

Chapitre 3

Proportions et évolutions

Sommaire

3.1 Proportions	21
3.1.1 Activité d'introduction	21
3.1.2 Bilan et compléments	21
3.2 Évolutions	22
3.2.1 Activité d'introduction	22
3.2.2 Bilan et compléments	23
3.3 Exercices	24
3.3.1 Proportions	24
3.3.2 Évolutions	27

3.1 Proportions

3.1.1 Activité d'introduction

ACTIVITÉ 3.1.

Il y a 16 garçons dans une classe de 26 élèves. Quel est la proportion des garçons dans cette classe?

3.1.2 Bilan et compléments

Définition 3.1. On a les définitions suivantes :

Population : Une *population* E est un ensemble faisant l'objet d'une étude statistique.

Sous-population : Un échantillon d'individus (ou partie ou sous-ensemble) d'une population E est une *sous-population* de E .

Élément : Un élément de la population est un *individu*.

Effectif : Le nombre d'individus de la population est l'*effectif* de la population.

Définition 3.2. Soit A une sous-population d'effectif n_A d'une population E d'effectif n_E . La proportion p_A (ou fréquence) de A dans E est le quotient défini par

$$p_A = \dots\dots$$

Exemple. Une classe comporte 18 filles et 12 garçons.

Les élèves de cette classe forment une population E d'effectif $n_E = \dots\dots$

La population F des filles de la classe est une sous-population de E d'effectif $n_F = \dots\dots$

La proportion de F dans E , c'est-à-dire la proportion des filles dans la classe, est $p_F = \dots\dots$

Remarques.

- Une proportion est un nombre réel compris entre ... et ... et n'a pas d'unité.
- Une proportion s'exprime souvent sous forme de pourcentage.
On écrit aussi bien $p = \frac{3}{5}$ ou $p = \dots\dots$ ou $p = \dots\dots$
- Si on connaît deux des trois nombres n_A , n_E et p_A , on peut calculer le troisième :

$$\text{Comme } p_A = \frac{n_A}{n_E} \quad \text{alors } n_A = \dots\dots \quad \text{ou encore } n_E = \dots\dots$$

Par exemple, si l'on veut calculer 3 % de 240 :

On a $n_E = \dots\dots$ $p_A = \dots\dots$ Donc $n_A = \dots\dots$

3.2 Évolutions

3.2.1 Activité d'introduction

ACTIVITÉ 3.2.

Au 1^{er} janvier 2 000, trois villes ont une population de 25 000 habitants.

1. Ville 1

- La population de la première ville augmente de 6 % en 2 000, en 2 001 et en 2 002.
En déduire sa population au 1^{er} janvier 2 003.
- Par quel nombre la population a-t-elle été multipliée :
 - entre le 1^{er} janvier 2 000 et le 1^{er} janvier 2 001 ?
 - entre le 1^{er} janvier 2 001 et le 1^{er} janvier 2 002 ?
 - entre le 1^{er} janvier 2 002 et le 1^{er} janvier 2 003 ?

Ce nombre s'appelle le *coefficient multiplicateur* correspondant à une augmentation de 6 %.

- Par quel nombre la population a-t-elle été multipliée entre le 1^{er} janvier 2 000 et le 1^{er} janvier 2 003 ?
À quel pourcentage d'augmentation cela correspond-il ?

2. Ville 2

Le 31 décembre 2 000, la deuxième ville a une population de 26 400 habitants.

Calculer le coefficient multiplicateur correspondant et en déduire le pourcentage d'augmentation.

3. Ville 3

La population de la troisième ville diminue de 6 % durant l'année 2 000.

- Calculer sa population à la fin 2 000, puis le coefficient multiplicateur correspondant.
- Si la population augmente de 6 % l'année suivante, calculer sa population à la fin 2 001. En déduire le pourcentage global d'évolution sur les deux années de début 2 000 à fin 2 001.

3.2.2 Bilan et compléments

On veillera à faire la différence entre le taux d'évolution et l'évolution en pourcentage. Ainsi une quantité qui augmente de 10 % a un taux d'évolution de +10 et un pourcentage d'évolution de +10 % = +0,10

Définition 3.3. Dire qu'une quantité Q évolue de t %, où t est un réel quelconque, signifie que Q est multiplié par $k = \left(1 + \frac{t}{100}\right)$ qui est appelé *coefficient multiplicateur* correspondant à une évolution de t %.

Remarques.

- Cette évolution est une augmentation si t est positif et une diminution si t est négatif.
- Lorsque le pourcentage est exprimé sous forme décimale, par exemple +0,10 pour une hausse de +10 %, la formule devient $k = 1 + t$.

Propriété 3.1. Le pourcentage d'évolution t d'une grandeur passant de la valeur initiale $V_I \neq 0$ à la valeur finale V_F est donné par : $t = \frac{V_F - V_I}{V_I}$.

Le coefficient multiplicateur k d'une grandeur passant de la valeur initiale $V_I \neq 0$ à la valeur finale V_F est donné par : $k = \frac{V_F}{V_I}$.

On a de plus $t = k - 1$.

Remarque. Le pourcentage t ainsi obtenu est sous forme décimale.

Preuve.

- $V_F = V_I \times (1 + t) \Leftrightarrow V_F = V_I + V_I \times t \Leftrightarrow V_F - V_I = V_I \times t \Leftrightarrow \frac{V_F - V_I}{V_I} = t \Leftrightarrow t = \frac{V_F - V_I}{V_I}$.
- On a vu que $V_F = V_I \times k$ donc $k = \frac{V_F}{V_I}$.
- Par définition $k = 1 + t \Leftrightarrow k - 1 = t \Leftrightarrow t = k - 1$.

◇

Évolutions successives

Définitions 3.4. Soit t et t' deux taux d'évolution.

Lorsqu'on applique à une quantité Q une évolution de t % pour obtenir une quantité Q' et qu'on applique à la quantité Q' une évolution de t' % pour obtenir une quantité Q'' , on dit que Q a subi deux évolutions *successives* de t % et de t' %.

Le taux d'évolution permettant de passer de Q à Q'' est appelé *taux d'évolution globale*.

Évolutions réciproques

Définition 3.5. Soit t et t' deux taux d'évolution successifs. Si le taux d'évolution globale est nul alors on dit que t et t' sont des *évolutions réciproques*.

3.3 Exercices

3.3.1 Proportions

EXERCICE 3.1.

Les questions sont indépendantes.

- 35,89 millions de foyers fiscaux ont été recensés en France en septembre 2013. Sur ce total, 18,94 millions d'entre eux étaient imposables au titre de leur revenu de 2012. Calculer la proportion des foyers imposables en septembre 2013. Traduire le résultat avec un pourcentage arrondi à 0,01 près.
- Dans une grande entreprise, les $\frac{5}{6}$ des 720 employés sont des commerciaux. Combien y a-t-il de commerciaux dans l'entreprise?
- Dans une administration, 23 employés sont des personnels administratifs, ce qui représente 18 % des employés. Combien y a-t-il d'employés dans cette administration?

EXERCICE 3.2.

Les questions sont indépendantes.

- Un lycéen a travaillé pendant les vacances. Sur sa feuille de paye est inscrit :
 - Salaire brut : 1 200,00 €
 - Retenue Sécurité Sociale : 151,20 €
 Quel pourcentage du salaire brut, la retenue représente-t-elle?
- En 2 004, la population active française comptait 27 455 000 individus, dont 12 680 000 femmes. Quel pourcentage de la population active représentaient les femmes?
- 28 % de la surface du territoire français, ce qui représente environ 154 000 km², est constitué de terrain boisé (forêts, etc.). Quelle est la surface totale du territoire français?
- Lors de l'achat d'un article coûtant 1 625 €, je dois verser un acompte de 130 €. Quel pourcentage de la somme totale cet acompte représente-t-il?
- Lors de l'achat d'un autre article, je dois verser un acompte de 15 %, et il me restera alors à déboursier 1 700 €. Quel est le prix de cet article?
- (a) Dans la commune de Vachelle, sur 1 742 votants, 42 % ont choisi le candidat DESIRE. Combien cela fait-il de voix?

 (b) M. DESIRE a obtenu 428 voix sur 1 312 votants à Port-Blanc et 323 voix sur 918 votants à Saint-André. Où a-t-il fait le meilleur score en pourcentage?

EXERCICE 3.3.

Le tableau ci-dessous donne la répartition des filles dans trois classes de Première ES d'un Lycée.

Classe	A	B	C
Filles	10	8	9
Élèves	40	20	18

Déterminer la proportion de filles dans chacune des classes. Que constate-t-on?