossiers au 31 décembre 2020 ?
   (c) La capacité de stockage de la messagerie est limitée à 30 Mo. Peut-on estimer que le responsable pourra conserver la totalité de ses messages ?

Partie B. Avec les formules du cours

1. (a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   (b) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser sa raison.
   (c) Exprimer u_n en fonction de n.
   Selon ce modèle, calculer la taille du dossier de l'année 2020. Arrondir à 0,01 Mo.
2. Calculer la taille de l'ensemble des dossiers au 31 décembre 2020.

EXERCICE 6.21 (Coût d'un forage)**.**
Un industriel souhaite installer un chauffage géothermique dans un atelier de son entreprise.
Une société spécialisée lui propose une étude.
Un forage initial de 100 mètres doit être réalisé et des échangeurs de chaleur doivent être installés dans l'atelier. Le coût de cette réalisation serait pour l'entreprise de 3 500 €.

1. Pour améliorer le rendement de l'installation, la société qui installe ce chauffage suggère de réaliser un forage plus profond.

   Chaque décamètre supplémentaire est facturé 55 € (1 décamètre se note 1 dam et 1 dam = 10 m).

   La société remet à l'industriel la feuille de calculs ci-dessous qui met en relation la profondeur des forages supplémentaires, le coût de l'installation et les économies annuelles en chauffage par rapport à une installation « classique ».

	A	B	C	D	E
1	Profondeur du forage	Profondeur supplémentaire (en dam)	Coût de l'installation	Économie réalisée (par an)	Années d'amortissement
2	100	0	3 500 €	500 €	7,0
3	110	1			
4	120	2			

   Le coût de l'installation est représenté par une suite (u_n) où n désigne le nombre de décamètres supplémentaires de forage.

   (a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser les éléments caractéristiques de cette suite.

   (b) Quelle formule écrite en **C3** puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir les valeurs qui figurent dans la colonne **C** ?

   (c) Exprimer u_n en fonction de n.

   (d) Justifier la phrase : « le coût de l'installation pour un forage de 160 mètres est représenté par u_6 ».

   (e) Quel est le coût de l'installation pour un forage de 260 mètres de profondeur ?

2. La société donne en colonne **D**, une modélisation de l'économie annuelle en chauffage selon la profondeur du forage que fera l'industriel. Pour une profondeur de 100 mètres l'économie est de 500 € par an et pour tout décamètre supplémentaire elle est augmentée de 5 %. Cette économie est représentée par une suite (v_n) où n désigne le nombre de décamètres supplémentaires.

   (a) Quelle formule écrite en **D3** puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir les valeurs qui figurent dans la colonne D ?

   (b) Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Préciser les éléments caractéristiques de cette suite.

   (c) Exprimer v_n en fonction de n.

   (d) L'industriel a souhaité calculer en combien de temps l'installation sera amortie. Ainsi pour un forage minimal de 100 mètres, il aura amorti son installation en 7 ans (car $\frac{3\,500}{500} = 7$). L'industriel opte pour une profondeur de 260 mètres. Indiquer au bout de combien d'années son installation sera amortie.

3. Insérer un graphique représentant le coût de l'installation et l'économie réalisée par an pour les 16 premiers (puis les 30) premiers décamètres supplémentaires.

EXERCICE 6.22.

Le gérant d'un péage d'autoroute note chaque heure le nombre de véhicules qui franchissent son péage. Il veut prévoir des installations supplémentaires pour répondre à la demande croissante du nombre de véhicules.

Il estime que chaque heure entre 6h et 20h le nombre de véhicules va augmenter de 15 %.

Entre 6h et 7h, 400 véhicules sont passés au péage.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note v_n le nombre de véhicules à franchir le péage la $n^{\text{è}}$ heure après 6h.

Ainsi : $v_1 = 400$.

1. (a) Calculer v_2 et v_3. Interpréter ces résultats.
   (b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et en déduire la nature de la suite (v_n). Préciser sa raison.
   (c) Exprimer alors v_n en fonction de n.
   (d) Calculer le nombre de véhicules que l'on peut ainsi prévoir entre 15h et 16h.
   (e) Si l'évolution se poursuit ainsi combien de véhicules auront franchi le péage entre 6h et 20h ?

2. On veut faire des calculs avec le tableur dans la feuille de calculs ci-dessous.

	A	B	C
1	Heure n	Nombre de véhicules la n-ième heure	Nombre de véhicules depuis 6h
2	1	400	
3	2		
4	3		

   (a) Quelle formule peut-il saisir dans la cellule **B3** et recopier vers le bas pour calculer le nombre de véhicules franchissant le péage chaque heure ?

   (b) Dans la colonne **C**, on souhaite calculer le nombre total de véhicules ayant franchi le péage depuis 6h.

   Parmi les formules suivantes lesquelles peut-on saisir en **C2** et recopier vers la bas sur la plage **C3 :C15** pour compléter la colonne **C** ?

   i. **=SOMME(B2 :B2)**
   ii. **=SOMME(B2 :B15)**
   iii. **=SOMME($B$2 :B2)**
   iv. **=B2**, puis, dans la cellule **C3** : **=C2+B3**.

   (c) Quel résultat obtient-on dans la cellule **C15** ? Interpréter ce résultat.