Chapitre 9

Équations de droites

Sommaire

Dans tout ce chapitre, on considère que le plan est muni d'un repère quelconque.

9.1 Rappels

On a vu dans le chapitre 7 les deux choses suivantes :

Définition. Soit $\vec{u}\,(x\,;\,y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;\,y')$ deux vecteurs du plan.
Le nombre $xy' - x'y$ est appelé *déterminant* des deux vecteurs.

Propriété. *Soit $\vec{u}\,(x\,;\,y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;\,y')$ deux vecteurs du plan.*

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \text{ leur déterminant est nul} \Leftrightarrow xy' - x'y = 0$$

9.2 Équations cartésiennes

9.2.1 Vecteur directeur d'une droite

Définition 9.1. Soit $\mathscr{D}$ une droite et A et B deux points distincts de cette droite.
On appelle *vecteur directeur* de $\mathscr{D}$ tout vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Remarque. $\overrightarrow{AB}$ étant colinéaire à lui même, c'est aussi un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

La figure 9.1 page suivante présente une droite et quelques vecteurs directeurs de cette droite.

9.2.2 Équation cartésienne d'une droite

ACTIVITÉ 9.1.
On cherche à se donner une idée de ce que sont les points du plan de coordonnées $(x; y)$ telles que ces coordonnées vérifient l'équation $3x - 2y + 6 = 0$.

1. Déterminer combien doit valoir y pour que l'équation soit vérifiée si $x = 0$.
2. Déterminer combien doit valoir x pour que l'équation soit vérifiée si $y = 0$.
3. Compléter le tableau suivant en déterminant de la même manière les x ou les y pour que l'équation soit vérifiée :

x	0	-1	2			
y				0	-3	1

4. Placer l'ensemble des points trouvés dans le repère de la figure 9.2 page ci-contre. Que remarque-t-on ?
5. Déterminer par lecture graphique les coordonnées d'un autre point aligné avec les précédents. Ses coordonnées vérifient telles l'équation $3x - 2y + 6 = 0$?

On généralise avec la propriété suivante, qu'on admettra :

Propriété 9.1. *Toute droite $\mathscr{D}$ du plan admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ ou $ax + by = c$ où a, b et c sont des réels avec $(a; b) \neq (0; 0)$ appelée équation cartésienne de $\mathscr{D}$*

Cela signifie que tous les points dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient cette équation appartiennent à la droite $\mathscr{D}$ et que tous les points appartenant à la droite $\mathscr{D}$ ont leurs coordonnées $(x; y)$ qui vérifient cette équation.

Remarque. Il n'y a pas qu'une seule équation cartésienne. En effet si $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne d'une droite $\mathscr{D}$, alors, en multipliant cette équation par $k \neq 0$, on obtient une équation équivalente qui est une autre équation cartésienne de $\mathscr{D}$. Par exemple $3x - 2y + 6 = 0$ et $-6x + 4y - 12 = 0$ sont deux équations cartésiennes d'une même droite.

FIGURE 9.1: Une droite et des vecteurs directeurs

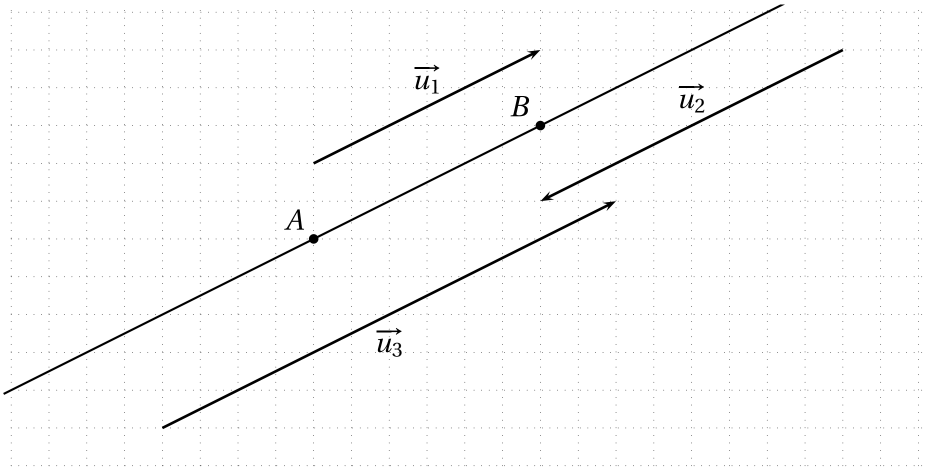
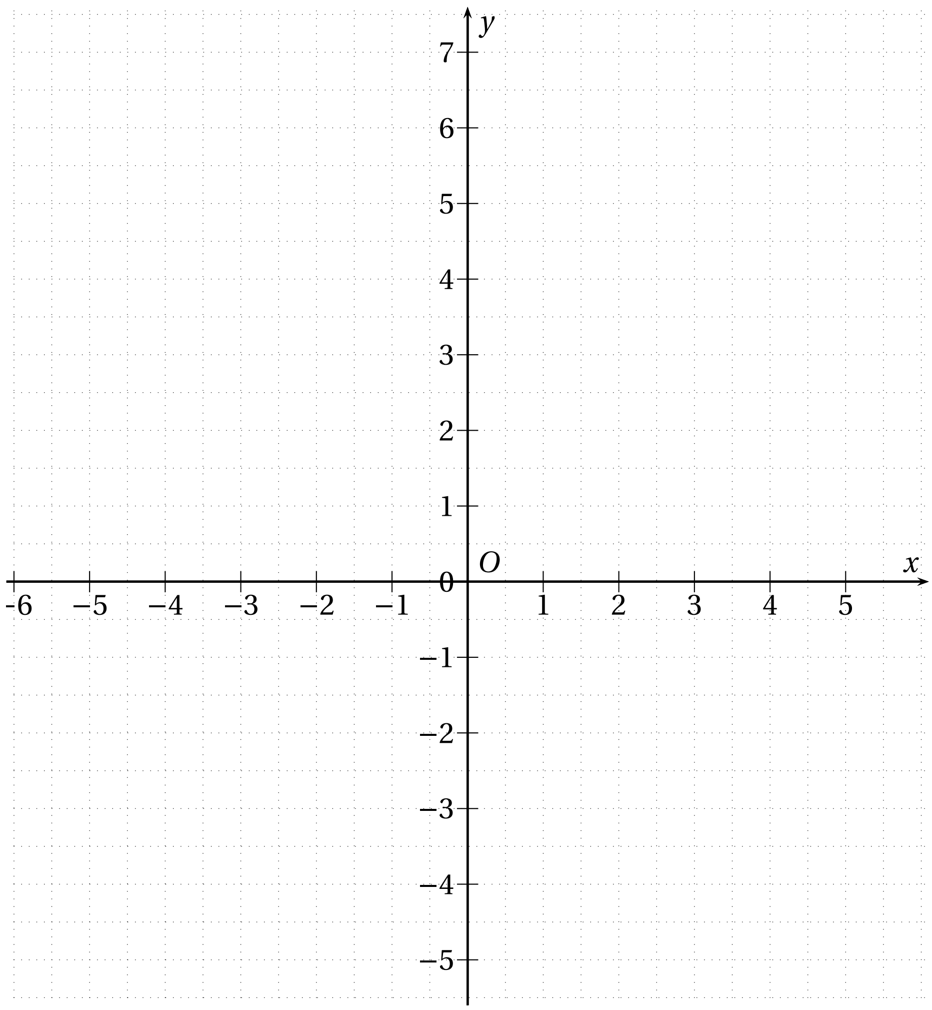


FIGURE 9.2: Repère de l'activité 9.1



9.2.3 Lien entre équation cartésienne et vecteur directeur

ACTIVITÉ 9.2.
Soit $A(1;-2)$ et $B(2;3)$ deux points distincts du plan. On cherche à obtenir une équation cartésienne de la droite (AB) et à mettre en évidence le lien existant entre les coefficients de cette équation cartésienne et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Qu'est-il pour la droite (AB) ?

2. Soit $M(x;y)$ un point de la droite (AB). Compléter les lignes suivantes :

$$\begin{aligned} M(x;y)\in(AB) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}\dots\dots\\ \dots\dots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\dots\dots\\ \dots\dots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix} \text{ sont } \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\Leftrightarrow XY'-X'Y=0 \\ &\Leftrightarrow \dots\dots\dots\dots\dots\dots-\dots\dots\dots\dots\dots\dots=0 \\ &\Leftrightarrow \dots\dots x+\dots\dots y+\dots\dots=0 \end{aligned}$$

3. Quel est le lien entre les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et les coefficients a et b de cette équation cartésienne $ax+by+c=0$?

4. Application :

   (a) Déterminer les coefficients a et b d'une équation cartésienne $ax+by+c=0$ de la droite (CD) sachant que $C(-1;4)$ et $D(2;-3)$.

   (b) En utilisant l'un de ces deux points, déterminer la valeur de c correspondante.

On généralise pour obtenir la propriété suivante, qu'on admettra :

Propriété 9.2. *La droite $\mathscr{D}$ dont une équation cartésienne est $ax+by+c=0$ admet comme vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.*

9.2.4 Parallélisme et vecteurs directeurs

Des droites parallèles sont des droites qui ont la même direction et donc leurs vecteurs directeurs aussi, c'est-à-dire qu'ils sont colinéaires. On peut aussi dire que tout vecteur directeur de l'une est aussi un vecteur directeur de l'autre.
On en tire trois propriétés :

Propriété 9.3. *Soit $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites du plan et $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ des vecteurs directeurs respectifs de ces deux droites.*

$$\mathscr{D}\parallel\mathscr{D}' \Leftrightarrow \vec{v} \text{ et } \vec{v'} \text{ colinéaires}$$

Preuve. Par définition du parallélisme et de la colinéarité. ◇

Propriété 9.4. *Soit $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites du plan d'équations respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$.*

$$\mathscr{D}\parallel\mathscr{D}' \Leftrightarrow ab'-a'b=0$$

Preuve. $\mathscr{D} : ax+by+c=0$ et $\mathscr{D}' : a'x+b'y+c'=0$ ont pour vecteurs directeurs respectifs $\vec{v}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et $\vec{v'}\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$.
$\mathscr{D} \parallel \mathscr{D}' \Leftrightarrow \vec{v}$ et $\vec{v'}$ colinéaires $\Leftrightarrow XY'-X'Y=0 \Leftrightarrow -b\times a'-(-b')\times a=0 \Leftrightarrow -a'b+ab'=0 \Leftrightarrow ab'-a'b=0$. ♢

Propriété 9.5. *Soit $\mathscr{D}$ une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ et une droite $\mathscr{D}'$.*

$$\mathscr{D} \parallel \mathscr{D}' \Leftrightarrow \mathscr{D}' \text{ admet au moins une équation de la forme } ax+by+c'=0$$

Preuve. $\mathscr{D} : ax+by+c=0$ admet pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.
$\mathscr{D} \parallel \mathscr{D}' \Leftrightarrow \vec{v}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}' \Leftrightarrow \mathscr{D}' : ax+by+c'=0$. ♢

9.3 Équations réduites

9.3.1 Équation réduite d'une droite

Propriété 9.6. *Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $x=k$.*
Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une unique équation de la forme $y=mx+p$ appellée équation réduite *de $\mathscr{D}$.*

Preuve. Un vecteur directeur d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées a ses vecteurs directeurs de la forme $\vec{v}=\beta\vec{j}=\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}$, avec $\beta\neq 0$, donc admet une équation de la forme $\beta x+0y+c=0 \Leftrightarrow x=-\frac{c}{\beta}$ car $\beta\neq 0$. En posant $k=-\frac{c}{\beta}$ on obtient le résultat.
Un vecteur directeur d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées a ses vecteurs directeurs de la forme $\vec{v}=\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, avec $\alpha\neq 0$, donc admet une équation de la forme $\beta x-\alpha y+c=0 \Leftrightarrow \alpha y=\beta x+c \Leftrightarrow y=\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{c}{\alpha}$ car $\alpha\neq 0$. En posant $m=\frac{\beta}{\alpha}$ et $p=\frac{c}{\alpha}$ on obtient le résultat.
On admettra que cette équation est unique. ♢

9.3.2 Coefficient directeur et ordonnée à l'origine

Propriété 9.7. *Soit $\mathscr{D}$ d'équation réduite $y=mx+p$. Alors $\vec{v}\,(1;m)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.*
Le point $(0;p)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$.

Preuve. $\mathscr{D} : y=mx+p \Leftrightarrow mx-y+p=0 \Leftrightarrow ax+by+c=0$ avec $a=m$, $b=-1$ et $c=p$. Donc $\vec{v}\,(-b;a)=(1;m)$ est un vecteur dircteur de $\mathscr{D}$.

Si $x=0$ alors $y=m\times 0+p=p$ donc $(0;p)\in\mathscr{D}$. ♢

Définition 9.2. Soit $\mathscr{D}$ admettant une équation de la forme $y=mx+p$.
Alors m est appelé *coefficient directeur* de la droite et p est appelé *ordonnée à l'origine* de $\mathscr{D}$.

9.3.3 Coefficient directeur et parallélisme

Propriété 9.8. *Soit* $\mathscr{D} : y = mx + p$ *et* $\mathscr{D}' : y = m'x + p'$.

$$\mathscr{D} \parallel \mathscr{D}' \Leftrightarrow m = m'$$

Preuve. $\mathscr{D} : y = mx + p$ et $\mathscr{D}' : y = m'x + p'$ ont pour vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{v}(1;m) = (X;Y)$ et $\overrightarrow{v'}(1;m') = (X';Y')$.
$\mathscr{D} \parallel \mathscr{D}' \Leftrightarrow \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ colinéraires $\Leftrightarrow XY' - X'Y = 0 \Leftrightarrow 1 \times m' - 1 \times m = 0 \Leftrightarrow m' - m = 0 \Leftrightarrow m = m'$. ◇

9.4 Exercices

9.4.1 Équations cartésiennes de droites

EXERCICE 9.1.
On considère les points $A(-1;2)$, $B(1;3)$ et $C(195;100)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
   À l'aide de cette équation déterminer si A, B et C sont alignés.
2. La droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$ est-elle parallèle à (AB) ?
3. Le point C appartient-il à la droite Δ passant par le point $J(0;1)$ et de coefficient directeur $\frac{3}{5}$?

EXERCICE 9.2.
On donne $A(1;2)$, $B(2;1)$ et $C(-3;0)$. Déterminer les équations des droites suivantes :

1. $\mathscr{D} = (BC)$;
2. $\mathscr{D}'$ passant par C et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$;
3. Δ parallèle à $\mathscr{D}$ passant par A ;
4. Δ' parallèle à $\mathscr{D}'$ passant par B.

EXERCICE 9.3.
Déterminer si les droites suivantes sont parallèles et, si elles ne le sont pas, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

- $\mathscr{D}_1 : x + 2y - 1 = 0$
- $\mathscr{D}_2 : y = -\frac{x}{2} + 3$
- $\mathscr{D}_3 : -2x + 3y + 5 = 0$

EXERCICE 9.4.
Dans un même repère tracer les droites suivantes :

- $\mathscr{D}_1 : 2x + 3y = 6$;
- $\mathscr{D}_2 : -3x + y = 9$;
- $\mathscr{D}_3 : 4x - y = 8$;
- $\mathscr{D}_4 : 2x - 3y = 9$;
- $\mathscr{D}_5 : 0x + 3y = 6$;
- $\mathscr{D}_6 : 2x + 0y = 2$;

9.4.2 Équations réduites de droite

EXERCICE 9.5.
La droite $\mathscr{D}$ est d'équation réduite $y = -3x + 0,5$.
Déterminer si $A(150,5;-451)$ ou $B(-73,25;219,5)$ appartiennent à $\mathscr{D}$.

EXERCICE 9.6.
La droite $\mathscr{D}$ est d'équation réduite : $y = \frac{5}{2}x - 1$.

1. A est le point de $\mathscr{D}$ d'abscisse 12. Quelle est son ordonnée ?
2. B est le point de $\mathscr{D}$ d'ordonnée $-\frac{1}{2}$. Quelle est son abscisse ?

EXERCICE 9.7.
Dans un même repère, tracer les droites dont les équations sont les suivantes :

- $\mathscr{D}_1 : y = -\frac{1}{2}x + 5$;
- $\mathscr{D}_2 : y = 4x - 2$;
- $\mathscr{D}_3 : y = -3$;
- $\mathscr{D}_4 : y = \frac{3}{4}x - 4$;
- $\mathscr{D}_5 : x = 6$.

EXERCICE 9.8.
Dans un même repère, tracer les droites suivantes :

- $\mathscr{D}_1$ passant par $A(3;1)$ et de coefficient directeur -1 ;
- $\mathscr{D}_2$ passant par $B(-3;2)$ et de coefficient directeur $-\frac{1}{4}$;
- $\mathscr{D}_3$ passant par $C(1;0)$ et de coefficient directeur 3 ;
- $\mathscr{D}_4$ passant par $D(0;2)$ et de coefficient directeur $\frac{4}{3}$;
- $\mathscr{D}_5$ passant par $E(-2;2)$ et de coefficient directeur 0.

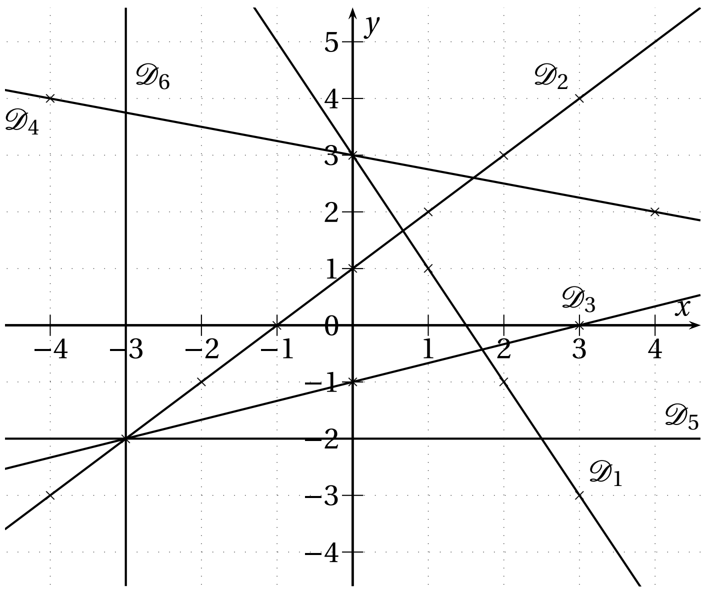
EXERCICE 9.9.
Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la droite (AB) :

1. $A(1;2)$ et $B(3;-1)$;
2. $A(4;4)$ et $B(-1;2)$;
3. $A(0;-1)$ et $B(2;3)$;
4. $A(-2;2)$ et $B(3;2)$;
5. $A(1;3)$ et $B(1;4)$.

EXERCICE 9.10.

1. Déterminer l'équation réduite de la droite $\mathscr{D}$ sachant que $A(2;1) \in \mathscr{D}$ et que $\mathscr{D}$ est parallèle à la droite $\mathscr{D}' : y = 3x - 1$.
2. (a) On donne $A(2;3)$, $B(-1;2)$, $C(4;1)$ et $D(-2;5)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?
   (b) Même question avec $A(1;2)$, $B(2;-4)$, $C(0;3)$ et $D(1;-3)$.
3. Déterminer l'ordonnée du point A sachant que :
   - $A \in \mathscr{D}$;
   - $\mathscr{D}$ parallèle à la droite (BC) où $B(2;1)$ et $C(-1;3)$;
   - l'abscisse de A vaut 8

EXERCICE 9.11.
Déterminer graphiquement les équations réduites des droites représentées sur le schéma suivant :



EXERCICE 9.12.
Déterminer graphiquement les équations réduites des droites représentées sur le schéma suivant :