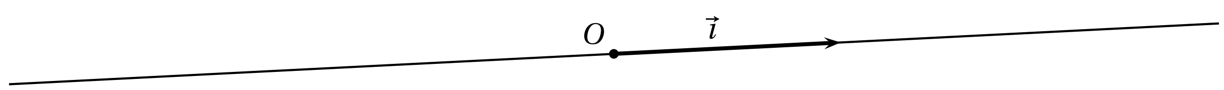
Chapitre 5

Repérage

Sommaire

5.1 Repère d'une droite

Définition 5.1. Soit $\mathscr{D}$ une droite. On appelle *repère de cette droite* un couple $(O;\vec{\imath})$ où O est un point de la droite, appelé *origine du repère* et $\vec{\imath}$ un vecteur ayant même direction que celle de la droite. Tout point M de cette droite est alors repéré par le nombre x tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath}$, appelé abscisse de ce point.



EXERCICE.
Placer sur le schéma ci-dessus les points A, B et C d'abscisses respectives : 2, $-1{,}5$ et 0,5.

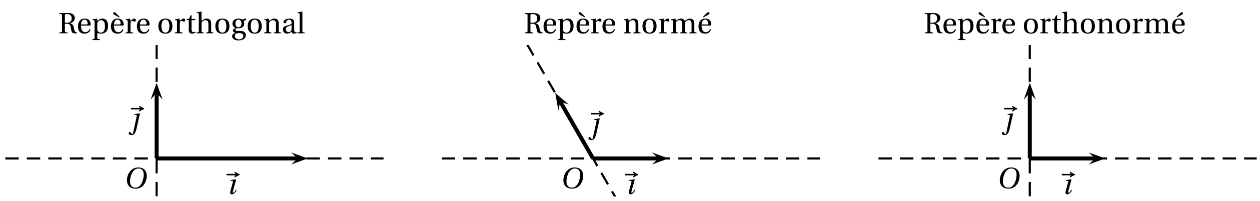
5.2 Repère d'un plan

5.2.1 Définition

Définition 5.2. Soit O un point du plan et $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ deux vecteurs de ce plan non colinéaires (de directions différentes), alors $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ est appelé *repère* du plan.
O est appelée *origine* du repère et le couple $\left(\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ est appelé *base* du repère.

Définition 5.3. Soit un repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ du plan.

- Si les directions de $\vec{\imath}$ et de $\vec{\jmath}$ sont orthogonales, le repère est dit *orthogonal*.
- Si les normes de $\vec{\imath}$ et de $\vec{\jmath}$ sont égales à 1, le repère est dit *normé*.
- Si les directions de $\vec{\imath}$ et de $\vec{\jmath}$ sont orthogonales et que les normes de $\vec{\imath}$ et de $\vec{\jmath}$ sont égales à 1, le repère est dit *orthonormé*.
- Sinon, le repère est dit *quelconque*.



5.2.2 Coordonnées de vecteur

Propriété 5.1 (admise)**.** *Le plan est muni d'une base* $\left(\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$*. Pour tout vecteur* $\vec{u}$ *du plan, il existe un unique couple* $(x;y)$*, appelé* coordonnées de $\vec{u}$*, tel que* $\vec{u}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$.

On notera indifférement $\vec{u}(x;y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

La notation en colonne est particulièrement pratique dans les calculs que nous verrons plus tard.

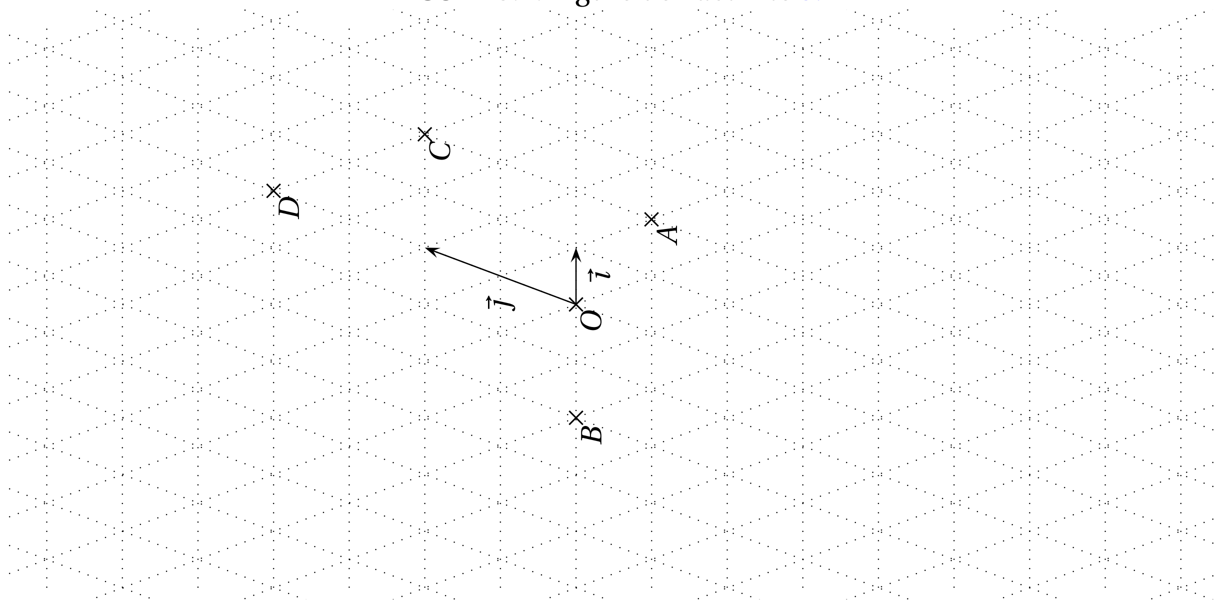
Remarque. On notera que l'origine du repère n'a pas d'importance dans les coordonnées d'un vecteur et que le vecteur nul a pour coordonnées $(0;0)$; en effet $\overrightarrow{0}=0\vec{\imath}+0\vec{\jmath}$.

Activité 5.1.

Sur la figure 5.1 page ci-contre où le plan est muni du repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$:

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants : $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OD}$; $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
2. (a) Soit E tel que $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}$. Construire E puis déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{CE}$.
   (b) Soit F tel que $\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{OC}$. Construire F puis déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{FD}$.
3. (a) Construire un représentant de $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.
   (b) Donner les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, de $\overrightarrow{CD}$ et de $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.
   (c) Que remarque-t-on ?
4. (a) Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{BD}$ et de $\overrightarrow{DB}$. Que remarque-t-on ?
   (b) Construire un représentant du vecteur $\vec{v}=2\overrightarrow{OA}$. Déterminer ses coordonnées et les comparer à celles de $\overrightarrow{OA}$.
   (c) Soit K le milieu de $[AD]$. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AD}$. Que remarque-t-on ?

FIGURE 5.1: Figure de l'activité 5.1



Plus généralement, on a les propriétés suivantes :

Propriété 5.2. *Le plan est muni d'un repère. Soit $\vec{u}$ $(x\,;\,y)$ et $\vec{v}$ $(x'\,;\,y')$ deux vecteurs et k un nombre.*

- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \end{cases}$
- *$\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées* $(\dots\dots\,;\,\dots\dots)$.
- *$k\vec{u}$ a pour coordonnées* $(\dots\dots\,;\,\dots\dots)$.

Elle sera démontrée en classe.

5.2.3 Coordonnées de point

Définition 5.4. Le plan étant muni d'un repère $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on appelle *coordonnées* du point M le couple $(x\,;\,y)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$, x étant appelé *abscisse* de M et y étant appelé *ordonnée* de M. La droite $(O; \vec{\imath})$ est appelée l'*axe des abscisses* et parfois notée (Ox) ; la droite $(O; \vec{\jmath})$ est appelée l'*axe des ordonnées* et parfois notée (Oy) ; ces deux droites sont les *axes de coordonnées.*

Les coordonnées du point M sont donc les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Cela implique qu'elles dépendent de l'origine du repère.

5.2.4 D'autres propriétés

Les propriétés suivantes seront démontrées en classe :

Propriété 5.3. *Soit $A\,(x_A\,;\,y_A)$ et $B\,(x_B\,;\,y_B)$ deux points du plan.*
Alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(\dots\dots\dots\dots\,;\,\dots\dots\dots\dots)$.

Propriété 5.4. *Soit P un plan muni d'un repère quelconque.*
Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ et $I(x_I; y_I)$ milieu de $[AB]$.
Alors $x_I = \dots\dots\dots\dots$ *et* $y_I = \dots\dots\dots\dots$

Définition 5.5. Le plan est muni d'un repère. Soit $\vec{u}\,(x\,;\,y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;\,y')$ deux vecteurs du plan. Le nombre $xy' - x'y$ est appelé déterminant des deux vecteurs.

Propriété 5.5. *Le plan est muni d'un repère. Soit $\vec{u}\,(x\,;\,y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;\,y')$ deux vecteurs du plan. Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ ....*

Propriété 5.6. *Soit un plan muni d'un repère **orthonormé**. Alors :*

- *La norme du vecteur $\overrightarrow{u}\,(x\,;\,y)$ est $\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{x^2+y^2}$*
- *Soit $A\,(x_A\,;\,y_A)$ et $B\,(x_B\,;\,y_B)$ deux points du plan alors $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| =$ ....*

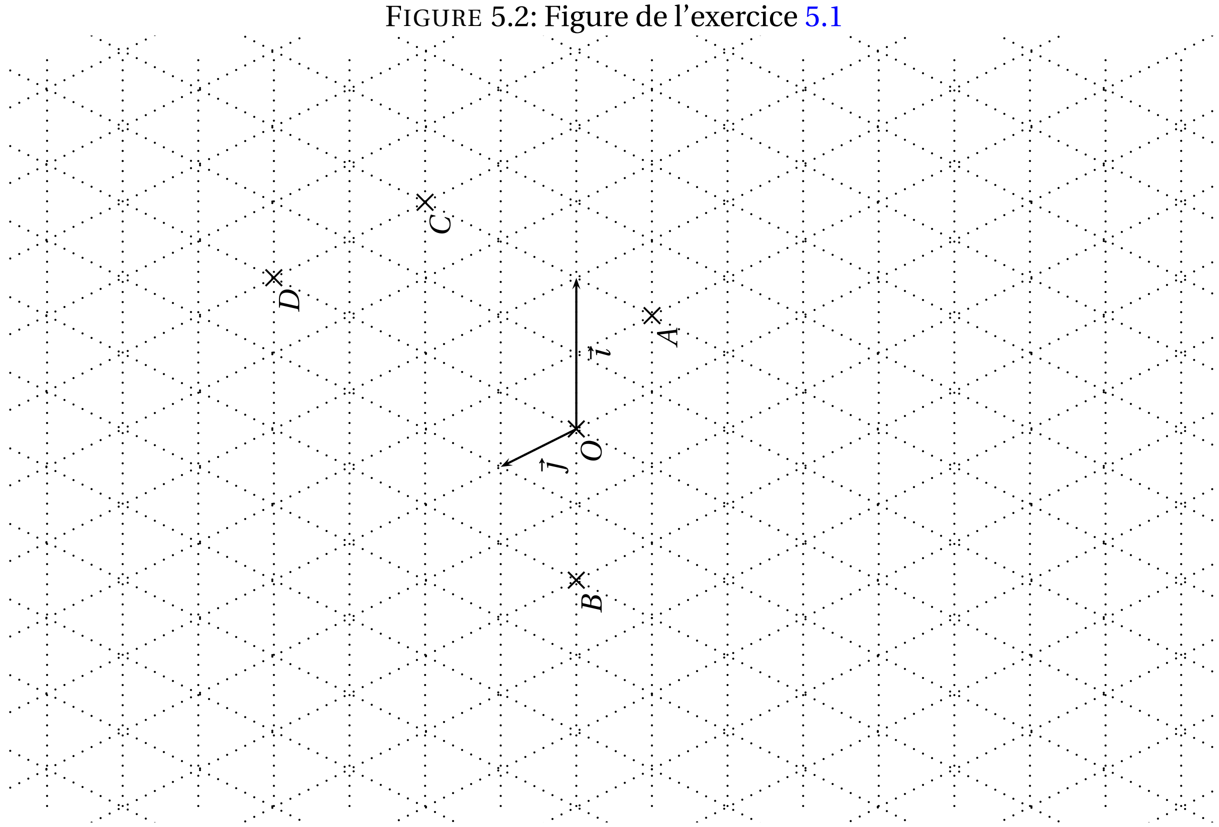
Propriété 5.7. *On appelle homothétie de centre Ω et de rapport $k \in \mathbb{R}$, la transformation du plan qui à chaque point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.*

5.3 Exercices

EXERCICE 5.1.
Sur la figure 5.2 de la présente page où le plan est muni du repère $\left(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$:

1. Tracer les axes de coordonnées.
2. Placer les points $M(2;1)$, $N(-1,5;1)$, $P(-2;-1)$ et $Q(1,5;-1)$;
3. Donner graphiquement les coordonnées des points A, B, C et D ;

FIGURE 5.2: Figure de l'exercice 5.1



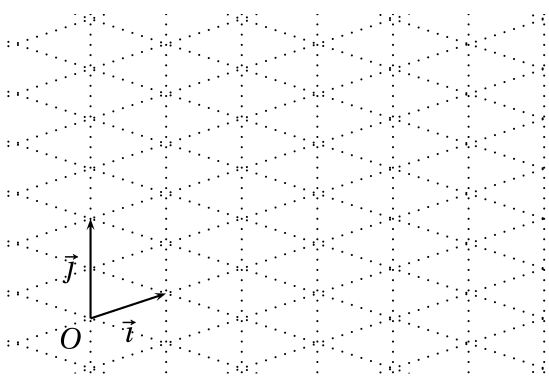
EXERCICE 5.2.
Le plan est muni du repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. Soient les points $A\,(2\,;-4)$, $B\,(-1\,;3)$, $C\,(-3\,;-2)$.

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CA}$, du vecteur $\overrightarrow{CB}$ et du vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$.
2. (a) Déterminer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{OD}=\vec{u}$.
   (b) Déterminer les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE}=\vec{u}$.
3. Quelles sont les coordonnées du point F tel que $\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$?
4. Montrer que F milieu de $[OA]$.

EXERCICE 5.3.
Le plan est muni d'un repère quelconque.
On donne les points $A\,(2\,;3)$ et $I\,(-4\,;1)$.
On sait que I est le milieu de $[AB]$.
Déterminer les coordonnées de B.

EXERCICE 5.4.
Sur le schéma ci-dessous où le plan est muni du repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$:

1. Placer les points $A(1\,;2)$, $B(3\,;1,5)$, $C(4\,;0,5)$ et $D(2\,;1)$;
2. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.



EXERCICE 5.5.
Le plan est muni d'un repère quelconque.
On donne les points $A\,(-5\,;3)$, $B\,(-4\,;1)$ et $C\,(1\,;-4)$.

1. Déterminer les coordonnées de I, milieu de $[AC]$.
2. Déterminer les coordonnées de D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

EXERCICE 5.6.
Le plan est muni du repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. Soient les points $A\,(-9\,;-10)$, $B\,(2\,;9)$, $C\,(5\,;3)$, $D\,(-1\,;-8)$ et $E\,(3\,;0)$.

1. Les points C, D et E sont-ils alignés ?
2. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

EXERCICE 5.7.
$ABCD$ est un parallélogramme.
A' est le symétrique de A par rapport à B et E est le milieu de $[BC]$.

1. Déterminer les coordonnées des points A', E et D dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$
2. Montrer que les points A', E et D sont alignés

EXERCICE 5.8.
Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature du triangle ABC.

1. $A\,(-4\,;-1)$, $B\,(4\,;-2)$ et $C\,(-2\,;2)$
2. $A\,(-5\,;0)$, $B\,(3\,;-4)$ et $C\,(2\,;4)$
3. $A\,(0\,;0)$, $B\,(4\,;2\sqrt{3})$ et $C\,(-1\,;3\sqrt{3})$

EXERCICE 5.9.
Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature du quadrilatère $ABCD$:

1. $A\,(1\,;0)$, $B\,(1\,;3)$, $C\,(2\,;3)$ et $D\,(3\,;1)$;
2. $A\,(1\,;2)$, $B\,(4\,;7)$, $C\,(1\,;6)$ et $D\,(-2\,;1)$;
3. $A\,(1\,;0)$, $B\,(0\,;2)$, $C\,(4\,;4)$ et $D\,(5\,;2)$;
4. $A\,(-4\,;-1)$, $B\,(4\,;-2)$, $C\,(8\,;5)$ et $D\,(0\,;6)$;
5. $A\,(0\,;-2)$, $B\,(3\,;-1)$, $C\,(2\,;2)$ et $D\,(-1\,;1)$.

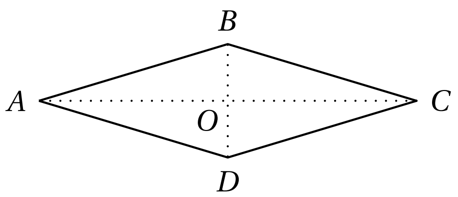
EXERCICE 5.10.
Soit trois points non alignés A, B et C dans le plan.
L'homothétie de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$ transforme A en A' et B en B'.

1. Construire la figure.

2. Donner les égalités vectorielles obtenues grâce à l'homothétie.
3. En déduire que (AB) est parallèle à $(A'B')$.

EXERCICE 5.11.
Le quadrilatère $ABCD$ donné ci-dessous est un losange de centre O.
Dans chacun des cas ci-dessous, dire de quel type est le repère et donner les coordonnées de tous les points dans ce repère.

- $\left(A; \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\right)$
- $\left(O; \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}\right)$
- $\left(O; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)$
- $\left(D; \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DO}\right)$



EXERCICE 5.12.
$ABCD$ est un parallélogramme, I est le milieu de $[AD]$, E est le symétrique de B par rapport à I.

1. Faire une figure.
2. Choisir un repère et montrer que D est le milieu de $[EC]$

EXERCICE 5.13.
Que fait l'algorithme suivant qui pourrait être en rapport avec ce chapitre ?

Entrées
a, b, c, d
Traitement
$e \leftarrow \frac{a+c}{2}$
$f \leftarrow \frac{b+d}{2}$
Sorties
e, f

EXERCICE 5.14.
Écrire un algorithme prenant comme arguments, c'est-à-dire comme « entrées », les coordonnées de deux points et affichant la distance entre ces deux points dans un repère orthonormé.

EXERCICE 5.15.
Écrire un algorithme prenant comme arguments, c'est-à-dire comme « entrées », les coordonnées de quatre points A, B, C et D et renvoyant « vrai » si les droites (AB) et (CD) sont parallèles et « faux » sinon.

EXERCICE 5.16.
Écrire un algorithme prenant comme arguments, c'est-à-dire comme « entrées », les coordonnées de trois points A, B, et C et renvoyant « vrai » si les points A, B et C sont alignés et « faux » sinon.

EXERCICE 5.17.
Écrire un algorithme prenant comme arguments, c'est-à-dire comme « entrées », les coordonnées de trois points A, B et C, et calculant les coordonnées du point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme.