Chapitre 1

Nombres entiers

Sommaire

Ce chapitre est essentiellement constitué de rappels du collège.
Sauf mention contraire, toutes les preuves seront faites en classe.

1.1 Activités

Activité 1.1 (Division euclidienne)**.**
Les questions sont indépendantes.

1. On donne l'égalité $177 = 15 \times 11 + 12$.
   Sans faire de division, déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 177 par 15, puis de la division euclidienne de 177 par 11.

2. Un enfant possède 100 billes qu'il souhaite répartir en petits tas de même taille, avec un éventuel reste de billes non réparties.

   (a) Parmi les écritures suivantes, laquelle permet d'obtenir la répartition optimale en 7 tas, c'est-à-dire celle pour laquelle il lui reste le moins de billes à répartir :
   - $100 = 7 \times 10 + 30$
   - $100 = 7 \times 14 + 2$
   - $100 = 7 \times 13 + 9$
   - $100 = 7 \times 15 - 5$

   (b) Répartir au mieux les 100 billes :
   - en 8 tas
   - en 9 tas
   - en 11 tas

   (c) À quelle condition,sur le nombre de tas, ne reste-t-il plus de billes à répartir ?

3. On donne la fonction suivante, écrite en langage *python* :

```
def deucl(a,b):
    q=0
    r=a
    while r>b:
        r=r-b
        q=q+1
    print(q,r)
```

Compléter un tableau semblable à celui donné ci-dessous, en ajoutant autant de lignes que nécessaire, en faisant fonctionner cette fonction « à la main » avec les valeurs de a et b ci-après et ce que renvoie la fonction dans chacun des cas.

- $a = 17$, $b = 5$
- $a = 35$, $b = 4$
- $a = 8$, $b = 10$
- $a = 20$, $b = 4$

Résultat du test $r > b$	Valeur de q	Valeur de r
…	…	…
…	…	…
…	…	…
…	…	…

ACTIVITÉ 1.2 (Critères de divisibilité).
Les questions sont indépendantes.

1. Rappeler un critère permettant d'affirmer qu'un entier est divisible par 3, sans avoir à poser la division euclidienne.
   En utilisant ce critère, préciser quels sont les multiples de 3 parmi les entiers suivants : 152, 457, 1 289, 6 051 et 8 541.

2. Rappeler des critères permettant d'affirmer qu'un entier est divisible par 2, par 5, par 9, par 10.

3. Parmi les nombres suivants : 12, 30, 27, 246, 325, 4 238, 6 139, indiquer ceux qui sont des multiples de 2, de 3, de 4, de 5, de 6, de 8, de 9 ou de 10.

4. Pour chaque entier N suivant, remplacer le point par un chiffre manquant de façon que N soit divisible par 15 :
   - $N = 63.$
   - $N = 7.5$
   - $N = .25$

ACTIVITÉ 1.3 (Crible dÉRATOSTHÈNE).
Rappeler une défintion d'un nombre premier.
Pour déterminer la liste de tous les nombres premiers inférieurs à un entier naturel N donné, ÉRATOSTHÈNE, au IIè siècle av. J.-C., a proposé l'algorithme suivant, traduit en langage moderne et appelé *crible d'*ÉRATOSTHÈNE :

1. Écrire la liste L de tous les nombres entiers de 2 à N.

2. Garder le premier entier de la liste L et éliminer tous ses multiples dans L.

3. Passer à l'entier suivant dans L, le garder et éliminer tous ses multiples dans L.

4. Poursuivre ainsi jusqu'à avoir atteint la fin de la liste L.

Appliquer cet algorithme avec $L = 100$.

1.2 Bilan et compléments

1.2.1 Ensembles d'entiers

Définition 1.1. On appelle l'ensemble des entiers naturels, noté $\mathbb{N}$, l'ensemble des nombres suivants : $\mathbb{N} = \{0{,}1{,}2,\dots\}$.
On appelle l'ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$, l'ensemble des nombres suivants : $\mathbb{Z} = \{\dots,-2,-1{,}0{,}1{,}2,\dots\}$.

Si on ne précise pas « naturels », on parle d'entiers relatifs.

1.2.2 Division euclidienne

Théorème 1.1. *Pour tous entiers naturels a et b tels que $b \neq 0$, il existe deux nombres entiers naturels uniques q et r tels que :* $\begin{cases} a = b \times q + r \\ 0 \leqslant r < b \end{cases}$
a est appelé dividende, *b le* diviseur, *q le* quotient *et r le* reste.

On l'admettra.
La notion de division euclidienne s'étend aux entiers (relatifs) de la même manière, à ceci près que, si b est négatif, alors on doit avoir $0 \leqslant r < -b$.

Exemple. En posant $a = 15$ et $b = -4$, la seule possibilité est $(q;r) = (-3;3)$.
En effet :
$$\begin{aligned} 15 &= -4 \times (-2) + 7 \\ &= -4 \times (-3) + 3 \\ &= -4 \times (-4) - 1 \\ &= -4 \times (-5) - 5 \end{aligned}$$
Comme on doit avoir $0 \leqslant r < -b = 4$, seule la deuxième possibilité est le résultat de la division euclidienne et donc $(q;r) = (-3;3)$.

1.2.3 Multiple, diviseur

Définition 1.2. Les deux définitions suivantes sont équivalentes.
Soit a et b deux entiers (relatifs).

- Si le reste de la division euclidienne de a par b est 0 alors on dit que b *divise* a
- S'il existe un entier (relatif) n tels que $a = b \times n$ alors on dit que b *divise* a

On dit dans ce cas que b est un *diviseur* de a ou que a est un *multiple* de b.

Propriété 1.2. *Soit a un entier. La somme de deux multiples de a est aussi un multiple de a.*

1.2.4 Parité

Définition 1.3. Les deux définitions suivantes sont équivalentes.

- Un nombre pair est un entier multiple de 2 ; un nombre impair est un entier qui n'est pas pair.
- Un nombre pair est un entier pouvant s'écrire sous la forme $2 \times k$; un nombre impair est un entier pouvant s'écrire sous la forme $2 \times k + 1$, où k est un entier.

Propriété 1.3. *Le carré d'un nombre pair est aussi un nombre pair ; celui d'un nombre impair est aussi un nombre impair.*

1.2.5 Nombres premiers

Définition 1.4. Un entier naturel p est dit *premier* s'il a exactement 2 diviseurs.

Comme 1 divise tout nombre et que p divise p, ces deux diviseurs sont 1 et lui-même.

Propriété 1.4. *Tout entier naturel supérieur à 2 peut s'écrire de façon unique, à l'ordre des facteurs près, comme le produit de facteurs premiers.*

On l'admettra.

Exemple. 360 est un entier naturel supérieur à 2.

$$\begin{aligned} 360 &= 2 \times 180 \\ &= 2 \times 2 \times 90 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 45 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 15 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \end{aligned}$$

Tous les facteurs sont premiers : ce produit est la décomposition (unique) en produits de facteurs premiers de 360.

Une telle décomposition peut se rédiger comme suit :

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{array}$$

Ainsi $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

1.2.6 Calculs

La décomposition en produit de facteurs premiers est particulièrement utile dans les calculs sur les nombres entiers impliquant des puissances, des racines carrées et des fractions. Nous les verrons dans les exercices à venir.

Puissances entières d'un nombre entier

Définition 1.5. Pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre a :

- $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (si $a \neq 0$)
- $a^0 = 1$

a^n, lu « a puissance n » ou « a exposant n » est appelé *puissance n-ième de a* et n est appelé l'*exposant*.

Propriété 1.5. *Pour tous nombres a et b et pour tous entiers n et m :*

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ *(si $a \neq 0$)*
- $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$

Racine carrée

Définition 1.6. La racine carrée d'un nombre a est, s'il existe, le nombre positif, noté $\sqrt{a}$, dont le carré est a : $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Propriété 1.6. *Seuls les nombres positifs ont une racine carrée.*

Propriété 1.7. *Pour tous nombres positifs a et b, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.*

Définition 1.7. Un carré parfait est le carré d'un nombre entier.

Propriété 1.8. *Pour tout nombre a :*

- *Si $a \geqslant 0$, $\sqrt{a^2} = a$*
- *Si $a < 0$, $\sqrt{a^2} = -a$*

Fractions irréductibles

Définition 1.8. Une fraction $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers ($b \neq 0$) est dite écrite sous forme irréductible si a et b n'ont aucun diviseur commun.

1.3 Exercices

Les exercices seront choisis dans le manuel.