Chapitre 3

Ensembles de nombres

Sommaire

3.1 Entiers

On l'a déjà vu lors du chapitre 1 mais rappelons ici les premiers ensembles de nombres observés cette année :

Définition. On appelle ensemble des *entiers naturels*, noté $\mathbb{N}$, l'ensemble des nombres pouvant s'écrire sous une des formes suivantes : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
On appelle ensemble *des entiers* ou ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$, l'ensemble des nombres pouvant s'écrire sous une des formes suivantes : $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

Si on ne précise pas « naturels » quand on parle d'entiers c'est qu'il s'agit d'entiers relatifs.

3.2 Décimaux

Définition 3.1. On appelle ensemble des *nombres décimaux*, noté $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ où a est un entier et n un entier naturel.

Exercice 3.1.
Montrer que tout nombre ayant une écriture décimale finie est un décimal.

Exercice 3.2.

1. Montrer que tout nombre pouvant d'écrire sous la forme $\frac{k}{2^n}$ où k est un entier et n un entier naturel est un décimal.

2. Montrer que tout nombre pouvant d'écrire sous la forme $\frac{k}{5^n}$ où k est un entier et n un entier naturel est un décimal.

3. Montrer que tout nombre pouvant d'écrire sous la forme $\frac{k}{2^n \times 5^m}$ où k est un entier et n et m des entiers naturels est un décimal.

3.3 Rationnels

Définition 3.2. On appelle ensemble des *nombres rationnels*, noté $\mathbb{Q}$, l'ensemble des nombres pouvant s'écrire sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers, b étant différent de 0.

EXERCICE 3.3.
On va dans cet exercice prouver que $\frac{1}{3}$, qui est par définition un rationnel, n'est pas un décimal en faisant une *preuve par l'absurde*.

Supposons que $\frac{1}{3}$ est un décimal.

1. Comment peut-il s'écrire si c'est un décimal ?

2. Isoler alors 10^n.

3. D'après l'expression obtenue, quel nombre est un diviseur de 10^n ?

4. Quels sont les seuls diviseurs possibles de 10^n ?

5. Conclure.

Généralisons :
Soit un rationnel écrit sous forme de fraction irréductible $\frac{a}{b}$.
Quelle propriété pourrait énoncer en généralisant à partir des seuls diviseurs possibles de 10^n ?

EXERCICE 3.4.
On s'intéresse au nombre $\frac{22}{7}$.

1. Justifier que ce nombre n'est pas un décimal.

2. Effectuer à la main la division de 22 par 7 jusqu'à remarquer quelque chose.

C'était aussi le cas de $\frac{1}{3}$.
Généralisons :

Propriété. *Tout nombre rationnel admet une écriture décimale dont la partie décimale est, au bout d'un certain temps,* ....

On l'admettra.

EXERCICE 3.5.
Déterminer à la main l'écriture décimale périodique des nombres rationnels suivants : $\frac{15}{11}$ et $\frac{155}{198}$.

Exercice 3.6.
On donne l'écriture décimale infinie d'un nombre A : $A = 0,878787\ldots = 0,\overline{87}$.

1. Déterminer l'écriture décimale infinie du nombre $100 \times A$.
2. En déduire que $100A - 87 = A$.
3. Isoler A et l'écrire ensuite sous forme de fraction.
4. À quel ensemble appartient A ?

Une correction commentée de l'exercice 3.6

On donne l'écriture décimale infinie d'un nombre A : $A = 0,878787\ldots = 0,\overline{87}$.

On remarque que la partie décimale est périodique et que cette période comporte 2 chiffres.

1. Déterminer l'écriture décimale infinie du nombre $100 \times A$.

   On multiplie par $10^2 = 100$ car la période comporte 2 chiffres ; si elle en comportait un seul on multiplierait par $10^1 = 10$ et si elle en comportait 3 on multiplierait par 10^3. En bref on multiplie par 10^n où n est le nombre de chiffres de la période.
   Et on obtient alors $100 \times A = 87,\overline{87}$

2. En déduire que $100A - 87 = A$.

   En soustrayant 87, on retrouve A et cela nous donne une équation simple comportant comme inconnue A qu'on pourra isoler pour obtenir l'écriture fractionnaire de A.
   Ainsi $100A - 87 = 0,\overline{87} = A$.

3. Isoler A et l'écrire ensuite sous forme de fraction.

$$\begin{aligned} 100A - 87 = A &\Leftrightarrow 100A - A = 87 \\ &\Leftrightarrow 99A = 87 \\ &\Leftrightarrow A = \frac{87}{99} = \frac{3 \times 29}{3 \times 3 \times 11} = \frac{29}{33} \end{aligned}$$

4. À quel ensemble appartient A ?

   A est une fraction et cette fraction a été réduite au maximum ; son dénominateur comporte comme facteurs premiers d'autres facteurs que 2 ou 5, ce n'est donc pas un décimal.
   Étant une fraction c'est forcément un rationnel.
   Donc $A \notin \mathbb{D}$ et $A \in \mathbb{Q}$.

Deux exemples supplémentaires

Un exemple avec une période à un chiffre : On donne $A = 0,\overline{5}$

La partie décimale est périodique et cette période comporte un seul chiffre. On multiplie alors A par $10^1 = 10$.

$10A = 5,\overline{5}$ et $10A - 5 = 0,\overline{5} = A$.

Isolons A :

$$\begin{aligned} 10A - 5 = A &\Leftrightarrow 10A - A = 5 \\ &\Leftrightarrow 9A = 5 \\ &\Leftrightarrow A = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

Un exemple avec une période à 4 chiffres : On donne $A = 0,\overline{1234}$

La partie décimale est périodique et cette période comporte quatre chiffres. On multiplie alors A par $10^4 = 10\,000$.

$10\,000A = 1234,\overline{1234}$ et $10\,000A - 1234 = 0,\overline{1234} = A$.

Isolons A :

$$\begin{aligned} 10\,000A - 1234 = A &\Leftrightarrow 10\,000A - A = 1234 \\ &\Leftrightarrow 9999A = 1234 \\ &\Leftrightarrow A = \frac{1234}{9999} \end{aligned}$$

EXERCICE 3.7.
On pose $D = 21,76\overline{51}$.

1. Donner l'écriture décimale infinie de $E = D \times 100 - 2\,176$.
2. En déduire l'écriture fractionnaire irréductible de E.
3. En déduire l'écriture fractionnaire irréductible de D.

Une correction commentée de l'exercice 3.7

On pose $D = 21,76\overline{51}$.

Ici une difficulté s'ajoute : avant la période de 2 chiffres il y a des chiffres qui constituent d'une part la partie entière du nombre (21) et une partie décimale (76) qui n'est pas périodique. On va multiplier ce nombre par 10^n de façon à ce que la partie décimale ne soit composée que de la partie périodique.

1. Donner l'écriture décimale infinie de $E = D \times 100 - 2\,176$.

   En multipliant par 100 il ne reste que pour la partie décimale que la partie périodique.
   $D \times 100 = 2\,176,\overline{51}$.
   En soustrayant 2 176 on se ramène à un nombre tel qu'on a vu dans les exemples précédents.
   $E = D \times 100 - 2176 = 0,\overline{51}$.
   C'est ce nombre qu'on va travailler avant de revenir à D.

2. En déduire l'écriture fractionnaire irréductible de E.

La partie décimale est périodique et la période comporte deux chiffres dont on multiplie E par $10^2 = 100$:

$$\begin{aligned} 100E = 51,\overline{51} &\Leftrightarrow 100E - 51 = E \\ &\Leftrightarrow 99E = 51 \\ &\Leftrightarrow E = \frac{51}{99} = \frac{3\times 17}{3\times 3\times 11} = \frac{17}{33} \end{aligned}$$

3. En déduire l'écriture fractionnaire irréductible de D.

Maintenant qu'on a E il nous faut revenir à D.
$E = D\times 100 - 2176 = 0,\overline{51} = \frac{17}{33}$
Donc

$$\begin{aligned} 100D - 2\,176 = \frac{17}{33} &\Leftrightarrow 100D = 2\,176 + \frac{17}{33} \\ &\Leftrightarrow D = \frac{2\,176 + \frac{17}{33}}{100} \\ &\Leftrightarrow D = \frac{2873}{132} \text{ (merci la calculatrice)} \end{aligned}$$

Un exemple supplémentaire

$D = 5,145\overline{3}$

On multiplie par 10^n de façon à ce qu'il ne reste en partie décimale que la partie périodique : ici il suffit de multiplier par $10^3 = 1000$:

$$\begin{aligned} 1000D = 5145,\overline{3} &\Leftrightarrow 1000D - 5145 = 0,\overline{3} = E \\ 10E = 3,\overline{3} &\Leftrightarrow 10E - 3 = E \\ &\Leftrightarrow 9E = 3 \\ &\Leftrightarrow E = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \\ 1000D - 5145 = E = \frac{1}{3} &\Leftrightarrow D = \frac{5145 + \frac{1}{3}}{1000} = \frac{3859}{750} \end{aligned}$$

On admettra que c'est toujours le cas et que la réciproque de la propriété précédente est vraie :

Propriété. *Tout nombre ayant une écriture décimale dont la partie décimale est, au bout d'un certain temps .... est un nombre rationnel.*

On a finalement la propriété suivante :

Propriété 3.1. *Un nombre est rationnel si et seulement si son écriture décimale est, au bout d'un certain temps, périodique.*

EXERCICE 3.8.
Trouver l'écriture fractionnaire irréductible des nombres suivants $B = 0,\overline{317}$, $C = 0,\overline{1234}$.

EXERCICE 3.9.
Déterminer l'écriture fractionnaire irréductible de $A = 2,3\overline{4}$, $B = 56,\overline{443}$ et $C = 101,45\overline{234}$.

3.4 Réels

Définition 3.3. Soit une droite munie d'une origine O et d'une graduation.
L'ensemble des abscisses de l'axe ainsi défini s'appelle l'ensemble des *nombres réels* et se note $\mathbb{R}$.
Un tel axe est appelé la *droite des réels*.

Définition 3.4. Les nombres qui appartient à $\mathbb{R}$ mais qui n'appartiennent pas à $\mathbb{Q}$ sont appelés des *nombres irrationnels*.

Ainsi $\sqrt{2}$ et π sont des irrationnels.
Compléter la propriété suivante :

Propriété 3.2. *L'écriture décimale d'un irrationnel n'est ni ...., ni ....*

Preuve. Sinon ce nombre serait un .... ou un ....
et donc pas un .... ♢

Propriété 3.3. *Soit $n \in \mathbb{N}$, alors le nombre $\sqrt{n}$ est soit un entier dans le cas où n est un carré parfait, soit un irrationnel.*

On l'admettra dans le cas général mais va le prouver dans le cas de $\sqrt{2}$.

Exercice 3.10.
On va dans cet exercice prouver que $\sqrt{2}$ est un irrationnel en faisant une *preuve par l'absurde*.

Supposons que $\sqrt{2}$ n'est pas un irrationnel.

1. (a) Que peut-on dire alors de $\sqrt{2}$?
   (b) On a vu dans le chapitre 1 que toute fraction admettait une forme irréductible $\frac{a}{b}$. Que cela signifie-t-il pour a et b ?
2. On suppose donc qu'il existe a et b des entiers n'ayant aucun diviseur commun tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.
   (a) Mettre l'équation précedente au carré et isoler a^2.
   (b) Que peut-on dire de la parité de a^2 ?
   (c) Que peut-on en déduire pour la parité de a ?
   (d) Si a est un nombre pair, montrer que a^2 est un multiple de 4.
   (e) Que peut-on en déduire pour b^2 et donc pour b ?
3. (a) Mettre en évidence une contradiction.
   (b) Conclure.

3.5 Inclusion des ensembles

Propriété 3.4. *On a les inclusions suivantes :*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Remarques.

- Lorsque A et B sont des ensembles, $A \subset B$ signifie « que A est inclus dans B » c'est-à-dire que tous les éléments de A sont aussi des éléments de B ; il peut y avoir des éléments de B qui ne sont pas dans A ;

- Il ne faut pas confondre le symbole précédent avec le symbole $\in$ comme par exemple $2 \in \mathbb{N}$ qui signifie que 2 est un élément de l'ensemble $\mathbb{N}$. Autre exemple : le segment $[AB]$ est un ensemble de points, tout comme la droite (AB). On peut écrire que $A \in [AB]$ et que $B \in (AB)$ mais on écrira que $[AB] \subset (AB)$.

Exemples 3.1.

- $2 \in \mathbb{N}$ et $2 \in \mathbb{Z}$, par définition, $2 = \frac{20}{10}$ donc c'est un décimal et aussi un quotient donc un rationnel et la droite des réels contient un point d'abscisse 2 donc c'est aussi un nombre réel ;

- $-2 \notin \mathbb{N}$ mais il appartient à tous les autres ensembles ;

- $2,5 \notin \mathbb{N}$ et $2,5 \notin \mathbb{Z}$ mais $2,5 = \frac{25}{10}$ donc il appartient à $\mathbb{D}$, à $\mathbb{Q}$ et aussi à $\mathbb{R}$;

- $\frac{1}{3}$ n'est ni un entier et ni un décimal. C'est par contre un rationnel et un réel.

- Enfin des nombres comme $\sqrt{2}$ ou π ne peuvent pas s'écrire sous la forme de quotient et ne sont donc pas des rationnels (et encore moins des entiers ou des décimaux) mais sont bien des abscisses de points sur la droite des réels.

3.6 Intervalles, inégalités

3.6.1 Intervalles

Définition 3.5. Pour tous réels a et b tels que $a < b$, on notera

notation		ensemble
$[a ; b]$		$a \leqslant x \leqslant b$
$]a ; b[$		$a \leqslant x \leqslant b$
$[a ; b[$		$a \leqslant x < b$
$]a ; b]$	l'ensemble des réels x tels que	$a < x \leqslant b$
$]-\infty ; a]$		$x \leqslant a$
$]-\infty ; a[$		$x < a$
$[a ; +\infty[$		$a \leqslant x$
$]a ; +\infty[$		$a < x$

Définition 3.6. Soit a et b deux réels tels que $a \leqslant b$. On appelle *amplitude* des intervalles $[a ; b]$, $[a ; b[$, $]a ; b]$, $]a ; b[$ le nombre $b - a$.

Définition 3.7. On appelle :

Intersection : des intervalles I et J, notée $I \cap J$, l'ensemble des nombres qui appartiennent à I **et** à J

Réunion : des intervalles I et J, notée $I \cup J$, l'ensemble des nombres qui appartiennent à I **ou** à J, c'est-à-dire à au moins l'un des deux.

3.6.2 Inégalités

Propriété 3.5. *Soit a, b et c des nombres réels et k un réel différent de 0. On a les règles suivantes :*
Si $a < b$:

- *alors $a + c < b + c$ et $a - c < b - c$*
- *et si $k > 0$ alors $a \times k < b \times k$ et $\frac{a}{k} < \frac{b}{k}$*
- *et si $k < 0$ alors $a \times k > b \times k$ et $\frac{a}{k} > \frac{b}{k}$*

Cela peut aussi se formuler de la manière suivante :

On ne change pas l'ordre d'une inégalité : si on additionne ou soustrait à cette inégalité un nombre ou quand on multiplie ou divise cette inégalité par un nombre strictement positif.

On change l'ordre d'une inégalité : si on multiplie ou divise cette inégalité par un nombre strictement négatif.

Propriété 3.6. *Soit a, b, c et d des réels tels que $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + c$.*

Cette propriété n'est pas vraie pour les soustractions, n'est pas toujours vraie pour les multiplications et n'est pas vraie pour les divisions.

3.7 Exercices

Les exercices suivants sont piochés dans le manuel.

EXERCICE 3.11.
On donne $A = 3\sqrt{20} + \sqrt{45}$ et $B = \sqrt{180} - 3\sqrt{5}$.

1. Écrire A et B sous la forme $a\sqrt{5}$ avec a entier.
2. Démonter que $A \times B$ et $\frac{A}{B}$ sont des nombres entiers.

EXERCICE 3.12.
Soit $C = \frac{5\sqrt{12}}{2\sqrt{3}}$. À quel ensemble de nombre C appartient-il ?

EXERCICE 3.13.
On pose $D = \frac{20\,755}{9\,488} - \frac{3}{8}$.

1. Écrire, en détaillant les calculs, le nombre D sous la forme d'une fraction irréductible.
2. Le nombre D est-il décimal ? Rationnel ? Justifier.

EXERCICE 3.14.
Soit $E = \frac{3\,575}{4\,225}$ et $F = E + \frac{4}{26}$.

1. Écrire E sous la forme d'une fraction irréductible.
2. À quel ensemble de nombre F appartient-il ?

EXERCICE 3.15.
Soit $G = \frac{8}{3} - \frac{5}{3} : \frac{20}{21}$ et $H = \left(2 + \frac{2}{3}\right) : \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{3}\right)$.
Pour chacun de ces deux nombres :

1. Les calculer en détaillant les étapes de calculs et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
2. Déterminer le plus petit ensemble de nombre qui le contient.

EXERCICE 3.16.
Déterminer la 314$^{\text{è}}$ décimale de $I = \frac{253}{7}$.

EXERCICE 3.17.
Soit $J = 0,999\ldots = 0,\overline{9}$.

1. Justifier que J est solution de $10J - 9 = J$.
2. Résoudre $10J - 9 = J$.
3. Conclure.

EXERCICE 3.18.
Les questions sont indépendantes.

1. Donner les amplitudes des intervalles suivants :
   (a) $[5\,;100]$
   (b) $\left[1\,;\frac{4}{3}\right]$
   (c) $\left[2 - \frac{1}{3}\,;2 + \frac{1}{3}\right]$
   (d) $\left[5 - \frac{1}{n}\,;5 + \frac{1}{n}\right]$ où $n \in \mathbb{N}^*$
   (e) $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ où $n \in \mathbb{N}^*$
2. Donner un intervalle d'amplitude 0,1 contenant $\sqrt{2}$.
3. Donner un encadrement entre deux décimaux d'amplitude 10^{-2} contenant π.

EXERCICE 3.19.
Soit x un nombre réel tel que $0 \leqslant x \leqslant 12$.
À quel intervalle appartient le résultat de chacune des expressions suivantes ?

1. $\frac{2x+8}{5}$
2. $4x$
3. $\frac{8-x}{2}$
4. $10 - 0,2x$

EXERCICE 3.20.
Soit x et y deux nombres réels tels que $1,4 \leqslant x \leqslant 3,2$ et $0 \leqslant y \leqslant 1$. Que peut-on en déduire pour :

1. $x + y$?
2. $x + 3y$?
3. $x - y$?
4. $2x - 3y$?

EXERCICE 3.21.
Donner, sous forme d'intervalle, l'ensemble des solutions des inéquations suivantes :

1. $\frac{5}{2}x + 4 > x + 6$
2. $\frac{14}{3}x \leqslant 2x - \frac{1}{3}$
3. $\frac{7}{9}x + 4 \geqslant \frac{1}{3}x - 3$
4. $-\frac{1}{2}x - 1 < \frac{1}{5}x + \frac{1}{4}$