Chapitre 2

Vecteurs

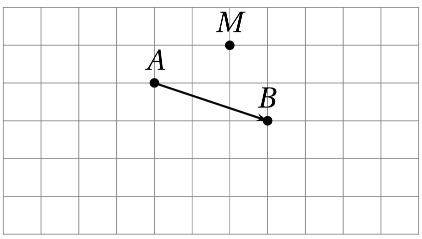
Sommaire

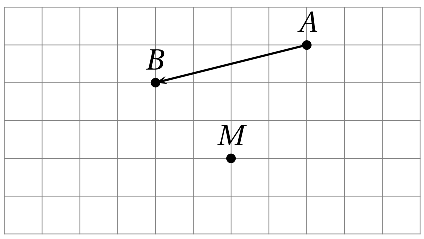
2.1 Translation

2.1.1 Définition et activités d'introduction

Définition. Soient A et B deux points du plan.
On appelle *translation qui transforme A en B* la transformation qui à tout point M du plan associe l'unique point M' tel que $[AM']$ et $[BM]$ ont même milieu.

ACTIVITÉ **2.1** (Image d'un point par une translation)**.**
Sur chacune des figures ci-dessous, construire M', image de M par la translation qui transforme A en B.



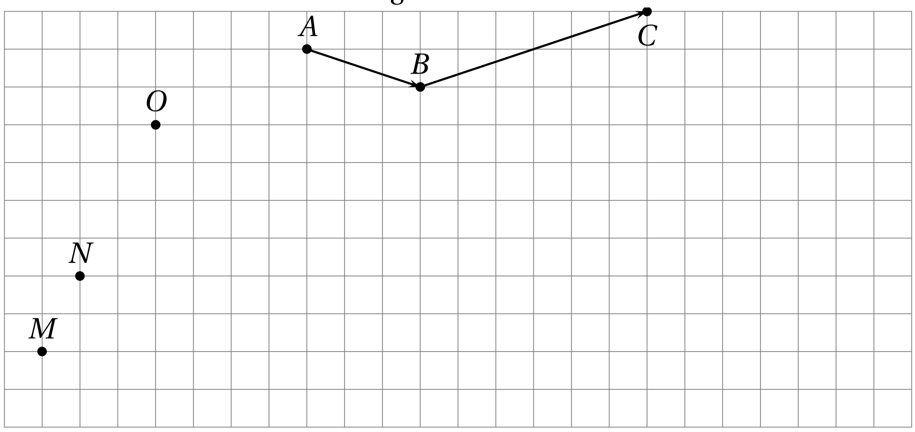


Dans chaque construction, on voit apparaître une figure familière. Laquelle ?
Démontrer que c'est toujours le cas.

ACTIVITÉ 2.2 (Quelques propriétés de la translation)**.**
Toutes les questions de cette activité se rapportent à la figure 2.1 de la présente page.

1. Construire M', N' et O', images respectives de M, N et O par la translation qui transforme A en B.

FIGURE 2.1: Figure des activités 2.2 et 2.3



2. Construire P, image de O la translation qui transforme M en M'. Que constate-t-on ?
3. Les points M, N et O sont alignés. Cela semble-t-il être aussi le cas des points M', N' et O' ? Démontrons-le.
   (a) D'après la propriété obtenue dans le cas général, quels sont les parallélogrammes issus de la translation ?
   (b) Quelles sont alors les droites parallèles à (AB) ? Quelles sont les longueurs égales à AB ?
   (c) Que peut-on en déduire pour les quadrilatères $MNN'M'$, $NOO'N'$?
   (d) Que peut-on en déduire pour les droites (MN) et $(M'N')$? Et pour les droites (ON) et $(O'N')$?
   (e) Conclure.
4. Construire l'image d'un autre point situé sur le segment $[OM]$. Sur quel segment est située cette image ?
   Conjecturer quelle est l'image du segment $[OM]$ et celle de la droite (OM).
5. Que peut-on dire des longueurs MN et $M'N'$? Et des longueurs ON et $O'N'$? *Justifier, en utilisant éventuellement un résultat de la démonstration de la question 3.*

ACTIVITÉ 2.3 (Enchaînement de deux translations)**.**
Toutes les questions de cette activité se rapportent à la figure 2.1 de la présente page.

1. Construire M'', N'' et O'', images respectives de M', N' et O' par la translation qui transforme B en C.
2. Quelle est la nature du quadrilatère $ONN''O''$? *Justifier.*
3. Quelle est la transformation qui permet de passer des points M, N et O aux points M'', N'' et O'' ?

2.1.2 Bilan et compléments

Définition 2.1 (Rappel)**.** Soient A et B deux points du plan.
On appelle *translation qui transforme A en B* la transformation qui à tout point M du plan associe l'unique point M' tel que $[AM']$ et $[BM]$ ont même milieu.

Propriété 2.1. *Soient A et B deux points du plan et M ayant pour image M' par la translation qui transforme A en B.*
Alors $ABM'M$ est un ....

Cela a été démontré dans l'activité.

Propriété 2.2. *Soient A et B deux points du plan et M, N et O ayant pour images respectives M', N' et O' par la translation qui transforme A en B. Alors :*

- *Si M, N et O sont alignés alors ....*
- *L'image du segment $[MN]$ est .... de même ....*
- *Si O est le milieu du segment $[MN]$ alors ....*

On dit que la translation conserve ...., ... *et* ....

Le premier et le deuxième points ont été démontrés dans l'activité. Le troisième point est une conséquence triviale des deux premiers.

Propriété 2.3 (admise)**.** *L'image d'une droite par une translation est* ....
L'image d'un cercle par une translation est ....

Enfin, comme on l'a vu en activité :

Propriété 2.4. *L'enchaînement (on parle de la* composition*) de deux translations est une translation.*

2.2 Vecteurs

2.2.1 Définition – Égalité

Définition 2.2. On appelle note et on appelle *vecteur $\overrightarrow{AB}$* le bipoint associé à la translation qui transforme A en B.
A est appelé *origine du vecteur*, B est appelé *extrémité du vecteur.*

Définition 2.3. Deux vecteurs sont dits *égaux* s'ils sont associés à une même translation.

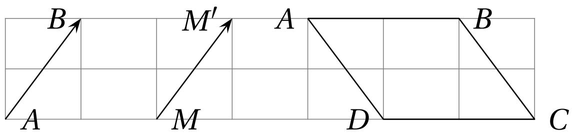
On a vu précédemment que

- d'une part, M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ si et seulement si $ABM'M$ parallélogramme (éventuellement aplati),
- d'autre part que les translations de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et de vecteur $\overrightarrow{MM'}$ étaient les mêmes donc que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$

Ce cas est général. Ainsi :

Propriété 2.5.

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'} \Leftrightarrow$ ....
- $\overrightarrow{AB} = \ldots\ldots \Leftrightarrow ABCD$ *est un parallélogramme*



Remarque. Attention à l'ordre des lettres !

Ainsi, on peut aussi définir un vecteur de la manière suivante :

Définition 2.4. Un vecteur non nul est déterminé par :

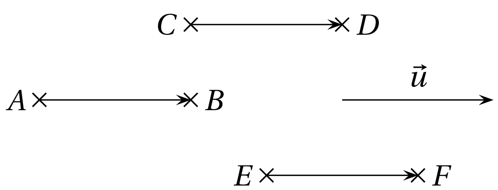
- sa *direction* ;
- son *sens* ;
- et sa longueur, appelée *norme du vecteur*.

Et on a alors la propriété :

Propriété 2.6. *Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont la même direction, le même sens et la même norme.*

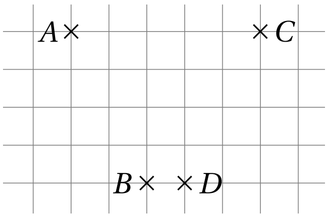
En effet, en appellant $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ces deux vecteurs, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC$ parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction, le même sens et la même norme.

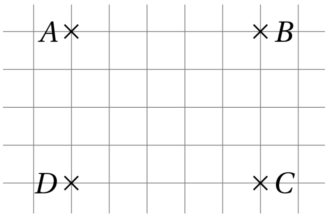
2.2.2 Notation $\vec{u}$

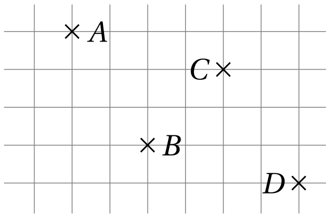


Sur le schéma ci-contre, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$.
On pose alors $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$.
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont appelés des *représentants* du vecteur $\vec{u}$.

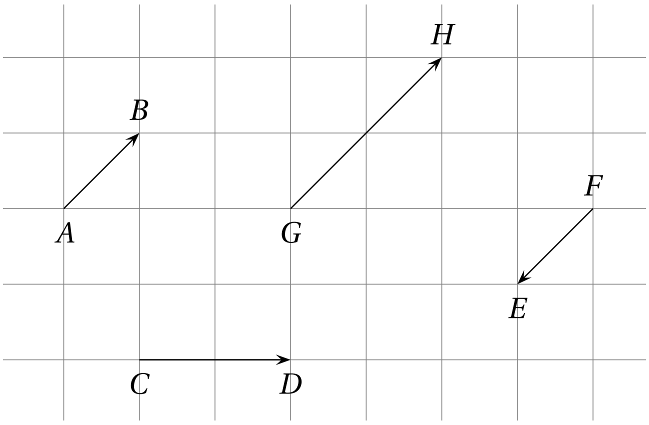
EXERCICE 2.1.
Sur chaque schéma de la figure ci-dessous, l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ est-elle vraie ?





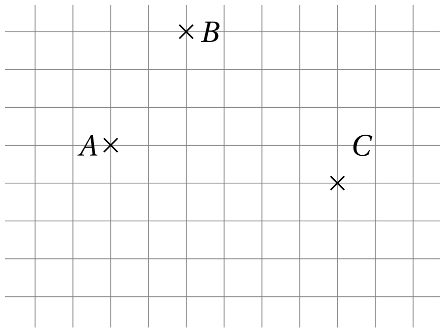


EXERCICE 2.2.
Sur la figure ci-dessous, expliquer, en utilisant les termes direction, sens ou norme, pourquoi le vecteur $\overrightarrow{AB}$ n'est égal à aucun des autres vecteurs représentés.



EXERCICE 2.3.
Sur la figure ci-contre :

1. Construire, à partir des points A, B et C, les points D, E et F tels que :
   $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BA}$
2. Quels parallélogrammes peut-on tracer avec ces six points ?
3. En utilisant ces six points, compléter :
   $\overrightarrow{BD} = \ldots\ldots = \ldots\ldots$ $\overrightarrow{BC} = \ldots\ldots$ $\overrightarrow{BF} = \ldots\ldots$
4. Quelles autres égalités de vecteurs peut-on déduire ?

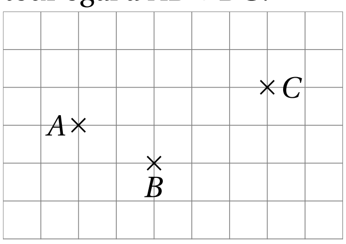


2.2.3 Somme de deux vecteurs – Relation de CHASLES

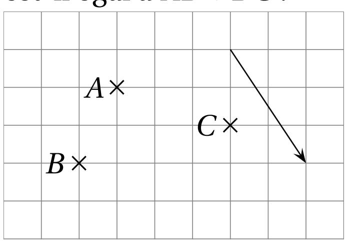
Définition 2.5. La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultat de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$.

EXERCICE 2.4.

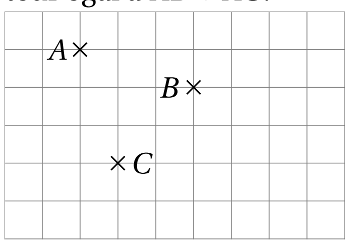
Construire ci-dessous un vecteur égal à $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.



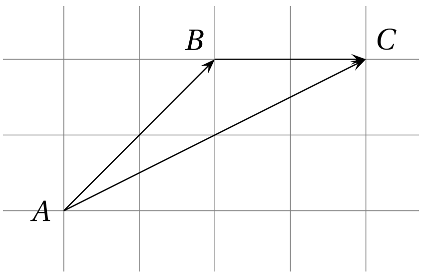
Le vecteur tracé ci-dessous est-il égal à $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$?

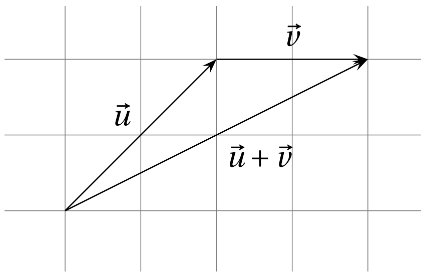


Construire ci-dessous un vecteur égal à $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

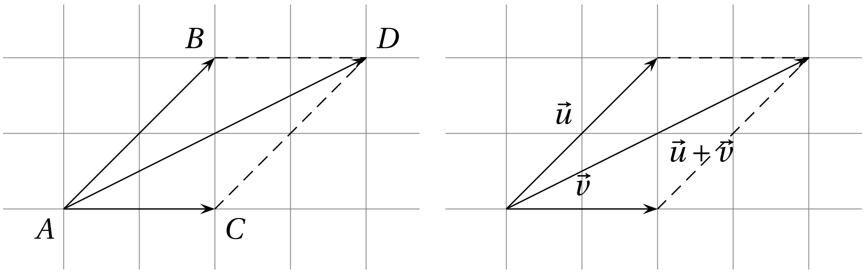


Propriété 2.7 (Relation de CHASLES)**.** *Pour tous points A, B et C, on a :* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$





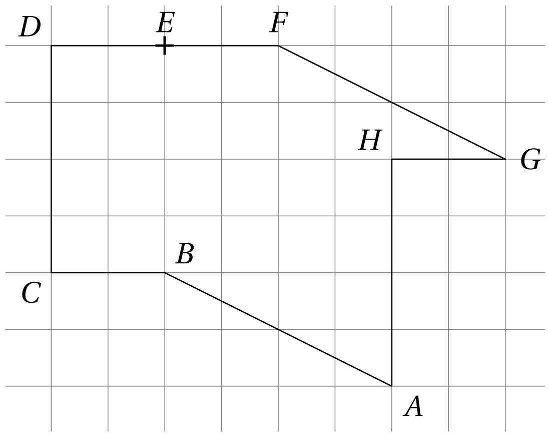
Propriété 2.8 (Règle du parallélogramme)**.** *Pour tous points A, B, C et D on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow ABDC$ parallélogramme.*



EXERCICE 2.5 (Relation de CHASLES)**.**
Compléter à l'aide de la relation de CHASLES :

- $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{B\ldots}$
- $\overrightarrow{XK} = \overrightarrow{XL} + \overrightarrow{\ldots K}$
- $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{\ldots A} + \overrightarrow{A\ldots}$
- $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{\ldots P} + \ldots\ldots$
- $\overrightarrow{\ldots E} = \overrightarrow{F\ldots} + \overrightarrow{G\ldots}$
- $\overrightarrow{H\ldots} = \ldots\ldots + \overrightarrow{IJ}$
- $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{R\ldots} + \overrightarrow{\ldots S}$
- $\ldots\ldots = \overrightarrow{JK} + \overrightarrow{\ldots M}$
- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE} = \ldots\ldots$
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\ldots C} + \overrightarrow{\ldots D} + \ldots\ldots$
- $\overrightarrow{\ldots Y} = \overrightarrow{XJ} + \ldots\ldots + \overrightarrow{R\ldots}$

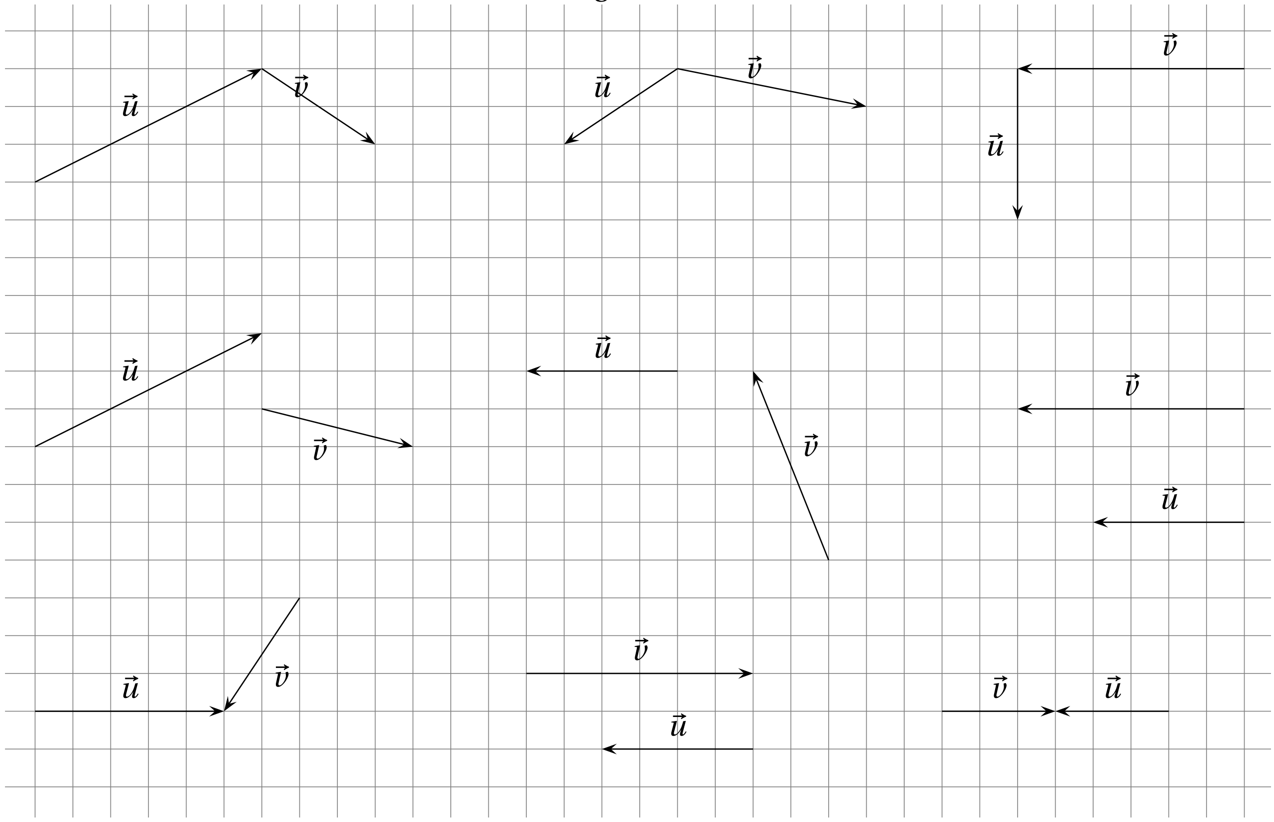
EXERCICE 2.6 (Vecteurs égaux, somme)**.**
On considère le motif représenté ci-contre.



1. Citer tous les vecteurs égaux :
   (a) au vecteur $\overrightarrow{AB}$ et représentés sur ce motif;
   (b) au vecteur $\overrightarrow{FE}$ et représentés sur ce motif.
2. En n'utilisant que les lettres représentées sur ce motif, déterminer un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE}$.
3. En n'utilisant que les lettres représentées sur ce motif, déterminer un vecteur égal aux vecteurs suivants :
   (a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}$
   (b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$
   (c) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$
   (d) $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{GF}$
   (e) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FB}$

EXERCICE 2.7 (Sommes)**.**
Dans chacun des cas de la figure 2.2 page ci-contre, construire en couleur le vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. Que remarque-t-on dans le dernier cas ?

FIGURE 2.2: Figure de l'exercice 2.7



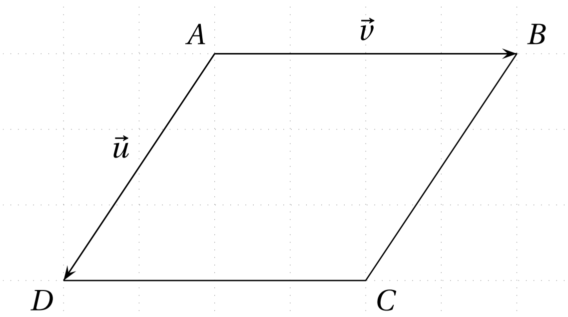
2.2.4 Vecteur nul – Vecteurs opposés

Définition 2.6. On appelle *vecteur nul*, noté $\vec{0}$, tout vecteur dont son origine et son extrémité sont confondues. La translation associée laisse tous les points invariants.
On appelle *vecteurs opposés* tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$. On peut noter $\vec{u}=-\vec{v}$ ou $\vec{v}=-\vec{u}$.

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$. On a donc :

Propriété 2.9. *Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés. On a donc $\overrightarrow{AB}=$ .... et $\overrightarrow{BA}=$ .....*

EXERCICE 2.8 (Différence).
Étant donné le parallélogramme $ABCD$, on pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$.



Écrire les vecteurs suivants à l'aide des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ *seulement* :

- $\overrightarrow{BA}=$ ....;
- $\overrightarrow{DA}=$ ....;
- $\overrightarrow{CB}=$ ....;
- $\overrightarrow{DC}=$ ....;
- $\overrightarrow{AC}=$ ....;
- $\overrightarrow{CD}=$ ....;
- $\overrightarrow{CA}=$ ....;
- $\overrightarrow{DB}=$ ....;
- $\overrightarrow{BD}=$ ....;
- $\overrightarrow{BC}=$ ....;

Enfin on a la propriété suivante :

Propriété 2.10. *Soient A et B deux points distincts et I un point du plan. Alors .... $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$*

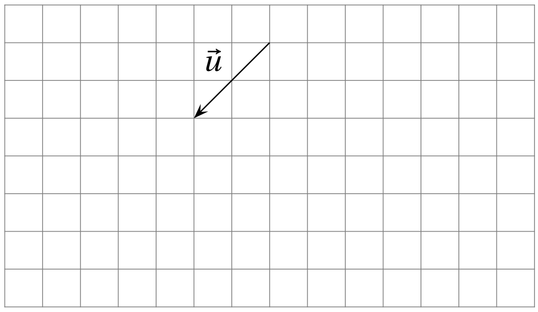
2.2.5 Produit d'un vecteur par un réel

ACTIVITÉ 2.4.
Sur la figure ci-contre :

1. Construire un représentant du vecteur $\vec{v} = \vec{u} + \vec{u}$ et $\vec{w} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$.

   Quelles propriétés géométriques partagent $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$? Quelles sont leurs différences ?

2. On notera $\vec{v} = 2\vec{u}$ et $\vec{w} = 3\vec{u}$.
   En vous inspirant du point précédent, conjecturer une représentation du vecteur $\vec{\imath} = -2\vec{u}$ et du vecteur $\vec{\jmath} = 1{,}5\vec{u}$.

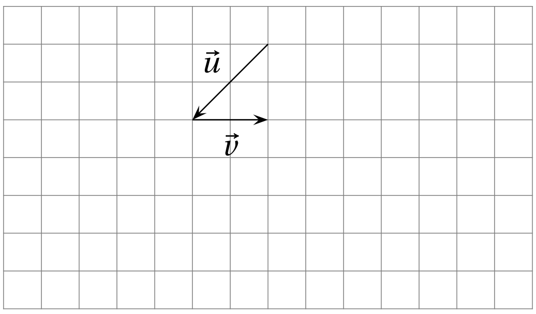


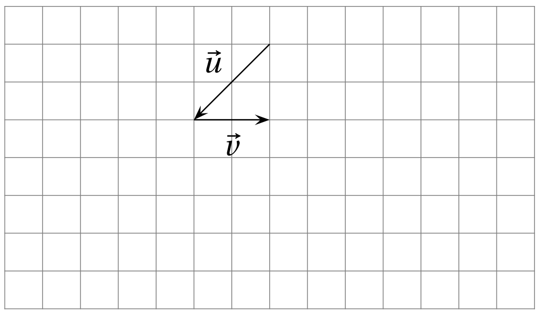
On a ainsi :

Définition 2.7. Soit k un réel non nul et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Alors le vecteur $k\vec{u}$ est un vecteur dont :

- la direction est ....
- le sens est ....
- la norme est ....

ACTIVITÉ 2.5.
On a reproduit ci-dessous deux fois la même figure.
Sur la figure 1, construire le vecteur $3(\vec{u} + 2\vec{v})$ et, sur la figure 2, construire le vecteur $3\vec{u} + 6\vec{v}$. Que remarque-t-on ?





On a ainsi :

Propriété 2.11. *Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous nombres réels k et k' : $k(\vec{u} + \vec{v}) =$ .... et $k\vec{u} + k'\vec{u} =$ ....*

On a de plus :

Propriété 2.12. *Pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout nombre k, $0\vec{u} =$ .... et $k\vec{0} =$ ....*

Propriété 2.13. *Soient A et B deux points distincts et I un point du plan, alors I milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} =$ .... $\overrightarrow{AB}$.*

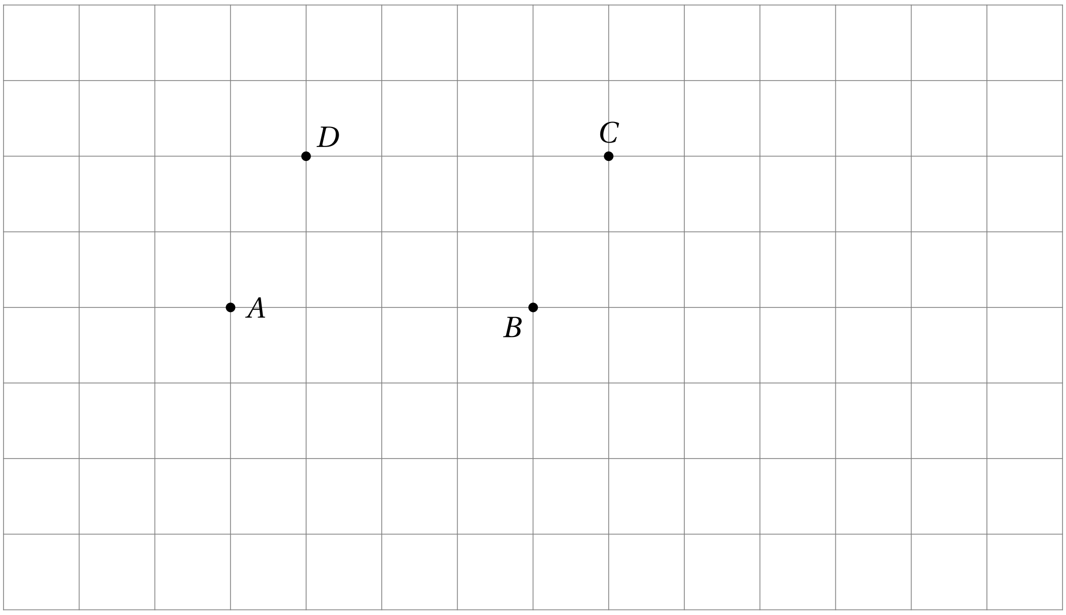
2.3 Colinéarité de deux vecteurs

Définition 2.8. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *colinéaires* s'il existe un nombre k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarque. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$ car $0\vec{u} = \vec{0}$.

ACTIVITÉ 2.6.
Sur la figure 2.3 de la présente page le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
On appelle E le symétrique de D par rapport à C et F le symétrique de D par rapport à A.

FIGURE 2.3: Figure de l'activité 2.6



1. Construire E et F.
2. Démontrer que les points F, B et E sont alignés.
3. Démontrer que les droites (AC) et (FE) sont parallèles.
4. Exprimer $\overrightarrow{FB}$ d'une part et $\overrightarrow{FE}$ d'autre part en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. Ces vecteurs sont-ils colinéaires ?
5. Exprimer $\overrightarrow{AC}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{FB}$ sont-ils colinéaires ?

Ce résultat est général. Plus précisément :

Propriété 2.14. *Soient A, B, C et D quatre points du plan.*

$$A,B,C \text{ alignés} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ colinéaires}$$

$$(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ colinéaires}$$

2.4 Exercices

EXERCICE 2.9.
$ABCD$ est un quadrilatère quelconque. I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

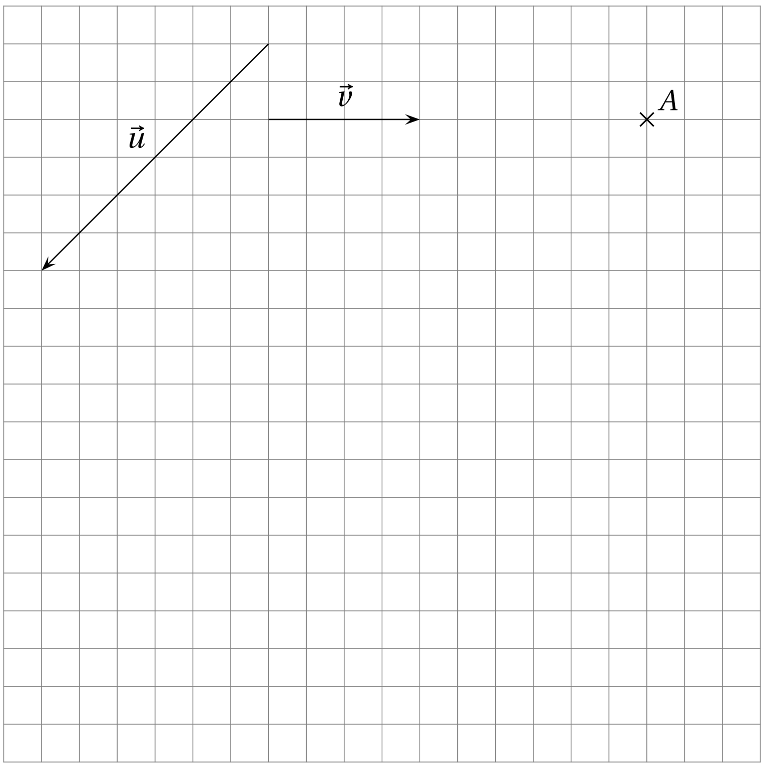
1. Montrer, à l'aide de la relation de CHASLES, que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer, à l'aide de la relation de CHASLES, que $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire la nature du quadrilatère $IJKL$.

EXERCICE 2.10.
Soit $ABCD$ un parallélogramme non aplati et les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = \frac{3}{5}\overrightarrow{DC}$.
Montrer que les segments $[EF]$ et $[BD]$ ont même milieu.

EXERCICE 2.11.
On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de directions différentes. A est un point donné (voir la figure 2.4 de la présente page).

1. Construire les points B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{u} - \vec{v}$.
2. Construire les points P, Q et R tels que $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\vec{u}$, $\overrightarrow{PQ} = -2\vec{v}$ et $\overrightarrow{QR} = -\frac{2}{3}\vec{u}$.
3. Que constate-t-on ? *Le justifier par un calcul sur les vecteurs.*

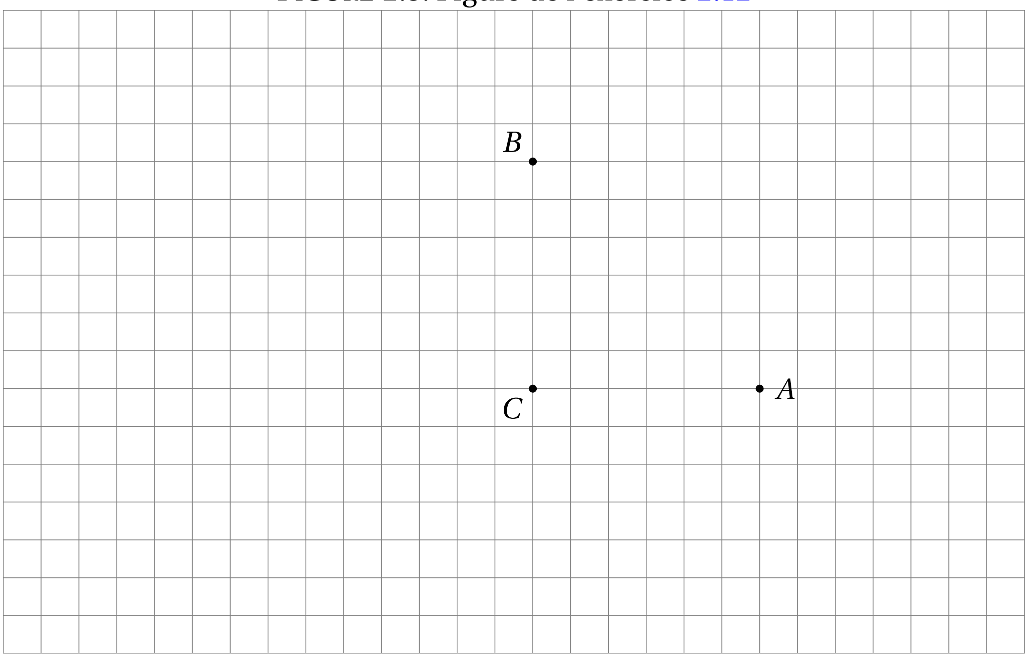
FIGURE 2.4: Figure de l'exercice 2.11



EXERCICE 2.12.
Soit un triangle rectangle ABC en C tel que $AC = 3$ cm et $BC = 3$ cm (voir la figure 2.5 de la présente page).

1. Placer les points I, J, K et L définis par les égalités suivantes :
   - $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;
   - $\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{BA}$;
   - $\overrightarrow{CK} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$;
   - $\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{13}{6}\overrightarrow{BA}$.
2. Tracer le quadrilatère $IJKL$. Que peut-on conjecturer sur sa nature ?
3. Nous allons démontrer la conjecture faite au point précédent.
   (a) À l'aide de la relation de CHASLES, exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ}$.
   En déduire $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
   (b) À l'aide de la relation de CHASLES, exprimer $\overrightarrow{LK}$ en fonction de $\overrightarrow{CK}$ et $\overrightarrow{CL}$.
   Toujours à l'aide de la relation de Chasles, travailler l'expression précédente jusqu'à obtenir $\overrightarrow{LK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
   (c) Conclure.

FIGURE 2.5: Figure de l'exercice 2.12



EXERCICE 2.13.
Écrire les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$ et $\vec{t}$ en fonction des seuls vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

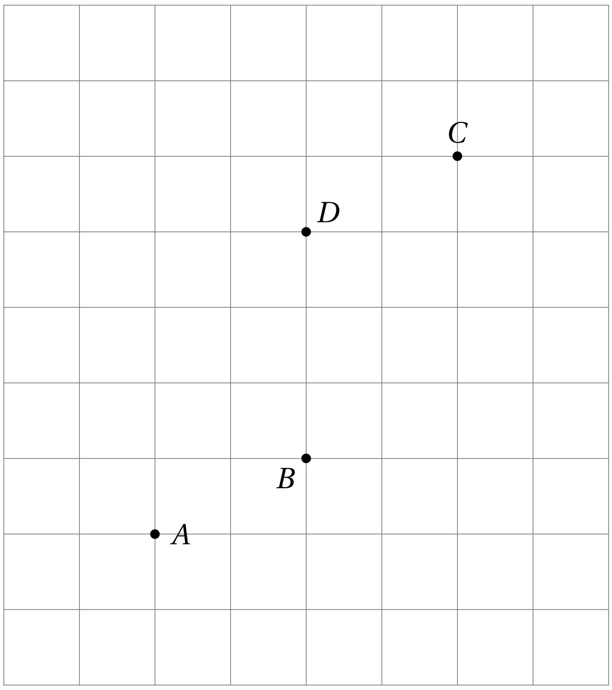
- $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.
- $\vec{w} = \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CA}$.
- $\vec{x} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.
- $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{BC}$.
- $\vec{t} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

EXERCICE 2.14.
Soit ABC un triangle non aplati (A, B et C non alignés) et les points D et E tels que :

$$\overrightarrow{AD} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} \qquad \overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

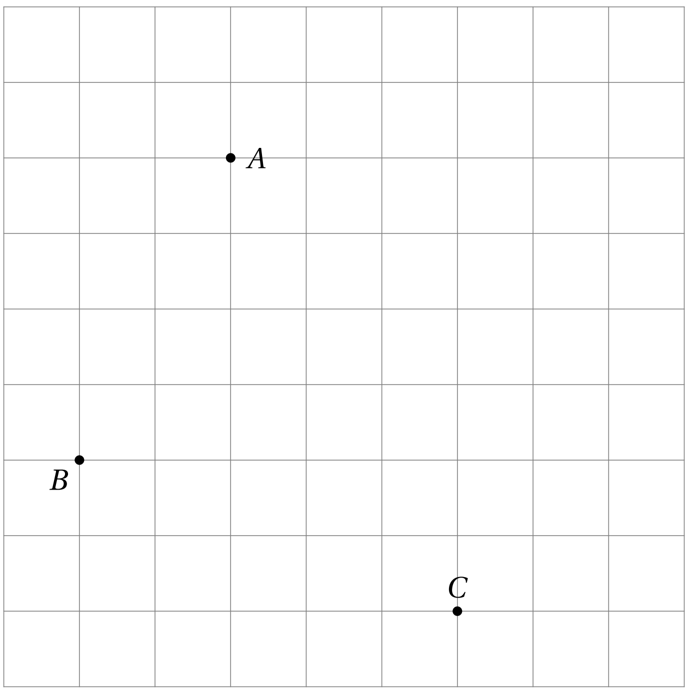
1. Faire un dessin. Conjecturer le lien entre les points B, D et E.
2. Nous allons démontrer la conjecture du point précédent.
   (a) Exprimer $\overrightarrow{ED}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CE}$ puis en fonction des seuls vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (b) Exprimer $\overrightarrow{BD}$ en fonction des seuls vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (c) Conclure.

EXERCICE 2.15.
Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un parallélogramme. A' est le symétrique de A par rapport à B et E est le milieu de $[BC]$.



1. Construire A' et E.
2. Exprimer $\overrightarrow{DE}$ d'une part et $\overrightarrow{DA'}$ d'autre part en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DA'}$?
4. Que peut-on en déduire pour les points A', E et D ?

EXERCICE 2.16.
Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle quelconque. On définit trois points D, E et F par : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. On appelle, par ailleurs, I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.



1. Construire D, E, F, I et J.
2. Montrer, si possible à l'aide des vecteurs, que les droites (DE) et (BF) sont parallèles.
3. Montrer, si possible à l'aide des vecteurs, que les points I, E et D sont alignés.
4. Montrer, si possible à l'aide des vecteurs, que les points B, F et J sont alignés.