Chapitre 8

Compléments sur les fonctions

Sommaire

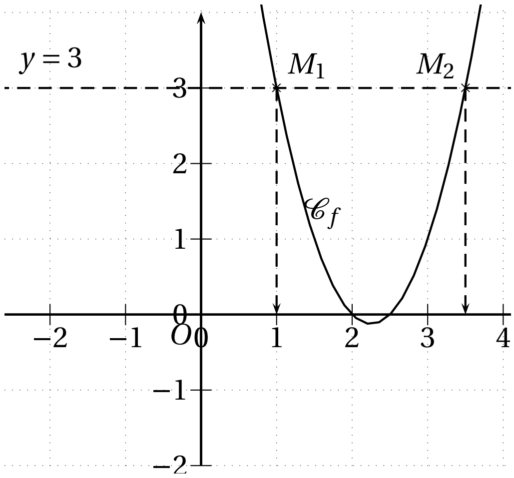
8.1 Résolutions graphiques d'inéquations

8.1.1 Résolutions d'inéquations de la forme $f(x) \leqslant k$

Ces inéquations peuvent se résoudre graphiquement. On procède de la façon suivante :

- on trace soigneusement $\mathscr{C}_f$ dan un repère (orthogonal) ;
- on trace la droite d'équation $y = k$;
- on recherche les points de la courbe situés *sous* la droite ;
- l'ensemble des solutions est constitué des abscisses de ces points.

Exemple. On a représenté sur le schéma ci-dessous, la courbe de f.
Si l'on doit résoudre $f(x) \leqslant 3$, après avoir tracé $y = 3$ on constate que les points de la courbe situés sous cette droite ont leurs abscisses comprises entre 0 et $\frac{5}{2}$.
Donc $f(x) \leqslant 3 \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{5}{2}\right]$.



Remarque.

- On résoud de la même manière les équations du type $f(x) \geqslant k$.

  On retient alors les abscisses des points situés *au-dessus* de la droite d'équation $y = k$.

  Dans l'exemple $f(x) \geqslant 3 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty;0\right] \cup \left[\frac{5}{2};+\infty\right[$.

- De même pour les inéquations strictes : $f(x) > k$ ou $f(x) < k$. On excluera alors les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite.

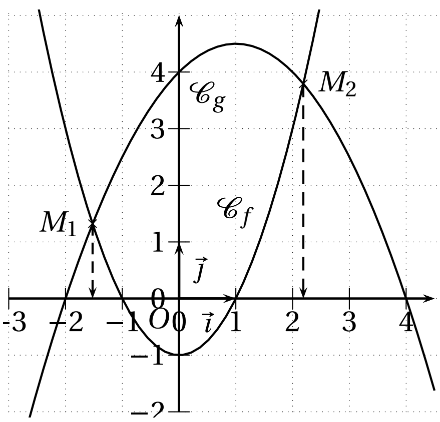
  Dans l'exemple $f(x) < 3 \Leftrightarrow x \in \left]0;\frac{5}{2}\right[$.

8.1.2 Résolutions d'inéquations de la forme $f(x) \leqslant g(x)$

Là encore ces inéquations peuvent se résoudre graphiquement. On procède de la façon suivante :

- on trace soigneusement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un repère (orthogonal) ;
- l'ensemble des solutions est constitué des abscisses des points où la courbe de f est située *sous* celle de g.

Exemple. Sur le schéma ci-dessous, on a représenté les courbes de f et de g.
Si l'on doit résoudre $f(x) \leqslant g(x)$, on constate que les points de la courbe de f situés sous celle de g ont leurs abscisses comprises entre environ $-1,5$ et 2,2.
Donc $f(x) \leqslant g(x) \Leftrightarrow x \in [-1,5;2,2]$. Ou bien $S = [-1,5;2,2]$.



Remarques.

- On résoud de la même manière les équations du type $f(x) \geqslant g(x)$.

  On retient alors les abscisses des points de la courbe de f situés *au-dessus* de celle de g.

  Dans l'exemple $f(x) \geqslant g(x) \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1,5] \cup [2,2; +\infty[$.

- De même pour les inéquations strictes : $f(x) > g(x)$ ou $f(x) < g(x)$. On excluera alors les abscisses des points d'intersection des deux courbes.

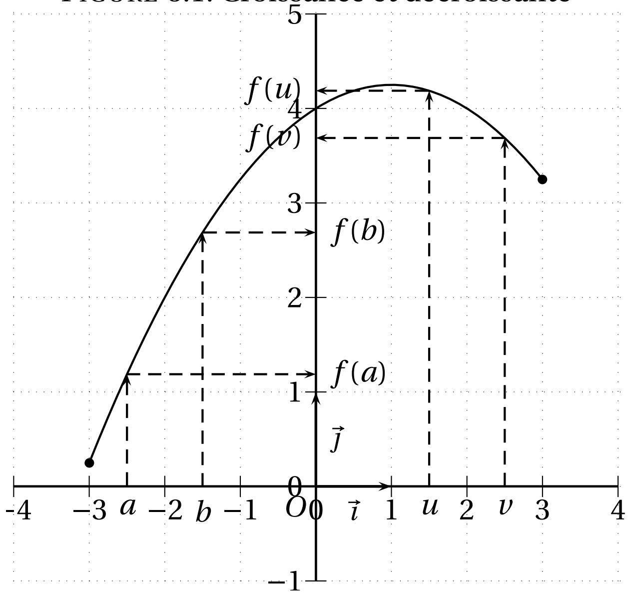
  Dans l'exemple $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x \in]-1,5; 2,2[$.

8.2 Sens de variation

Il s'agit de traduire mathématiquement qu'une fonction « augmente » ou « diminue ».

Exemple. Soit, par exemple, la fonction définie sur $[-3; 3]$ par la courbe représentative donnée sur la figure 8.1 de la présente page. On constate que lorsque $x \in [-3; 1]$, si x augmente, $f(x)$ augmente aussi alors que lorsque $x \in [1; 3]$, si x augmente, $f(x)$ diminue.
C'est la définition mathématique de la croissance ou de la décroissance d'une fonction f.

FIGURE 8.1: Croissance et décroissante



Définition 8.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est

- *croissante* sur I si, pour tous réels a et b de I, on a :
  Si $a < b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$.

- *décroissante* sur I si, pour tous réels a et b de I, on a :
  Si $a < b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$.

- *monotone* si elle n'est que croissante sur I ou si elle n'est que décroissante sur I.

- *constante* sur I si, pour tous réels a et b de I, on a : $f(a) = f(b)$.

Remarques.

- Ces notions ne sont valables que sur **un intervalle** et pas sur une réunion d'intervalles disjoints.

- Antécédents et images étant rangés dans le même ordre, on dit qu'une fonction croissante *conserve* l'ordre.
- Antécédents et images étant rangés dans l'ordre inverse, on dit qu'une fonction décroissante *inverse* l'ordre.
- On obtient les définitions d'une fonction *strictement* croissante ou *strictement* décroisante en remplaçant les inégalités par des inégalités strictes. Ainsi on dit que f est strictement croissante sur I si pour tous réels a et b de I on a :
  Si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$
- Une fonction est strictement monotone sur I si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I

8.2.1 Tableau de variations

Ces résultats peuvent se résumer dans un tableau de variation, qui est une forme stylisée de représentation où l'on indique uniquement si la courbe monte, descend ou est stable. Dans la première ligne on indique les valeurs importantes de x et dans la seconde les variations de f.

Exemple. Dans l'exemple précédent on obtient

x	-3		1		3
f	$\approx 0,25$	$\nearrow$	$\approx 4,25$	$\searrow$	$\approx 2,25$

8.2.2 Extremums

Les extremums, s'ils existent, sont les valeurs maximale et minimale qui sont **atteintes** par la fonction f sur un intervalle donné. Plus précisément :

Définition 8.2. Soit une fonction f définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On dit que

- f admet un *maximum*, atteint en x_0 si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant f(x_0)$. Ce maximum est alors $f(x_0)$.
- f admet un *minimum*, atteint en x_0 si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f(x_0)$. Ce minimum est alors $f(x_0)$.

Les maximum et minimum sont appelés les *extremums*.

Exemple. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ n'admet pas -1 comme minimum.
En effet, si on a bien $f(x) \geqslant -1$ sur $\mathbb{R}$, il n'existe pas de x_0 tel que $f(x_0) = -1$.
Par contre 1 est bien le minimum de f sur $\mathbb{R}$ car

- $f(x) \geqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ **ET**
- $f(0) = 1$

On dira donc : le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est 1 et il est atteint pour $x_0 = 0$.

8.3 Parité

8.3.1 Fonction paire

Définition 8.3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f *est paire* si :

- I est centré en 0 ;
- pour tout $x \in I$, $f(-x) = f(x)$.

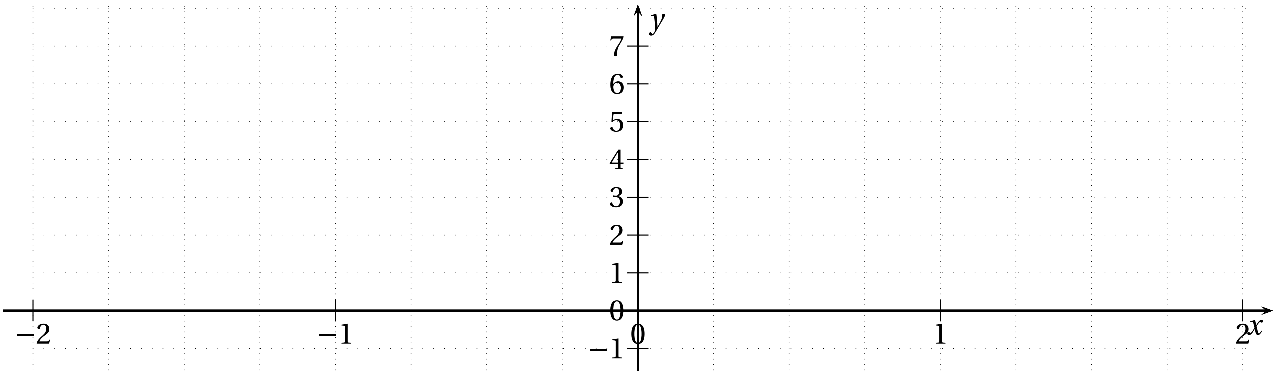
Propriété 8.1. *Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'*axe des ordonnées.

EXERCICE 8.1.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^4 - 2x^2$.
Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que f est une fonction paire. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}$?
2. À l'aide de la calculatrice compléter le tableau ci-dessous.

x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
$f(x)$									

3. À l'aide des deux questions précédentes, tracer $\mathscr{C}$ dans le repère ci-dessous.



Propriété 8.2. *Soit f une fonction paire. Alors ses variations sur $\mathbb{R}^-$ et sur $\mathbb{R}^+$ sont symétriques.*

On l'admettra.
En particulier, si elle est croissante sur un intervalle $[a; b] \subset [0; +\infty[$ alors elle est décroissante sur l'intervalle $[-b; -a]$, et si elle est décroissante sur un intervalle $[a; b] \subset [0; +\infty[$ alors elle est croissante sur l'intervalle $[-b; -a]$.

8.3.2 Fonction impaire

Définition 8.4. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f *est impaire* si :

- I est centré en 0 ;
- pour tout $x \in I$, $f(-x) = -f(x)$.

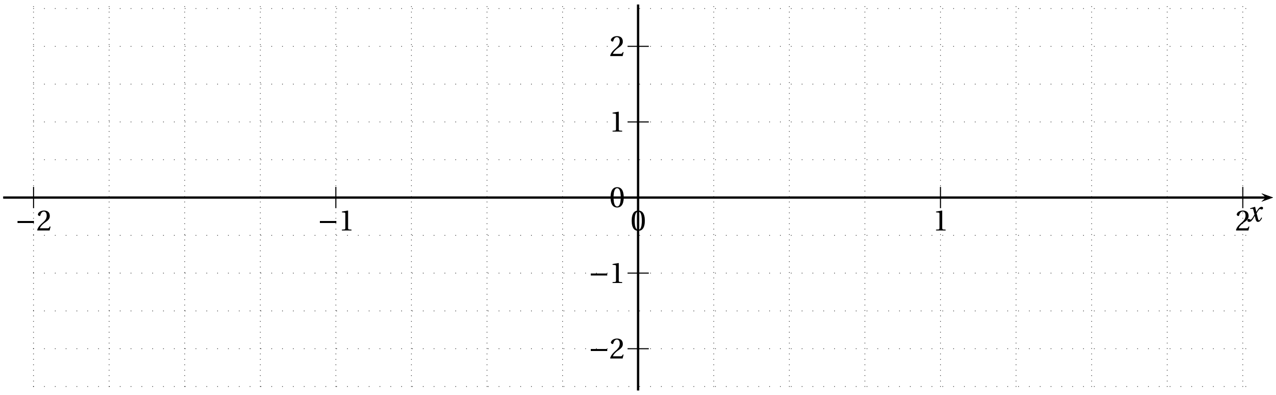
Propriété 8.3. *Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'*origine du repère.

EXERCICE 8.2.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^3 - 3x$.
Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que f est une fonction impaire. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}$?
2. À l'aide de la calculatrice compléter le tableau ci-dessous.

x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
$f(x)$									

3. À l'aide des deux questions précédentes, tracer $\mathscr{C}$ dans le repère ci-dessous.



Propriété 8.4. *Soit f une fonction impaire. Alors ses variations sur $\mathbb{R}^-$ et sur $\mathbb{R}^+$ sont identiques.*

On l'admettra.
En particulier, si elle est croissante sur un intervalle $[a; b] \subset [0; +\infty[$ alors elle est aussi croissante sur l'intervalle $[-b; -a]$, et si elle est décroissante sur un intervalle $[a; b] \subset [0; +\infty[$ alors elle est aussi décroissante sur l'intervalle $[-b; -a]$.

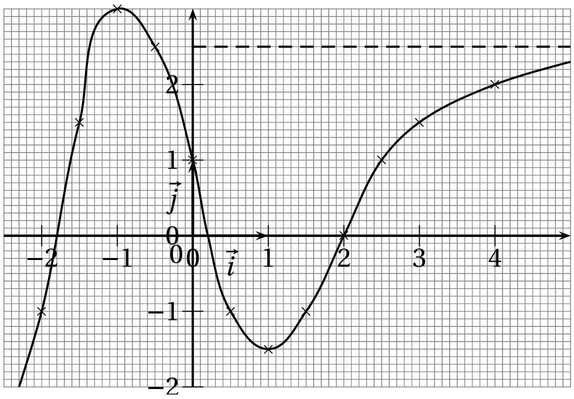
8.4 Exercices et problèmes

8.4.1 Résolutions graphiques d'inéquations

EXERCICE 8.3.
La fonction f est définie sur $[-3;3]$ par : $f : x \longmapsto x^2 - 3x + 1$.

1. À l'aide de la calculatrice résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :
   (a) $f(x) = 3$; (c) $f(x) \geqslant -1$; (e) $f(x) > -3$;
   (b) $f(x) = -1,5$; (d) $f(x) < 4$; (f) $f(x) < -2$.
2. Déterminer graphiquement le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

EXERCICE 8.4.
Une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est donnée par sa courbe représentative $\mathscr{C}$:



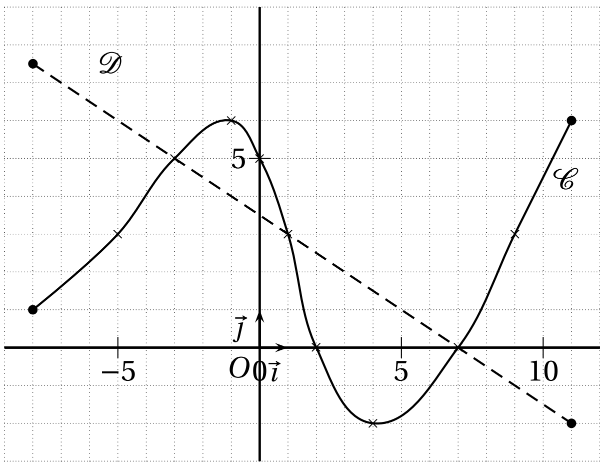
1. Avec la précision permise par le graphique, résoudre les inéquations suivantes :

   (a) $f(x) \geqslant 1$; (c) $f(x) < -1$;

   (b) $f(x) \geqslant 0$; (d) $f(x) > 2$.

2. Déterminer graphiquement le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

EXERCICE 8.5.
La courbe $\mathscr{C}$ de la figure ci-dessous représente une fonction f et le segment de droite $\mathscr{D}$ représente une fonction g.



1. Résoudre graphiquement les inéquations :

   (a) $f(x) \leqslant 0$; (c) $f(x) > 5$;

   (b) $f(x) \geqslant 3$; (d) $g(x) \geqslant 0$.

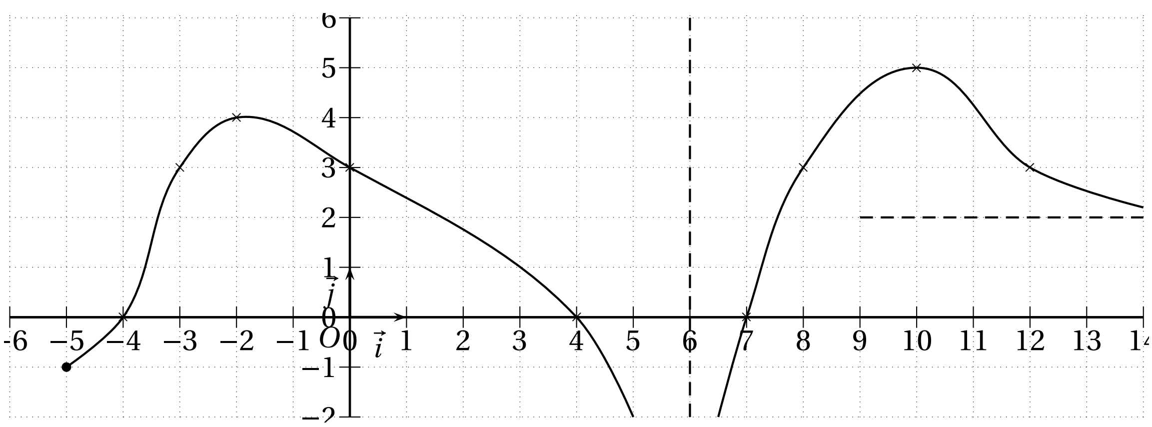
2. Résoudre graphiquement :

   (a) $f(x) = g(x)$; (b) $f(x) < g(x)$.

3. Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

8.4.2 Variations

EXERCICE 8.6.
On considère la fonction f dont on donne la représentation $\mathscr{C}$ sur la figure ci-dessous (en deux parties).
Indiquer son ensemble de définition et dresser son tableau de variations.



Exercice 8.7 (Avec une calculatrice)**.**
On considère la fonction f définie par : $f(x) = 2x\sqrt{4-x^2}$. À l'aide d'une calculatrice graphique :

1. Conjecturer l'ensemble de définition de f ;
2. Conjecturer quels sont les extremums de f sur son ensemble de définition ;
3. Dresser le tableau des variations de f.

Exercice 8.8.
Tracer une courbe représentative d'une fonction f sachant que :

- le tableau des variations de f est le suivant :

x			0		3	
f	1	↗		↘		↗

- 1 a pour antécédents, par la fonction f, -2 et 1,5 ;
- $f(x) = 0$ a pour solutions $x = 2$ ou $x = 4$;
- $f(-1) = 2$;
- -1 est l'image de 3 ;
- $D_f = [-2;4]$;
- le maximum de f est 3 ;

Exercice 8.9.
On donne le tableau des variations d'une fonction f :

x	-5		-3		0		1		8
f	3	↘	0	↗	1	↘	0	↘	-2

1. S'il est possible de répondre, compléter par « < », « > » ou « = ». Sinon mettre une croix.
   - $f(-1)$ …… $f(-2)$
   - $f(-3)$ …… $f(1)$
   - $f(-1)$ …… 1
   - $f(-2)$ …… $f(0,5)$
   - $f(-2)$ …… $f(1,5)$
   - $f(4)$ …… $f(2)$
   - 4 …… $f(-4)$
2. Résoudre, lorsque c'est possible, les inégalités suivantes :
   (a) $f(x) \geqslant 0$; (c) $f(x) < -1$;
   (b) $f(x) = 1$; (d) $f(x) < 0$.
3. Dire, si c'est possible, quel est le maximum de la fonction et quel est son minimum.

8.4.3 Parité

Exercice 8.10.
Étudier la parité des fonctions suivantes et, en cas de parité, interpréter le résultat.
On pourra commencer par visualiser la courbe de la fonction sur calculatrice pour se donner une idée du résultat à obtenir.

- $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$
- $g : x \mapsto \sqrt{x^2+1} - 2$
- $h : x \mapsto (x-1)^2 + 3$
- $i : x \mapsto -2x^3$
- $j : x \mapsto x^2 + x$
- $k : x \mapsto x^4 + x^3$.