Chapitre 4

Ensembles de nombres

Sommaire

4.1 Entiers

On l'a déjà vu lors du chapitre 1 mais rappelons ici les premiers ensembles de nombres observés cette année :

Définition. On appelle ensemble des *entiers naturels*, noté $\mathbb{N}$, l'ensemble des nombres pouvant s'écrire sous une des formes suivantes : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
On appelle ensemble *des entiers* ou ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$, l'ensemble des nombres pouvant s'écrire sous une des formes suivantes : $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

Si on ne précise pas « naturels » quand on parle d'entiers c'est qu'il s'agit d'entiers relatifs.

4.2 Décimaux

Définition 4.1. On appelle ensemble des *nombres décimaux*, noté $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres pouvant s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ où a est un entier et n un entier naturel.

Exercice 4.1.
Montrer que tout nombre ayant une écriture décimal finie est un décimal.

EXERCICE 4.2.

1. Montrer que tout nombre pouvant d'écrire sous la forme $\frac{k}{2^n}$ où k est un entier et n un entier naturel est un décimal.
2. Montrer que tout nombre pouvant d'écrire sous la forme $\frac{k}{5^n}$ où k est un entier et n un entier naturel est un décimal.
3. Montrer que tout nombre pouvant d'écrire sous la forme $\frac{k}{2^n \times 5^m}$ où k est un entier et n et m des entiers naturels est un décimal.

4.3 Rationnels

Définition 4.2. On appelle ensemble des *nombres rationnels*, noté $\mathbb{Q}$, l'ensemble des nombres pouvant s'écrire sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers, b étant différent de 0.

EXERCICE 4.3.
On va dans cet exercice prouver que $\frac{1}{3}$, qui est par définition un rationnel, n'est pas un décimal en faisant une *preuve par l'absurde*.

Supposons que $\frac{1}{3}$ est un décimal.

1. Comment peut-il s'écrire si c'est un décimal ?
2. Isoler alors 10^n.
3. D'après l'expression obtenue, quel nombre est un diviseur de 10^n ?
4. Quels sont les seuls diviseurs possibles de 10^n ?
5. Conclure.

Généralisons :
Soit un rationnel écrit sous forme de fraction irréductible $\frac{a}{b}$.
Quelle propriété pourrait énoncer en généralisant à partir des seuls diviseurs possibles de 10^n ?

EXERCICE 4.4.
On s'intéresse au nombre $\frac{22}{7}$.

1. Justifier que ce nombre n'est pas un décimal.
2. Effectuer à la main la division de 22 par 7 jusqu'à remarquer quelque chose.

C'était aussi le cas de $\frac{1}{3}$.
Généralisons :

Propriété. *Tout nombre rationnel admet une écriture décimale dont la partie décimale est, au bout d'un certain temps, ...*

On l'admettra.

EXERCICE 4.5.
Déterminer à la main l'écriture décimale périodique des nombres rationnels suivants : $\frac{15}{11}$ et $\frac{155}{198}$.

EXERCICE 4.6.
On donne l'écriture décimale infinie d'un nombre A : $A = 0{,}878787\ldots = 0{,}\overline{87}$.

1. Déterminer l'écriture décimale infinie du nombre $100 \times A$.
2. En déduire que $100 \times A - 87 = A$.
3. Écrire alors A sous forme de fraction.
4. À quel ensemble appartient A ?

EXERCICE 4.7.
On pose $D = 21{,}76\overline{51}$.

1. Donner l'écriture décimale infinie de $E = D \times 1\,000 - 2\,176$.
2. En déduire l'écriture fractionnaire irréductible de D.
3. En déduire l'écriture fractionnaire irréductible de E.

On admettra que c'est toujours le cas et que la réciproque de la propriété précédente est vraie :

Propriété. *Tout nombre ayant une écriture décimale dont la partie décimale est, au bout d'un certain temps .... est un nombre rationnel.*

On a finalement la propriété suivante :

Propriété 4.1. *Un nombre est rationnel si et seulement si son écriture décimale est, au bout d'un certain temps, périodique.*

EXERCICE 4.8.
Trouver l'écriture fractionnaire irréductible des nombres suivants $B = 0{,}\overline{317}$, $C = 0{,}\overline{1234}$.

EXERCICE 4.9.
Déterminer l'écriture fractionnaire irréductible de $A = 2{,}3\overline{4}$, $B = 56{,}4\overline{43}$ et $C = 101{,}45\overline{234}$.

4.4 Réels

Définition 4.3. Soit une droite munie d'une origine O et d'une graduation.
L'ensemble des abscisses de l'axe ainsi défini s'appelle l'ensemble des *nombres réels* et se note $\mathbb{R}$.
Un tel axe est appelé la *droite des réels.*

Définition 4.4. Les nombres qui appartient à $\mathbb{R}$ mais qui n'appartiennent pas à $\mathbb{Q}$ sont appelés des *nombres irrationnels.*

Ainsi $\sqrt{2}$ et π sont des irrationnels.
Compléter la propriété suivante :

Propriété 4.2. *L'écriture décimale d'un irrationnel n'est ni ...., ni ....*

Preuve. Sinon ce nombre serait un .... ou un ....
et donc pas un .... ♢

Propriété 4.3. *Soit $n \in \mathbb{N}$, alors le nombre $\sqrt{n}$ est soit un entier dans le cas où n est un carré parfait, soit un irrationnel.*

On l'admettra dans le cas général mais va le prouver dans le cas de $\sqrt{2}$.

EXERCICE 4.10.
On va dans cet exercice prouver que $\sqrt{2}$ est un irrationnel en faisant une *preuve par l'absurde*.

Supposons que $\sqrt{2}$ n'est pas un irrationnel.

1. (a) Que peut-on dire alors de $\sqrt{2}$?
   (b) On a vu dans le chapitre 1 que toute fraction admettait une forme irréductible $\frac{a}{b}$. Que cela signifie-t-il pour a et b ?
2. On suppose donc qu'il existe a et b des entiers n'ayant aucun diviseur commun tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.
   (a) Mettre l'équation précedente au carré et isoler a^2.
   (b) Que peut-on dire de la parité de a^2 ?
   (c) Que peut-on en déduire pour la parité de a ?
   (d) Si a est un nombre pair, montrer que a^2 est un multiple de 4.
   (e) Que peut-on en déduire pour b^2 et donc pour b ?
3. (a) Mettre en évidence une contradiction.
   (b) Conclure.

4.5 Inclusion des ensembles

Propriété 4.4. *On a les inclusions suivantes :*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Remarques.

- Lorsque A et B sont des ensembles, $A \subset B$ signifie « que A est inclus dans B » c'est-à-dire que tous les éléments de A sont aussi des éléments de B ; il peut y avoir des éléments de B qui ne sont pas dans A ;
- Il ne faut pas confondre le symbole précédent avec le symbole $\in$ comme par exemple $2 \in \mathbb{N}$ qui signifie que 2 est un élément de l'ensemble $\mathbb{N}$. Autre exemple : le segment $[AB]$ est un ensemble de points, tout comme la droite (AB). On peut écrire que $A \in [AB]$ et que $B \in (AB)$ mais on écrira que $[AB] \subset (AB)$.

Exemples 4.1.

- $2 \in \mathbb{N}$ et $2 \in \mathbb{Z}$, par définition, $2 = \frac{20}{10}$ donc c'est un décimal et aussi un quotient donc un rationnel et la droite des réels contient un point d'abscisse 2 donc c'est aussi un nombre réel ;
- $-2 \notin \mathbb{N}$ mais il appartient à tous les autres ensembles ;
- $2{,}5 \notin \mathbb{N}$ et $2{,}5 \notin \mathbb{Z}$ mais $2{,}5 = \frac{25}{10}$ donc il appartient à $\mathbb{D}$, à $\mathbb{Q}$ et aussi à $\mathbb{R}$;
- $\frac{1}{3}$ n'est ni un entier et ni un décimal. C'est par contre un rationnel et un réel.
- Enfin des nombres comme $\sqrt{2}$ ou π ne peuvent pas s'écrire sous la forme de quotient et ne sont donc pas des rationnels (et encore moins des entiers ou des décimaux) mais sont bien des abscisses de points sur la droite des réels.

4.6 Intervalles, inégalités, valeur absolue

4.6.1 Intervalles

Définition 4.5. Pour tous réels a et b tels que $a < b$, on notera

notation		ensemble
$[a; b]$		$a \leqslant x \leqslant b$
$]a; b[$		$a \leqslant x \leqslant b$
$[a; b[$		$a \leqslant x < b$
$]a; b]$	l'ensemble des réels x tels que	$a < x \leqslant b$
$]-\infty; a]$		$x \leqslant a$
$]-\infty; a[$		$x < a$
$[a; +\infty[$		$a \leqslant x$
$]a; +\infty[$		$a < x$

Définition 4.6. On appelle :

Intersection : des intervalles I et J, notée $I \cap J$, l'ensemble des nombres qui appartiennent à I **et** à J

Réunion : des intervalles I et J, notée $I \cup J$, l'ensemble des nombres qui appartiennent à I **ou** à J, c'est-à-dire à au moins l'un des deux.

4.6.2 Inégalités

Propriété 4.5. *Soit a, b et c des nombres réels et k un réel différent de 0. On a les règles suivantes :*
Si $a < b$:

- *alors $a + c < b + c$ et $a - c < b - c$*
- *et si $k > 0$ alors $a \times k < b \times k$ et $\frac{a}{k} < \frac{b}{k}$*
- *et si $k < 0$ alors $a \times k > b \times k$ et $\frac{a}{k} > \frac{b}{k}$*

Cela peut aussi se formuler de la manière suivante :

On ne change pas l'ordre d'une inégalité : si on additionne ou soustrait à cette inégalité un nombre ou quand on multiplie ou divise cette inégalité par un nombre strictement positif.

On change l'ordre d'une inégalité : si on multiplie ou divise cette inégalité par un nombre strictement négatif.

Propriété 4.6. *Soit a, b, c et d des réels tels que $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + c$.*

Cette propriété n'est pas vraie pour les soustractions, n'est pas toujours vraie pour les multiplications et n'est pas vraie pour les divisions.

4.6.3 Valeur absolue

Définition 4.7 (Valeur absolue)**.** On appelle *valeur absolue* d'un réel x le réel, noté $|x|$, tel que :

$$\begin{cases} \text{Si } x \geqslant 0 \text{ alors } |x| = x \\ \text{Si } x \leqslant 0 \text{ alors } |x| = -x \end{cases}$$

EXERCICE 4.11.
Déterminer la valeur absolue des nombres suivants : 2, −3, 0, $\sqrt{3}$, $-\pi$.

4.6.4 Valeur absolue et intervalles

Activité d'introduction

ACTIVITÉ 4.1.
On appelle *distance entre deux nombres réels a et b*, la distance entre les points A et B d'abscisses respectives a et b sur la droite réelle munie d'un repère $(O; \vec{\imath})$.

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer la distance entre les deux nombres réels :
   - 2 et 3
   - −1 et 3
   - 0 et 3
   - 3 et −1
   - −2 et −4
   - 0 et −3
2. Conjecturer le lien entre distance entre deux réels et valeur absolue.
   En se basant sur les deux dernières distances calculées dans la question précédente, donner une nouvelle définition de $|x|$.
3. On appelle *centre de l'intervalle* $[a; b]$ le nombre $\frac{a+b}{2}$ et *amplitude de l'intervalle* $[a; b]$ le nombre $b-a$.
   (a) Traduire « $x \in [2; 4]$ » en termes de distance entre des nombres.
   (b) Traduire les inégalités suivantes en intervalles :
   - $|x-1| \leqslant 2$
   - $|x+2| < 3$
   - $|x-1| \geqslant 4$
   - $|x+3| > 1$

Bilan et compléments

Définition 4.8 (Une autre définition de la valeur absolue)**.** Soit a et b deux réels. On appelle distance entre a et b le nombre $|a-b|$ et $|a| = |a-0|$ la distance du nombre a à 0.

On admettra que cette définition est équivalente à la précédente.

Définition 4.9. Soit a et b deux nombres tels que $a < b$.
On dira que l'intervalle $[a; b]$ a :

- pour *centre* le nombre $\frac{a+b}{2}$;
- pour *amplitude* le nombre $|a-b|$;
- pour *rayon* le nombre $\frac{|a-b|}{2}$.

Propriété 4.7. *Soit a et b deux nombres tels que a < b.*

$$x \in [a; b] \Leftrightarrow \left|x - \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}\right| \leqslant \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} \quad et \quad x \in]a; b[\Leftrightarrow \left|x - \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}\right| \ldots \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$$

4.7 Exercices

Les exercices suivants seront piochés dans le manuel.
Par exemple :

- 105, 106, 107 p 60
- 109, 110, 111 p 61
- 122, 123 p 62
- TP1 p 64
- 65, 66 p 80
- 77, 78, 86 p 81
- 91 p 82
- 100, 101, 102, 103, 104 p 83