Chapitre 12

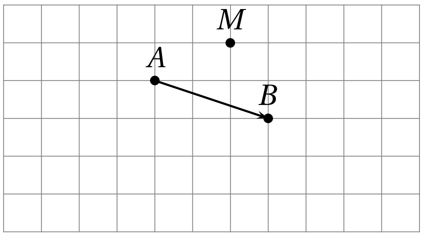
Vecteurs

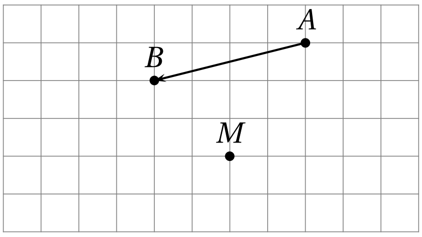
Sommaire

12.1 Translation

Définition. Soient A et B deux points du plan.
On appelle *translation qui transforme A en B* la transformation qui à tout point M du plan associe l'unique point M' tel que $[AM']$ et $[BM]$ ont même milieu.

ACTIVITÉ 12.1 (Image d'un point par une translation)**.**
Sur chacune des figures ci-dessous, construire M', image de M par la translation qui transforme A en B.



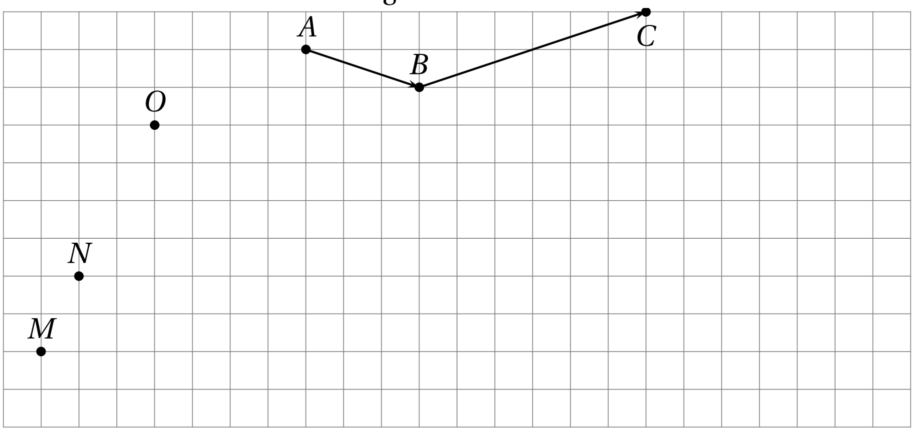


Dans chaque construction, on voit apparaître une figure familière. Laquelle ?
Démontrer que c'est toujours le cas.

ACTIVITÉ 12.2 (Quelques propriétés de la translation)**.**
Toutes les questions de cette activité se rapportent à la figure 12.1 de la présente page.

1. Construire M', N' et O', images respectives de M, N et O par la translation qui transforme A en B.

FIGURE 12.1: Figure des activités 12.2 et 12.3



2. Construire P, image de O la translation qui transforme M en M'. Que constate-t-on ?
3. Les points M, N et O sont alignés. Cela semble-t-il être aussi le cas des points M', N' et O' ? Démontrons-le.
   (a) D'après la propriété obtenue dans le cas général, quels sont les parallélogrammes issus de la translation ?
   (b) Quelles sont alors les droites parallèles à (AB) ? Quelles sont les longueurs égales à AB ?
   (c) Que peut-on en déduire pour les quadrilatères $MNN'M'$, $NOO'N'$?
   (d) Que peut-on en déduire pour les droites (MN) et $(M'N')$? Et pour les droites (ON) et $(O'N')$?
   (e) Conclure.
4. Construire l'image d'un autre point situé sur le segment $[OM]$. Sur quel segment est située cette image ?
   Conjecturer quelle est l'image du segment $[OM]$ et celle de la droite (OM).
5. Que peut-on dire des longueurs MN et $M'N'$? Et des longueurs ON et $O'N'$? *Justifier, en utilisant éventuellement un résultat de la démonstration de la question 3.*

ACTIVITÉ 12.3 (Enchaînement de deux translations)**.**
Toutes les questions de cette activité se rapportent à la figure 12.1 page précédente.

1. Construire M'', N'' et O'', images respectives de M', N' et O' par la translation qui transforme B en C.
2. Quelle est la nature du quadrilatère $ONN''O''$? *Justifier.*
3. Quelle est la transformation qui permet de passer des points M, N et O aux points M'', N'' et O'' ?

Bilan et compléments

Définition 12.1 (Rappel)**.** Soient A et B deux points du plan.
On appelle *translation qui transforme A en B* la transformation qui à tout point M du plan associe l'unique point M' tel que $[AM']$ et $[BM]$ ont même milieu.

Propriété 12.1. *Soient A et B deux points du plan et M ayant pour image M' par la translation qui transforme A en B.*
Alors $ABM'M$ est un ....

Cela a été démontré dans l'activité.

Propriété 12.2. *Soient A et B deux points du plan et M, N et O ayant pour images respectives M', N' et O' par la translation qui transforme A en B. Alors :*

- *Si M, N et O sont alignés alors* ....
- *L'image du segment $[MN]$ est* .... *de même* ....
- *Si O est le milieu du segment $[MN]$ alors* ....

On dit que la translation conserve .... , ... *et* ....

Le premier et le deuxième points ont été démontrés dans l'activité. Le troisième point est une conséquence triviale des deux premiers.

Propriété 12.3 (admise)**.** *L'image d'une droite par une translation est* ....
L'image d'un cercle par une translation est ....

Enfin, comme on l'a vu en activité :

Propriété 12.4. *L'enchaînement (on parle de la* composition*) de deux translations est une translation.*

12.2 Vecteurs

12.2.1 Définition – Égalité

Définition 12.2. On appelle note et on appelle *vecteur* $\overrightarrow{AB}$ le bipoint associé à la translation qui transforme A en B.
A est appelé *origine du vecteur*, B est appelé *extrémité du vecteur.*

Définition 12.3. Deux vecteurs sont dits *égaux* s'ils sont associés à une même translation.

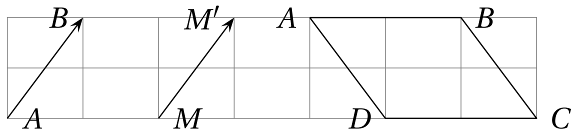
On a vu précédemment que

- d'une part, M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ si et seulement si $ABM'M$ parallélogramme (éventuellement aplati),
- d'autre part que les translations de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et de vecteur $\overrightarrow{MM'}$ étaient les mêmes donc que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$

Ce cas est général. Ainsi :

Propriété 12.5.

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'} \Leftrightarrow$ ....
- $\overrightarrow{AB} =$ ...... $\Leftrightarrow$ *$ABCD$ est un parallélogramme*



Remarque. Attention à l'ordre des lettres !

Ainsi, on peut aussi définir un vecteur de la manière suivante :

Définition 12.4. Un vecteur non nul est déterminé par :

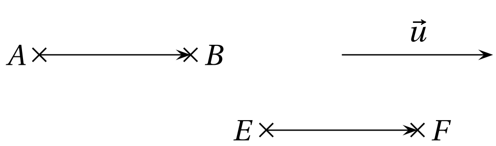
- sa *direction* ;
- son *sens* ;
- et sa longueur, appelée *norme du vecteur*.

Et on a alors la propriété :

Propriété 12.6. *Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont la même direction, le même sens et la même norme.*

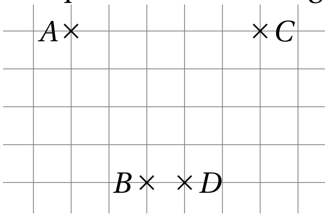
En effet, en appellant $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ces deux vecteurs, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC$ parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction, le même sens et la même norme.

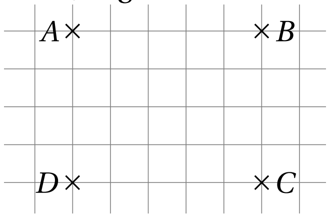
12.2.2 Notation $\vec{u}$

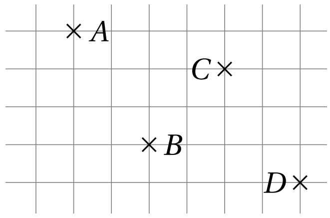


Sur le schéma ci-contre, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$.
On pose alors $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$.
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont appelés des *représentants* du vecteur $\vec{u}$.

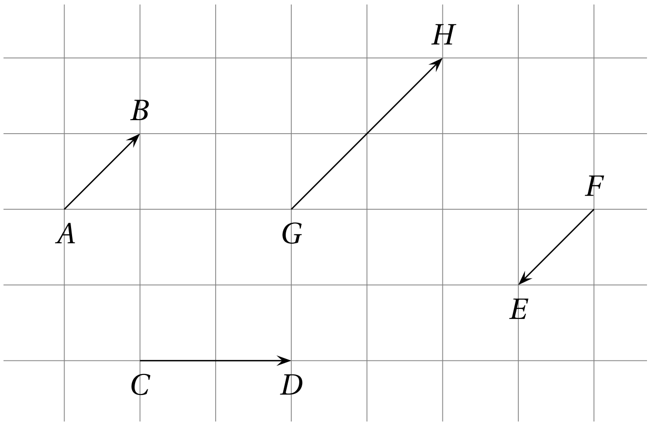
EXERCICE 12.1.
Sur chaque schéma de la figure ci-dessous, l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ est-elle vraie ?





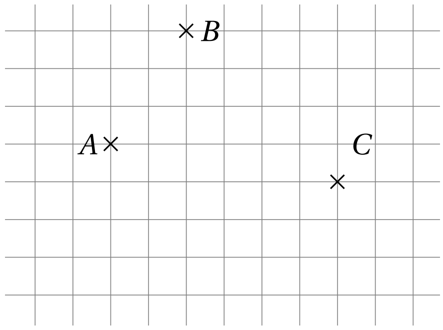


EXERCICE 12.2.
Sur la figure ci-dessous, expliquer, en utilisant les termes direction, sens ou norme, pourquoi le vecteur $\overrightarrow{AB}$ n'est égal à aucun des autres vecteurs représentés.



EXERCICE 12.3.
Sur la figure ci-contre :

1. Construire, à partir des points A, B et C, les points D, E et F tels que :
   $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\quad \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AB}$, $\quad \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BA}$
2. Quels parallélogrammes peut-on tracer avec ces six points ?
3. En utilisant ces six points, compléter :
   $\overrightarrow{BD} = \ldots\ldots = \ldots\ldots \quad \overrightarrow{BC} = \ldots\ldots \quad \overrightarrow{BF} = \ldots\ldots$
4. Quelles autres égalités de vecteurs peut-on déduire ?

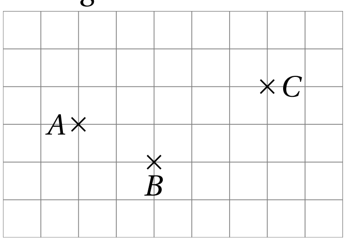


12.2.3 Somme de deux vecteurs – Relation de CHASLES

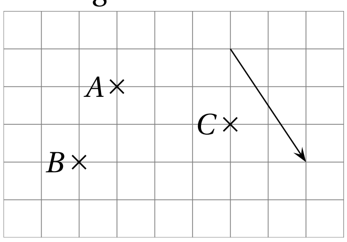
Définition 12.5. La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultat de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$.

EXERCICE 12.4.

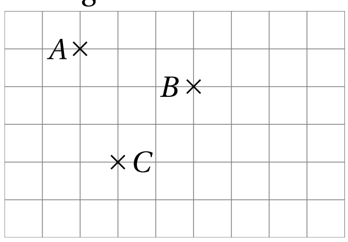
Construire ci-dessous un vecteur égal à $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.



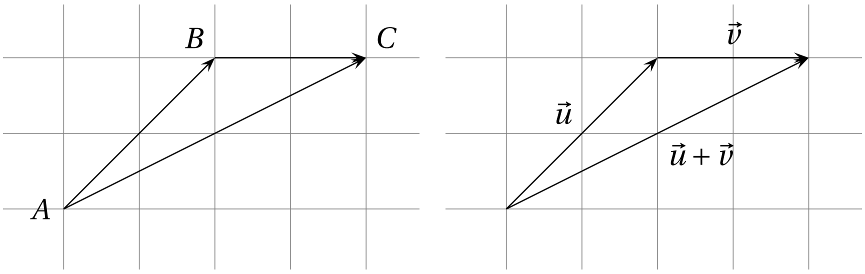
Le vecteur tracé ci-dessous est-il égal à $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$?



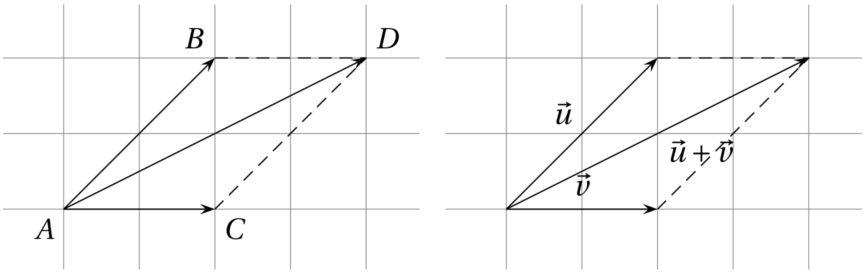
Construire ci-dessous un vecteur égal à $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.



Propriété 12.7 (Relation de CHASLES). *Pour tous points A, B et C, on a :* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



Propriété 12.8 (Règle du parallélogramme). *Pour tous points A, B, C et D on a :* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow ABDC$ *parallélogramme.*

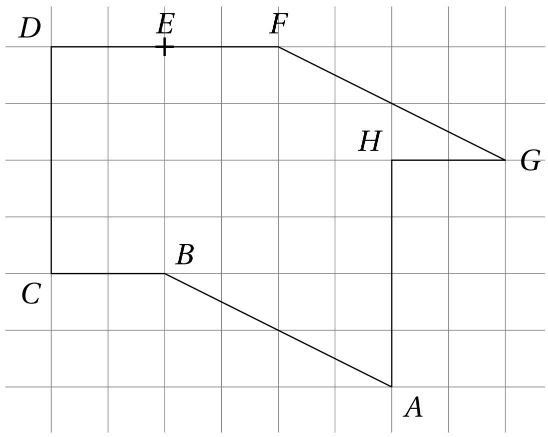


EXERCICE 12.5 (Relation de CHASLES).
Compléter à l'aide de la relation de CHASLES :

- $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{B\ldots}$
- $\overrightarrow{XK}=\overrightarrow{XL}+\overrightarrow{\ldots K}$
- $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{\ldots A}+\overrightarrow{A\ldots}$
- $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{\ldots P}+\ldots\ldots$
- $\overrightarrow{\ldots E}=\overrightarrow{F\ldots}+\overrightarrow{G\ldots}$
- $\overrightarrow{H\ldots}=\ldots\ldots+\overrightarrow{IJ}$
- $\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{R\ldots}+\overrightarrow{\ldots S}$
- $\ldots\ldots=\overrightarrow{JK}+\overrightarrow{\ldots M}$
- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\ldots\ldots$
- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\ldots C}+\overrightarrow{\ldots D}+\ldots\ldots$
- $\overrightarrow{\ldots Y}=\overrightarrow{XJ}+\ldots\ldots+\overrightarrow{R\ldots}$

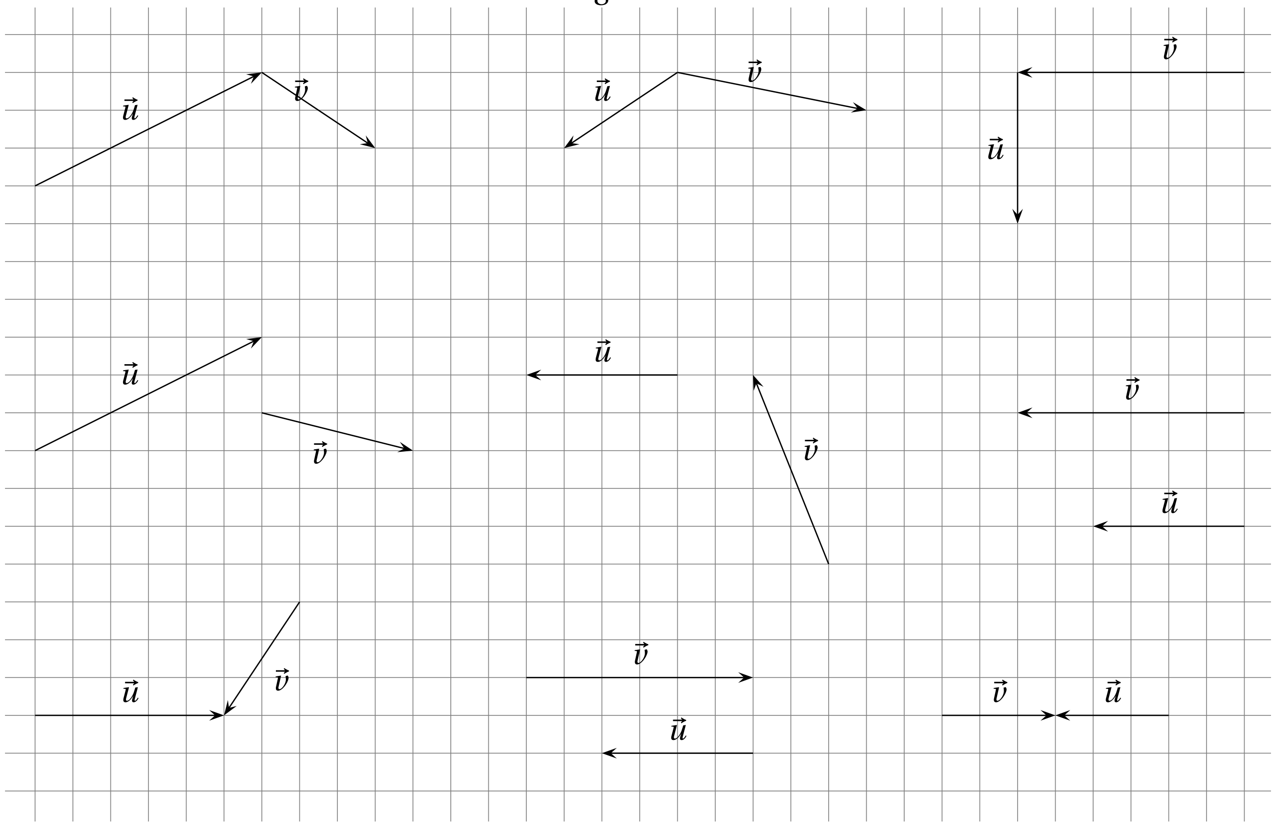
EXERCICE 12.6 (Vecteurs égaux, somme).
On considère le motif représenté ci-contre.

1. Citer tous les vecteurs égaux :
   (a) au vecteur $\overrightarrow{AB}$ et représentés sur ce motif;
   (b) au vecteur $\overrightarrow{FE}$ et représentés sur ce motif.
2. En n'utilisant que les lettres représentées sur ce motif, déterminer un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}$.
3. En n'utilisant que les lettres représentées sur ce motif, déterminer un vecteur égal aux vecteurs suivants :
   (a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}$
   (b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$
   (c) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}$
   (d) $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{GF}$
   (e) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FB}$



EXERCICE 12.7 (Sommes)**.**
Dans chacun des cas de la figure 12.2 de la présente page, construire en couleur le vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. Que remarque-t-on dans le dernier cas ?

FIGURE 12.2: Figure de l'exercice 12.7



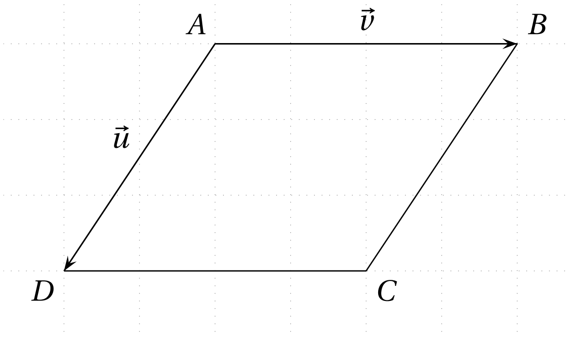
12.2.4 Vecteur nul – Vecteurs opposés

Définition 12.6. On appelle *vecteur nul*, noté $\vec{0}$, tout vecteur dont son origine et son extrémité sont confondues. La translation associée laisse tous les points invariants.
On appelle *vecteurs opposés* tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u}+\vec{v} = \vec{0}$. On peut noter $\vec{u} = -\vec{v}$ ou $\vec{v} = -\vec{u}$.

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. On a donc :

Propriété 12.9. *Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés. On a donc $\overrightarrow{AB} = \ldots\ldots$ et $\overrightarrow{BA} = \ldots\ldots$*

EXERCICE 12.8 (Différence)**.**
Étant donné le parallélogramme $ABCD$, on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.



Écrire les vecteurs suivants à l'aide des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ *seulement* :

- $\overrightarrow{BA} = \ldots\ldots\ldots\ldots$;
- $\overrightarrow{DC} = \ldots\ldots\ldots\ldots$;
- $\overrightarrow{CA} = \ldots\ldots\ldots\ldots$;
- $\overrightarrow{BC} = \ldots\ldots\ldots\ldots$;
- $\overrightarrow{DA} = \ldots\ldots\ldots\ldots$;
- $\overrightarrow{AC} = \ldots\ldots\ldots\ldots$;
- $\overrightarrow{DB} = \ldots\ldots\ldots\ldots$;
- $\overrightarrow{CB} = \ldots\ldots\ldots\ldots$;
- $\overrightarrow{CD} = \ldots\ldots\ldots\ldots$;
- $\overrightarrow{BD} = \ldots\ldots\ldots\ldots$;

Enfin on a la propriété suivante :

Propriété 12.10. *Soient A et B deux points distincts et I un point du plan. Alors* . . $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

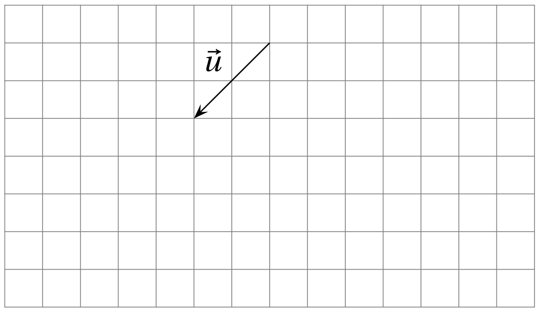
12.2.5 Produit d'un vecteur par un réel

ACTIVITÉ 12.4.
Sur la figure ci-contre :

1. Construire un représentant du vecteur $\vec{v} = \vec{u} + \vec{u}$ et $\vec{w} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$.

   Quelles propriétés géométriques partagent $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$? Quelles sont leurs différences ?

2. On notera $\vec{v} = 2\vec{u}$ et $\vec{w} = 3\vec{u}$.
   En vous inspirant du point précédent, conjecturer une représentation du vecteur $\vec{\imath} = -2\vec{u}$ et du vecteur $\vec{\jmath} = 1{,}5\vec{u}$.

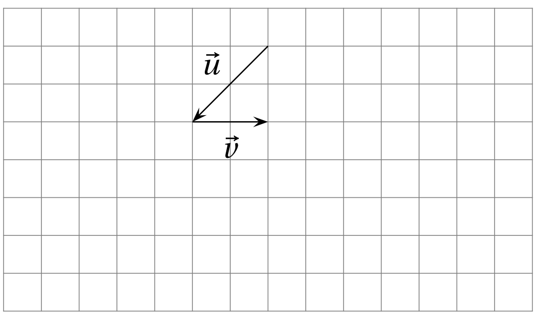


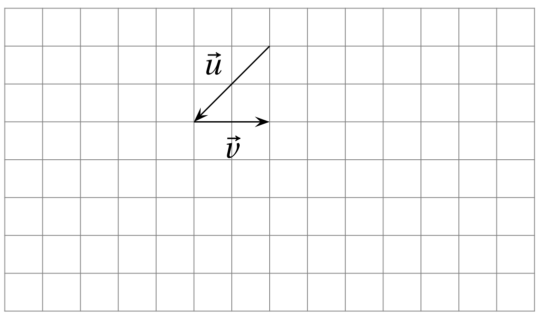
On a ainsi :

Définition 12.7. Soit k un réel non nul et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Alors le vecteur $k\vec{u}$ est un vecteur dont :

- la direction est ....
- le sens est ....
- la norme est ....

ACTIVITÉ 12.5.
On a reproduit ci-dessous deux fois la même figure.
Sur la figure 1, construire le vecteur $3(\vec{u} + 2\vec{v})$ et, sur la figure 2, construire le vecteur $3\vec{u} + 6\vec{v}$. Que remarque-t-on ?





On a ainsi :

Propriété 12.11. *Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous nombres réels k et k' : $k(\vec{u}+\vec{v}) =$ .... et $k\vec{u}+k'\vec{u} =$ ....*

On a de plus :

Propriété 12.12. *Pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout nombre k, $0\vec{u} =$ .... et $k\vec{0} =$ ....*

Propriété 12.13. *Soient A et B deux points distincts et I un point du plan, alors I milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} =$ .... $\overrightarrow{AB}$.*

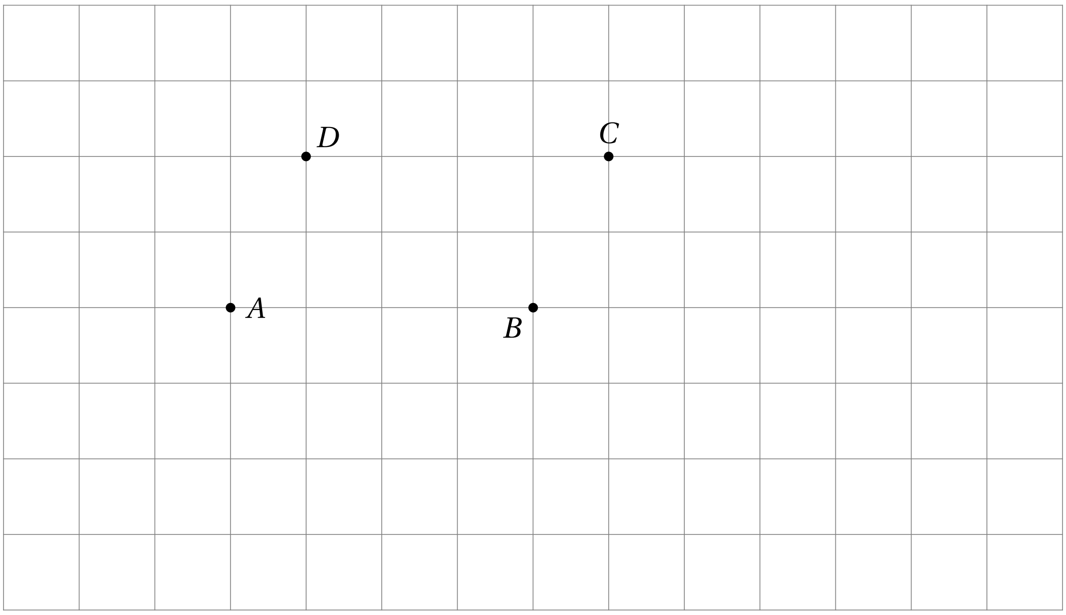
12.3 Colinéarité de deux vecteurs

Définition 12.8. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *colinéaires* s'il existe un nombre k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarque. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$ car $0\vec{u} = \vec{0}$.

ACTIVITÉ 12.6.
Sur la figure 12.3 de la présente page le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
On appelle E le symétrique de D par rapport à C et F le symétrique de D par rapport à A.

FIGURE 12.3: Figure de l'activité 12.6



1. Construire E et F.
2. Démontrer que les points F, B et E sont alignés.
3. Démontrer que les droites (AC) et (FE) sont parallèles.
4. Exprimer $\overrightarrow{FB}$ d'une part et $\overrightarrow{FE}$ d'autre part en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. Ces vecteurs sont-ils colinéaires ?
5. Exprimer $\overrightarrow{AC}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{FB}$ sont-ils colinéaires ?

Ce résultat est général. Plus précisément :

Propriété 12.14. *Soient A, B, C et D quatre points du plan.*

$$A,B,C \text{ alignés} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ colinéaires}$$

$$(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ colinéaires}$$

12.4 Vecteurs et repérage

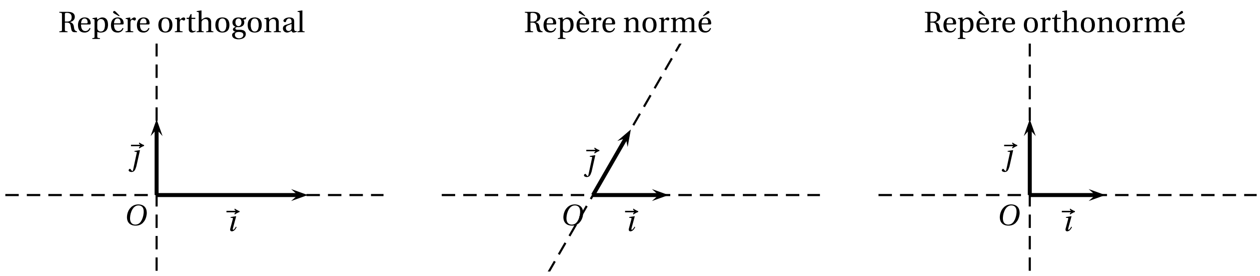
Le notion de repérage a déjà été abordée lors du chapitre 2. Elle peut être revisitée au travers des vecteurs.

12.4.1 Repères

Définition 12.9. Soient O un point du plan et $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ deux vecteurs de ce plan de directions différentes (non colinéaires), alors $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est appelé *repère* du plan.
O est alors appelée *origine* du repère et le couple $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est appelé *base* du repère.

Définition 12.10. Soit un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

- Si les directions de $\vec{\imath}$ et de $\vec{\jmath}$ sont orthogonales, le repère est dit *orthogonal*.
- Si les normes de $\vec{\imath}$ et de $\vec{\jmath}$ sont égales à 1, le repère est dit *normé*.
- Si les directions de $\vec{\imath}$ et de $\vec{\jmath}$ sont orthogonales et que les normes de $\vec{\imath}$ et de $\vec{\jmath}$ sont égales à 1, le repère est dit *orthonormé*.
- Sinon, le repère est dit *quelconque*.



12.4.2 Coordonnées de vecteur

Propriété 12.15 (admise)**.** *Le plan est muni d'une base* $(\vec{i},\vec{j})$. *Pour tout vecteur* $\vec{u}$ *du plan, il existe un unique couple* $(x;y)$, *appelé* coordonnées de $\vec{u}$, *tel que* $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Remarques.

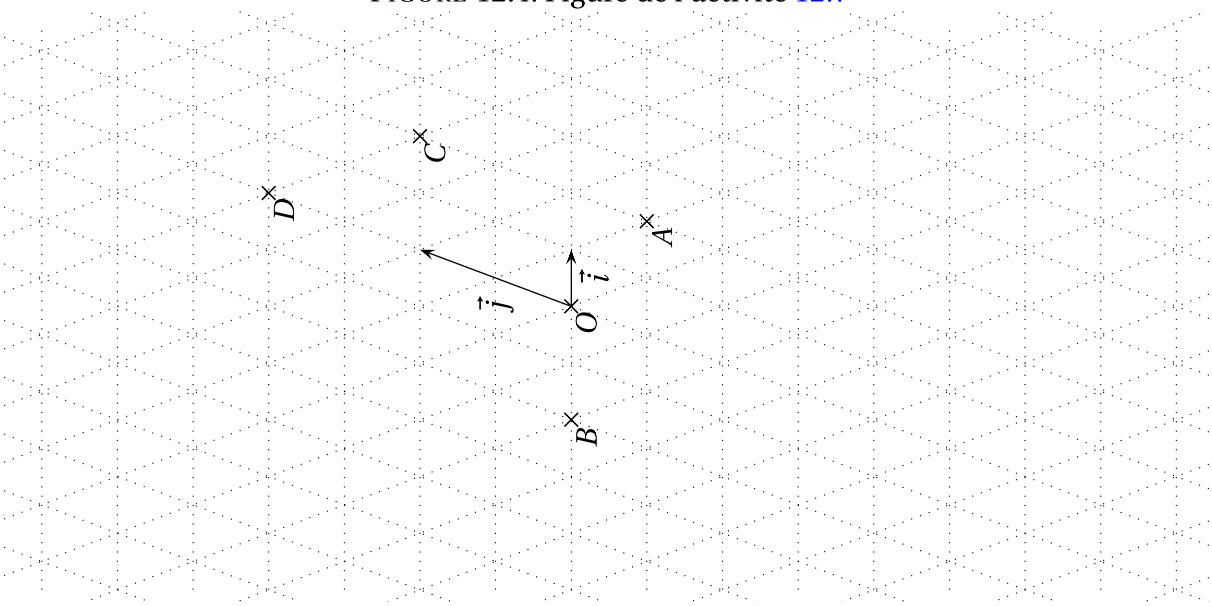
- On notera indifférement $\vec{u}(x;y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- La notation en colonne est particulièrement pratique dans les calculs que nous verrons plus tard.

- On notera que l'origine du repère n'a pas d'importance dans les coordonnées d'un vecteur.
- Enfin, et surtout, le vecteur nul a pour coordonnées $(0;0)$.

ACTIVITÉ 12.7.
Sur la figure 12.4 de la présente page où le plan est muni du repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$:

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants : $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OD}$; $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
2. (a) Soit E tel que $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AB}$. Construire E puis déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{CE}$.
   (b) Soit F tel que $\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{OC}$. Construire F puis déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{FD}$.
3. (a) Construire un représentant de $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.
   (b) Donner les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, de $\overrightarrow{CD}$ et de $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.
   (c) Que remarque-t-on ?
4. (a) Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{BD}$ et de $\overrightarrow{DB}$. Que remarque-t-on ?
   (b) Construire un représentant du vecteur $\vec{v}=2\overrightarrow{OA}$. Déterminer ses coordonnées et les comparer à celles de $\overrightarrow{OA}$.
   (c) Soit K le milieu de $[AD]$. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AD}$. Que remarque-t-on ?

FIGURE 12.4: Figure de l'activité 12.7



Plus généralement, on a les propriétés suivantes :

Propriété 12.16. *Le plan est muni d'un repère. Soient $\vec{u}\,(x;y)$ et $\vec{v}\,(x';y')$ deux vecteurs et k un nombre.*

- $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow$ .... = ... *et* .... = ...
- *Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées* (......... ; ....).
- *Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées* (......... ; ....).

Elles seront démontrées en classe.

12.4.3 Coordonnées de point

Définition 12.11. Le plan étant muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on appelle *coordonnées* du point M le couple $(x\,;\,y)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$, x étant appelé *abscisse* de M et y étant appelé *ordonnée* de M.

Remarques.

- Les coordonnées du point M sont donc les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Cela implique que les coordonnées d'un point, contrairement à celles d'un vecteur, dépendent de l'origine du repère.
- La notation en colonne est peu utilisée pour les coordonnées de point.

12.4.4 Propriétés

ACTIVITÉ 12.8.
Sur la figure 12.5 page suivante, où le plan est muni du repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$:

1. Graduer les axes tracés de façon à permettre une lecture plus aisée des coordonnées.
   L'axe ayant pour direction $\vec{\imath}$ *est appelé* axe des abscisses*, l'axe ayant pour direction* $\vec{\jmath}$ *est appelé* axe des ordonnées*. Les deux axes sont appelés les* axes de coordonnées*.*
2. Placer les points $M(3;1)$, $N(-1;1{,}5)$, $P(-2;-1)$ et $Q(3;-1)$.
3. Donner graphiquement les coordonnées des points A, B, C et D.
4. Par lectures graphiques, compléter le tableau suivant :

Point X	Coordonnées de X	Point Y	Coordonnées de Y	Coordonnées de $\overrightarrow{XY}$
A		B		
A		C		
A		D		
B		A		
B		C		
B		D		

   Quel lien peut-on conjecturer entre les coordonnées des points X et Y et celles du vecteur $\overrightarrow{XY}$?

Bilan et compléments

Les propriétés suivantes seront démontrées en classe :

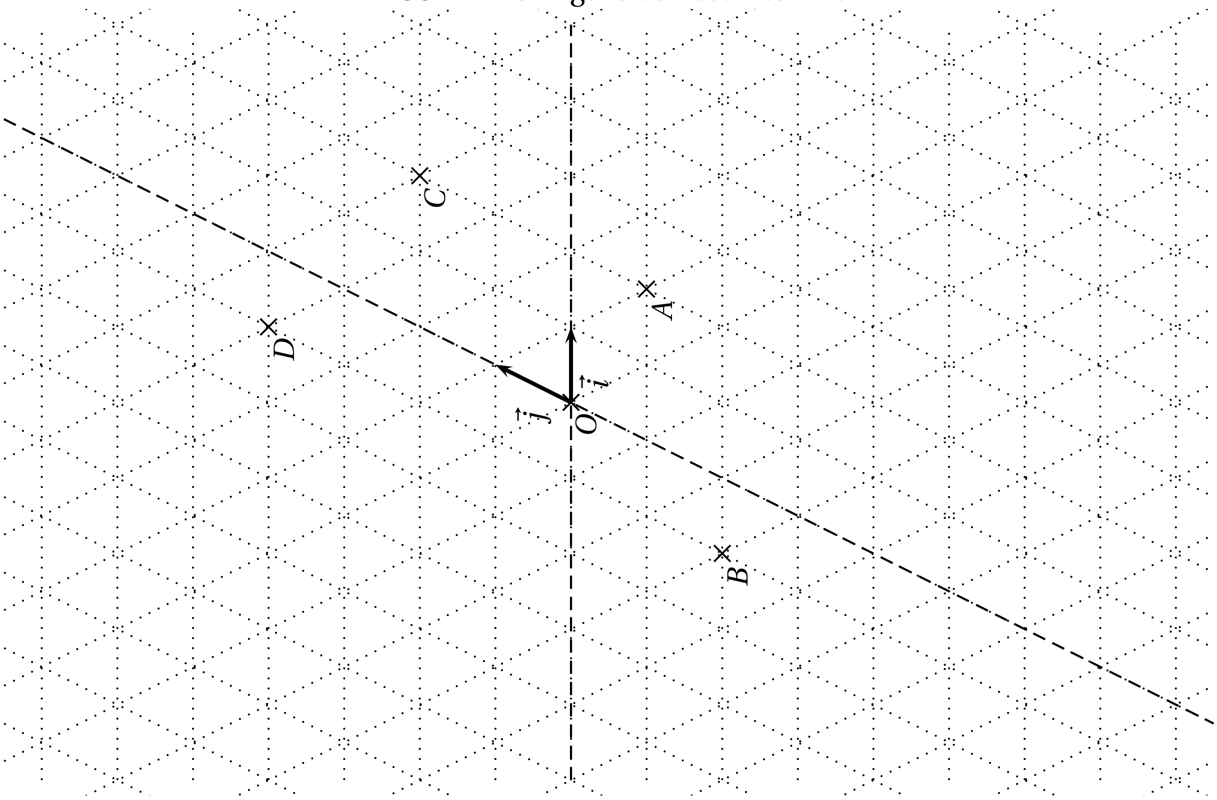
Propriété 12.17. *Soient $A\,(x_A\,;\,y_A)$ et $B\,(x_B\,;\,y_B)$ deux points du plan.*
Alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont (………… ; …………).

Propriété 12.18. *Le plan est muni d'un repère. Soient $\vec{u}\,(x\,;\,y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;\,y')$ deux vecteurs du plan.*
Alors :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les propriétés suivantes ont déjà été vues lors du chapitre 2. Elles peuvent être démontrées à l'aide des vecteurs.

FIGURE 12.5: Figure de l'activité 12.8



Propriété. *Soit P un plan muni d'un repère quelconque.*
Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ et $I(x_I; y_I)$ milieu de $[AB]$.
Alors $x_I = \dots\dots\dots\dots$ *et* $y_I = \dots\dots\dots\dots$

Propriété. *Soit P un plan muni d'un repère* ***orthonormé****.*
Soient A et B deux points du plan P de coordonnées respectives $(x_A\,;\,y_A)$ et $(x_B\,;\,y_B)$.
Alors la distance AB est donnée par :

$$AB = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

12.5 Exercices

12.5.1 Vecteurs sans coordonnées

EXERCICE 12.9.
$ABCD$ est un quadrilatère quelconque. I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

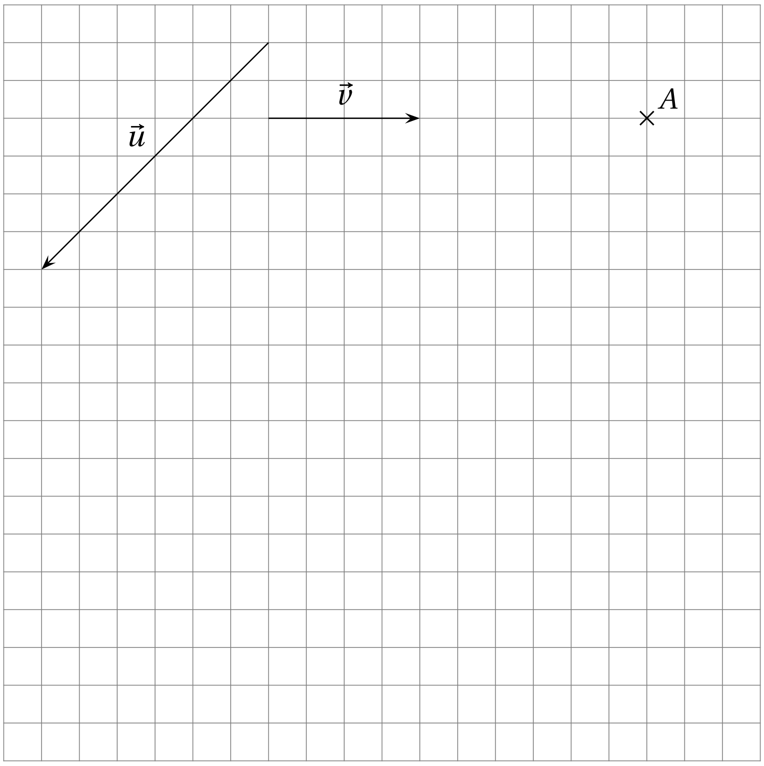
1. Montrer, à l'aide de la relation de CHASLES, que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer, à l'aide de la relation de CHASLES, que $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire la nature du quadrilatère $IJKL$.

EXERCICE 12.10.
Soit $ABCD$ un parallélogramme non aplati et les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = \frac{3}{5}\overrightarrow{DC}$.
Montrer que les segments $[EF]$ et $[BD]$ ont même milieu.

EXERCICE 12.11.
On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de directions différentes. A est un point donné (voir la figure 12.6 de la présente page).

1. Construire les points B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{u} - \vec{v}$.
2. Construire les points P, Q et R tels que $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\vec{u}$, $\overrightarrow{PQ} = -2\vec{v}$ et $\overrightarrow{QR} = -\frac{2}{3}\vec{u}$.
3. Que constate-t-on ? *Le justifier par un calcul sur les vecteurs.*

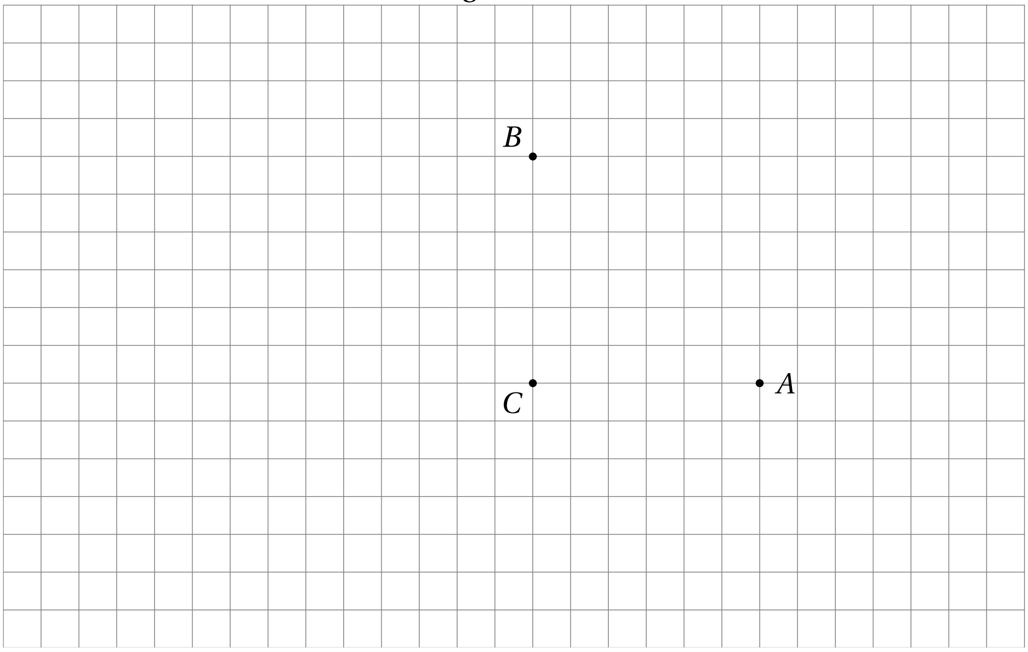
FIGURE 12.6: Figure de l'exercice 12.11



EXERCICE 12.12.
Soit un triangle rectangle ABC en C tel que $AC = 3$ cm et $BC = 3$ cm (voir la figure 12.7 page suivante).

1. Placer les points I, J, K et L définis par les égalités suivantes :
   - $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;
   - $\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{BA}$;
   - $\overrightarrow{CK} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$;
   - $\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{13}{6}\overrightarrow{BA}$.
2. Tracer le quadrilatère $IJKL$. Que peut-on conjecturer sur sa nature ?
3. Nous allons démontrer la conjecture faite au point précédent.
   (a) À l'aide de la relation de CHASLES, exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ}$.
   En déduire $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
   (b) À l'aide de la relation de CHASLES, exprimer $\overrightarrow{LK}$ en fonction de $\overrightarrow{CK}$ et $\overrightarrow{CL}$.
   Toujours à l'aide de la relation de Chasles, travailler l'expression précédente jusqu'à obtenir $\overrightarrow{LK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

FIGURE 12.7: Figure de l'exercice 12.12



(c) Conclure.

EXERCICE 12.13.
Écrire les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$ et $\vec{t}$ en fonction des seuls vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

- $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.
- $\vec{w} = \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CA}$.
- $\vec{x} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.
- $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{BC}$.
- $\vec{t} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

EXERCICE 12.14.
Soit ABC un triangle non aplati (A, B et C non alignés) et les points D et E tels que :

$$\overrightarrow{AD} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} \qquad \overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

1. Faire un dessin. Conjecturer le lien entre les points B, D et E.
2. Nous allons démontrer la conjecture du point précédent.
   (a) Exprimer $\overrightarrow{ED}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CE}$ puis en fonction des seuls vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (b) Exprimer $\overrightarrow{BD}$ en fonction des seuls vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (c) Conclure.

EXERCICE 12.15.
Sur la figure 12.8 page suivante, $ABCD$ est un parallélogramme. A' est le symétrique de A par rapport à B et E est le milieu de $[BC]$.

1. Construire A' et E.
2. Exprimer $\overrightarrow{DE}$ d'une part et $\overrightarrow{DA'}$ d'autre part en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DA'}$?
4. Que peut-on en déduire pour les points A', E et D ?

FIGURE 12.8: Figure de l'exercice 12.15

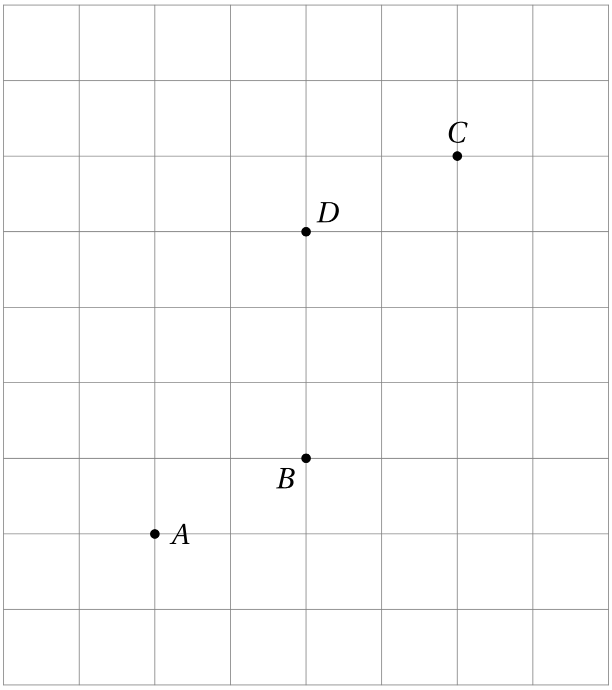
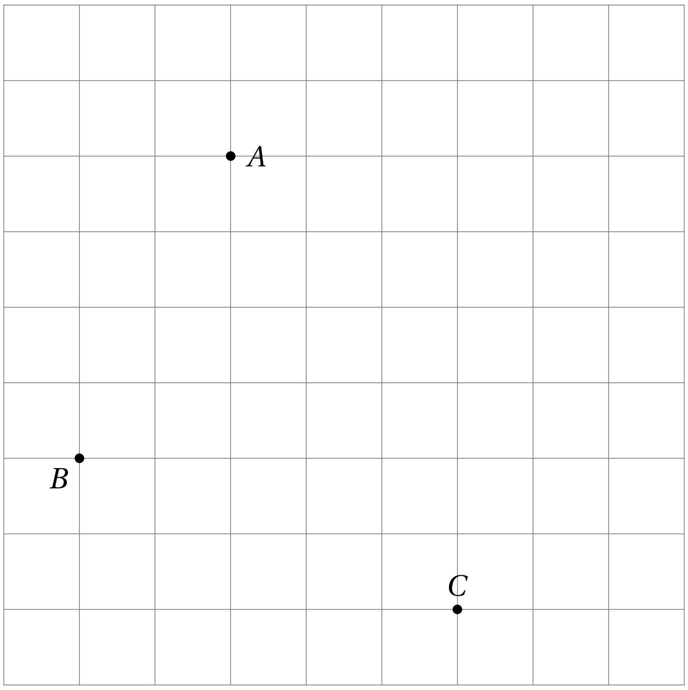


FIGURE 12.9: Figure de l'exercice 12.16



EXERCICE 12.16.
Sur la figure 12.9 de la présente page, ABC est un triangle quelconque. On définit trois points D, E et F par : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. On appelle, par ailleurs, I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.

1. Construire D, E, F, I et J.
2. Montrer, si possible à l'aide des vecteurs, que les droites (DE) et (BF) sont parallèles.
3. Montrer, si possible à l'aide des vecteurs, que les points I, E et D sont alignés.
4. Montrer, si possible à l'aide des vecteurs, que les points B, F et J sont alignés.

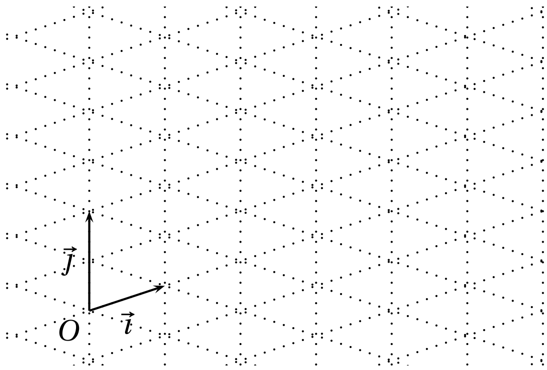
12.5.2 Vecteur avec coordonnées

EXERCICE 12.17.
Le plan est muni du repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Soient les points $A(2;-4)$, $B(-1;3)$, $C(-3;-2)$.

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CA}$, du vecteur $\overrightarrow{CB}$ et du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.
2. (a) Déterminer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{OD} = \vec{u}$.
   (b) Déterminer les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE} = \vec{u}$.
3. Quelles sont les coordonnées du point F tel que $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$?
4. Montrer que F milieu de $[OA]$.

EXERCICE 12.18.
Sur le schéma ci-dessous où le plan est muni du repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$:

1. Placer les points $A(1;2)$, $B(3;1{,}5)$, $C(4;0{,}5)$ et $D(2;1)$;
2. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.



EXERCICE 12.19.
Le plan est muni du repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Soient les points $A(-9;-10)$, $B(2;9)$, $C(5;3)$, $D(-1;-8)$ et $E(3;0)$.

1. Les points C, D et E sont-ils alignés ?
2. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

EXERCICE 12.20.
$ABCD$ est un parallélogramme.
A' est le symétrique de A par rapport à B et E est le milieu de $[BC]$.

1. Déterminer les coordonnées des points A', E et D dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$
2. Montrer que les points A', E et D sont alignés