Chapitre 11

Expressions algébriques
Fonctions de référence

Sommaire

11.1 Expressions algébriques

Définition 11.1. Développer c'est transformer un produit en une somme. Factoriser c'est transformer une somme en un produit.

Propriété 11.1. *On a les factorisations et développements suivants :*

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} ka+kb & = & \ldots\ldots\ldots\ldots & (a+b)^2 & = & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a+b)(c+d) & = & \ldots\ldots\ldots\ldots & (a-b)^2 & = & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & & & a^2-b^2 & = & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Exercice 11.1.
Parmi les formules de la propriété ci-dessus, lesquelles sont des formules de développement, lesquelles sont des formules de factorisation ?

11.2 Rappels sur les fonctions

Définition 11.2 (Notion de fonction)**.** Une fonction est un procédé qui, à un élément x d'un ensemble de départ, associe au plus un élément y d'un ensemble d'arrivée.
On notera $f : x \mapsto y$ ou $f : x \mapsto f(x)$ qui se lit « f est la fonction qui à x associe y (ou $f(x)$) ».

On dit que y est *l'image* de x.
On dit que x est *un antécédent* de y.
Si les ensembles de départ et d'arrivée sont des ensembles de nombres, la fonction est dite *numérique*.

Définition 11.3 (Ensemble ou domaine de définition)**.** L'ensemble des réels x possédant une image par une fonction numérique f est appelé *l'ensemble de définition de la fonction* f.

Définition 11.4 (Sens de variation)**.** Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est

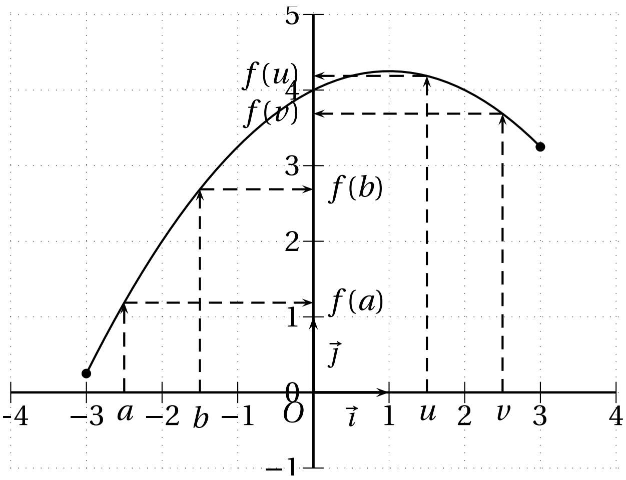
- *croissante* sur I si, pour tous réels a et b de I, on a : Si $a < b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$.
- *décroissante* sur I si, pour tous réels a et b de I, on a : Si $a < b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$.
- *constante* sur I si, pour tous réels a et b de I, on a : $f(a) = f(b)$.

Remarques.

- Antécédents et images étant rangés dans le même ordre, on dit qu'une fonction croissante *conserve* l'ordre.
- Antécédents et images étant rangés dans l'ordre inverse, on dit qu'une fonction décroissante *inverse* l'ordre.
- f est dite *monotone* sur I si elle ne change pas de sens de variation sur I.
- Les variations d'une fonction peuvent être résumées dans un tableau de variations.
- Les extremums, s'ils existent, sont les valeurs maximale et minimale qui sont **atteintes** par la fonction f sur un intervalle donné.

Exemple. Soit, par exemple, la fonction définie sur $[-3;3]$ par la courbe représentative donnée sur la figure ci-contre.
La fonction f est croissante sur $[-3;1]$, décroissante sur $[1;3]$. Elle n'est pas monotone sur $[-3;3]$ car elle change de sens de variation.
Son tableau de variations est le suivant :

x	-3		1		3
f			$\approx 4{,}25$		
	$\approx 0{,}25$	$\nearrow$		$\searrow$	$\approx 2{,}25$



11.3 Parité

11.3.1 Fonction paire

Définition 11.5. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f *est paire* si :

- I est centré en 0 ;
- pour tout $x \in I$, $f(-x) = f(x)$.

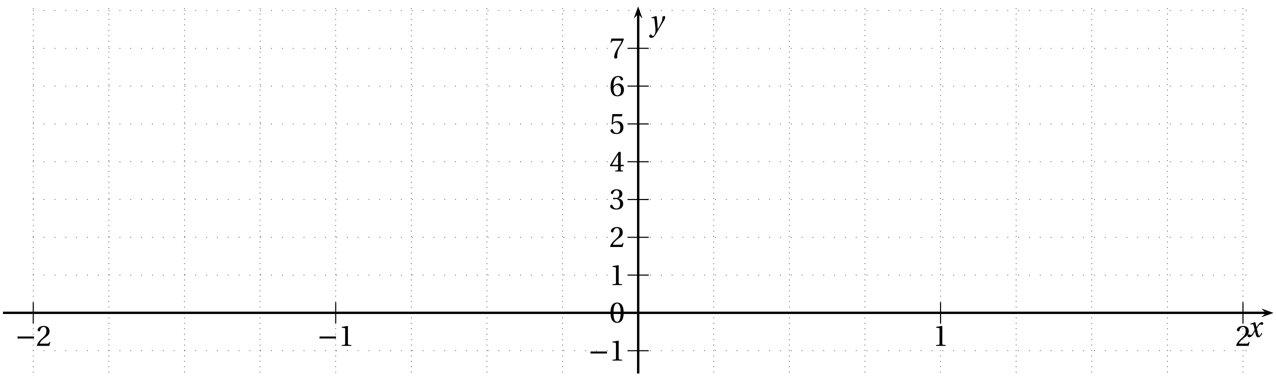
Propriété 11.2. *Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'*axe des ordonnées.

EXERCICE 11.2.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^4 - 2x^2$.
Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que f est une fonction paire. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}$?
2. À l'aide de la calculatrice compléter le tableau ci-dessous.

x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
$f(x)$									

3. À l'aide des deux questions précédentes, tracer $\mathscr{C}$ dans le repère ci-dessous.



Propriété 11.3. *Soit f une fonction paire. Alors ses variations sur $\mathbb{R}^-$ et sur $\mathbb{R}^+$ sont symétriques.*

On l'admettra.
En particulier, si elle est croissante sur un intervalle $[a;b] \subset [0;+\infty[$ alors elle est décroissante sur l'intervalle $[-b;-a]$, et si elle est décroissante sur un intervalle $[a;b] \subset [0;+\infty[$ alors elle est croissante sur l'intervalle $[-b;-a]$.

11.3.2 Fonction impaire

Définition 11.6. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f *est impaire* si :

- I est centré en 0 ;
- pour tout $x \in I$, $f(-x) = -f(x)$.

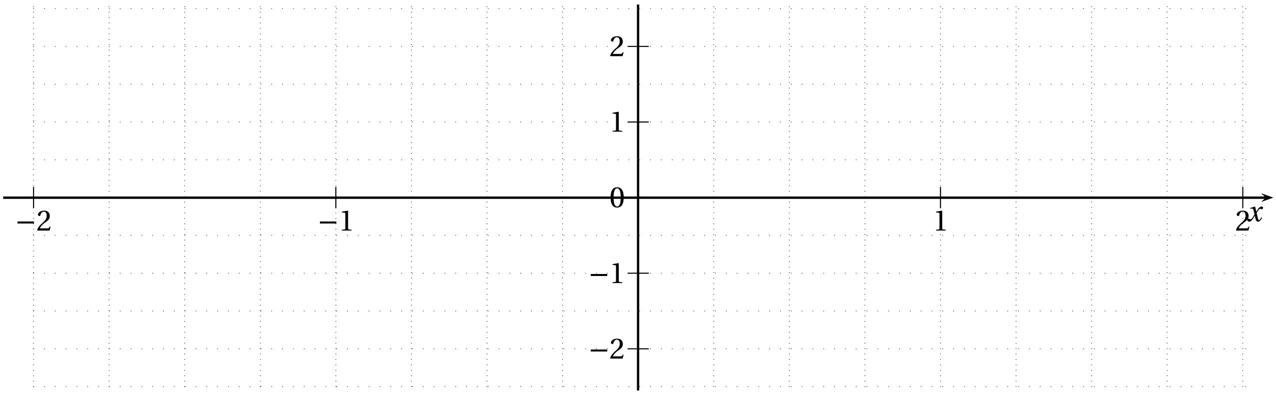
Propriété 11.4. *Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'*origine du repère.

EXERCICE 11.3.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^3 - 3x$.
Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que f est une fonction impaire. Que peut-on en déduire pour $\mathscr{C}$?
2. À l'aide de la calculatrice compléter le tableau ci-dessous.

x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
$f(x)$									

3. À l'aide des deux questions précédentes, tracer $\mathscr{C}$ dans le repère ci-dessous.



Propriété 11.5. *Soit f une fonction impaire. Alors ses variations sur $\mathbb{R}^-$ et sur $\mathbb{R}^+$ sont identiques.*

On l'admettra.
En particulier, si elle est croissante sur un intervalle $[a ; b] \subset [0 ; +\infty[$ alors elle est aussi croissante sur l'intervalle $[-b ; -a]$, et si elle est décroissante sur un intervalle $[a ; b] \subset [0 ; +\infty[$ alors elle est aussi décroissante sur l'intervalle $[-b ; -a]$.

11.4 Fonctions de référence

11.4.1 Fonctions affines (rappels)

Définition 11.7. Les fonctions f, définies sur $\mathbb{R}$, dont l'expression peut se mettre sous la forme

$$f(x) = mx + p \text{ où } m \text{ et } p \text{ sont des réels}$$

sont appelées *fonctions affines.*
Cas particuliers :

- si $m = 0$ alors $f : x \mapsto p$ est dite *constante* ;
- si $p = 0$ alors $f : x \mapsto mx$ est dite *linéaire.*

Propriété 11.6. *La représentation graphique d'une fonction affine dans un repère est une droite. Celle d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.*

Propriété 11.7. *Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine.*

- *Si $m > 0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*
- *Si $m < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.*
- *Si $m = 0$ alors f est constante sur $\mathbb{R}$.*

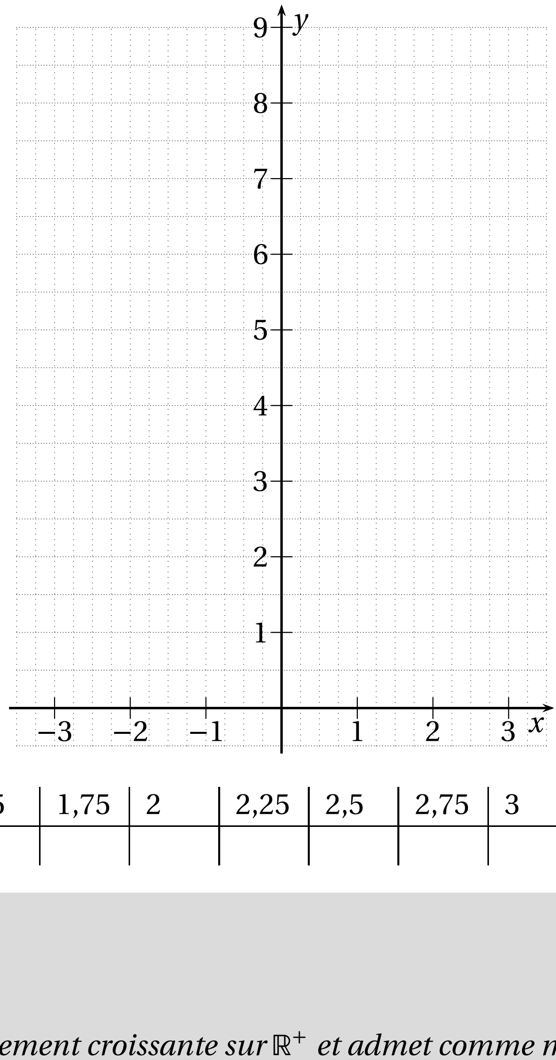
EXERCICE 11.4.
Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto mx + p$. À quelle conditon f est-elle paire ? impaire ?

11.4.2 Fonction carré

Définition 11.8. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2$ est appelée *fonction carrée.*

EXERCICE 11.5.
Soit f la fonction carrée.

1. Montrer que la fonction carrée est paire.
2. Compléter le tableau ci-dessous.
3. À l'aide des deux questions précédentes, tracer la courbe représentative de la fonction carrée dans le repère ci-contre.
   Ce type de courbe s'appelle une *parabole.*
4. Quel semble être le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^+$?
   Démontrons cette conjecture.
   (a) Factoriser $a^2 - b^2$
   (b) Soit $0 \leqslant a < b$.
      i. Quel est le signe de $a - b$?
      ii. Quel est le signe de $a + b$?
      iii. En déduire le signe de $a^2 - b^2$.
      iv. En déduire le sens de variation de $f : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$.
5. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^-$.



x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3
$f(x)$													

Propriété 11.8. *Soit f la fonction carrée.*

- *La fonction carrée est une fonction paire.*
- *Elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et admet comme minimum 0.*

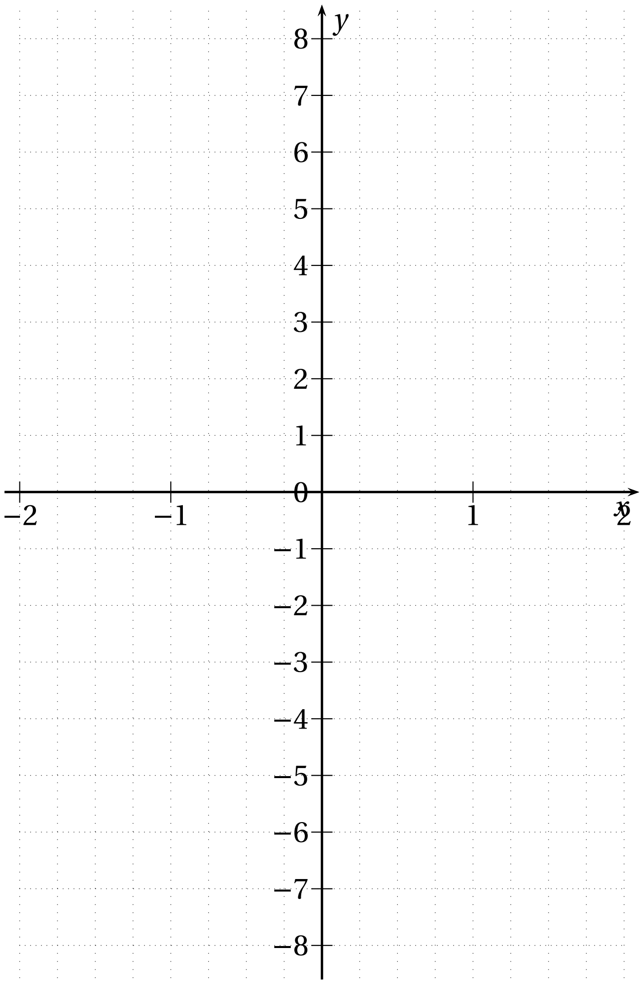
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^2$	↘	0	↗

11.4.3 Fonction cube

Définition 11.9. La f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^3$ est appelée *fonction cube*.

EXERCICE 11.6.
Soit f la fonction cube.

1. Montrer que la fonction cube est impaire.
2. Compléter le tableau ci-dessous.
3. À l'aide des deux questions précédentes, tracer la courbe représentative de la fonction cube dans le repère ci-contre.
4. Quel semble être le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^+$?
   Démontrons cette conjecture.
   (a) Montrer que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.
   (b) Soit $0 \leqslant a < b$
      i. Quel est le signe de $a-b$?
      ii. Quel est le signe de ab? En déduire le signe de a^2+ab+b^2.
      iii. En déduire le signe de $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ puis celui de a^3-b^3.
      iv. En déduire les variations de $f : x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}^+$.
5. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^-$.



x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
$f(x)$									

Propriété 11.9. *Soit f la fonction cube.*

- *La fonction carrée est une fonction impaire.*
- *Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$*

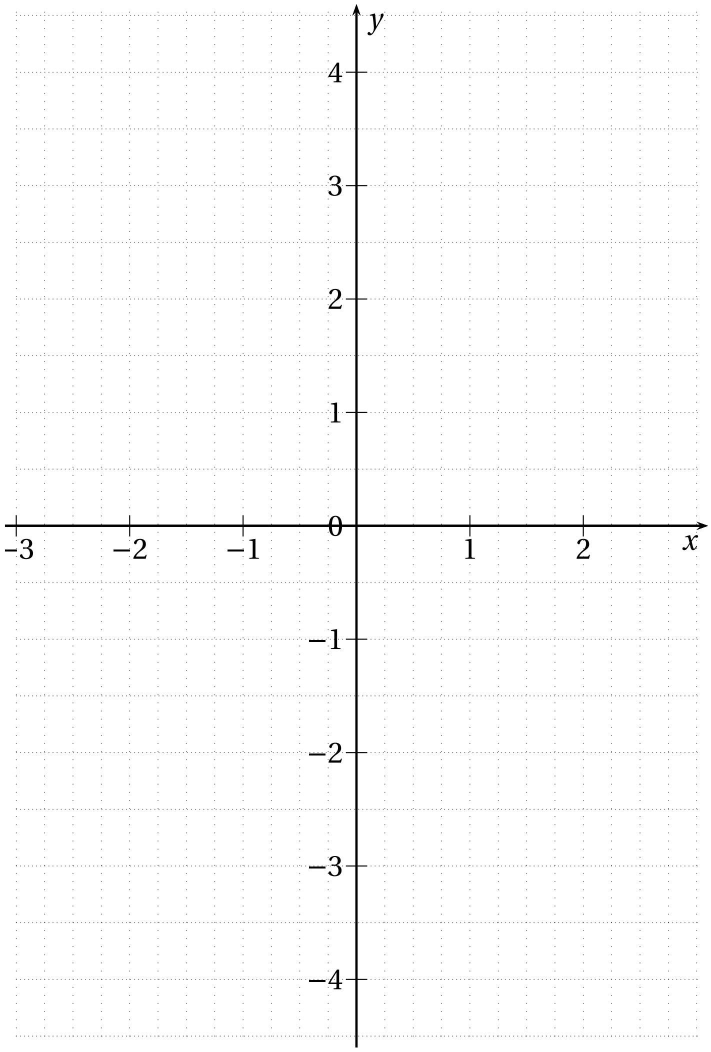
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^3$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

11.4.4 Fonction inverse

Définition 11.10. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est appelée *fonction inverse.*

EXERCICE 11.7.
Soit f la fonction inverse.

1. Montrer que la fonction inverse est impaire.
2. Compléter le tableau ci-dessous.
3. À l'aide des deux questions précédentes, tracer la courbe représentative de la fonctioninverse dans le repère ci-contre.
   Ce type de courbe s'appelle une *hyperbole.*
4. Quel semble être le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^{+*} =]0\,;+\infty[$?
   Démontrons cette conjecture.
   (a) Montrer que $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$.
   (b) Soit $0 < a < b$
      i. Quel est le signe de $b - a$?
      ii. Quel est le signe de ab?
      iii. En déduire le signe de $\frac{b-a}{ab}$ puis celui de $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.
      iv. En déduire les variations de $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.
5. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^{-*} =]-\infty\,;0[$.



x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3
$f(x)$													

Propriété 11.10. *Soit f la fonction inverse.*

- *La fonction inverse est une fonction impaire.*
- *f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$*

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

11.4.5 Fonction racine carrée

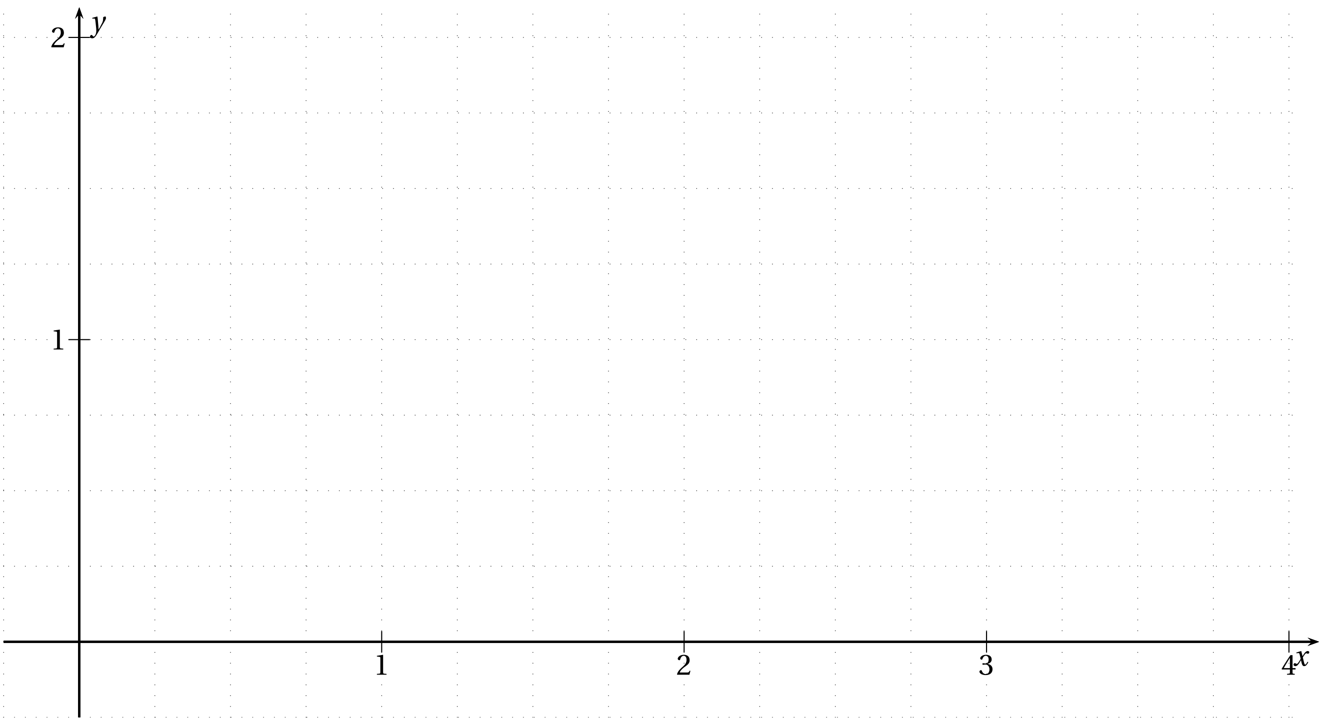
Définition 11.11. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^+ = [0\,;+\infty[$ par $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est appelée *fonction racine carrée.*

EXERCICE 11.8.
Soit f la fonction racine carrée.

1. La fonction racine carrée est-elle paire ? Impaire ?
2. Compléter le tableau ci-dessous puis tracer la courbe représentative de la fonction racine carrée dans le repère ci-desous.

x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$													

3. Que peut-on conjecturer quant aux variations de la fonction racine carrée ?
   Prouvons-le.
   Soit $0 \leqslant a < b$.
   (a) Que peut-on dire alors de $b - a$?
   (b) Montrer que $b - a = (\sqrt{b} + \sqrt{a})(\sqrt{b} - \sqrt{a})$.
   (c) Que peut-on dire du signe de $\sqrt{b} + \sqrt{a}$? En déduire le signe de $\sqrt{b} - \sqrt{a}$.
   (d) En déduire alors le sens de variation de la fonction racine.



Propriété 11.11. *Soit f la fonction racine carrée.*
f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

x	0 $+\infty$
f	$\nearrow$

11.4.6 Fonction valeur absolue

Définition 11.12. On appelle *valeur absolue* d'un réel x le réel, noté $|x|$, tel que :

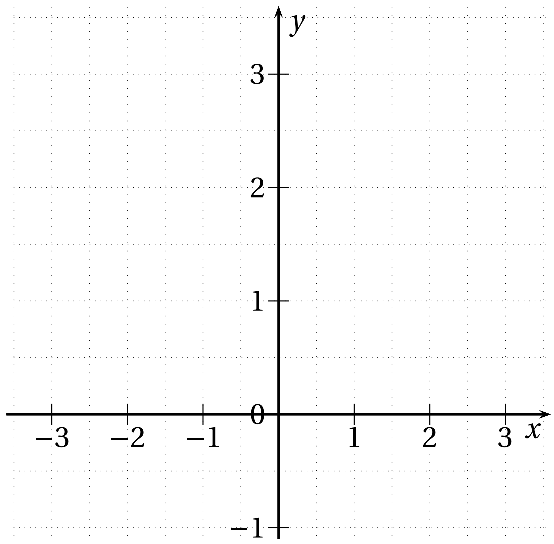
$$\begin{cases} \text{Si } x \geqslant 0 \text{ alors } |x| = x \\ \text{Si } x \leqslant 0 \text{ alors } |x| = -x \end{cases}$$

La fonction valeur absolue est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto |x|$.

Par exemple, $|3| = 3$ et $|-7| = 7$.

EXERCICE 11.9.
Soit f la fonction valeur absolue.

1. Montrer que la fonction valeur absolue est paire.
2. Compléter le tableau ci-dessous.
3. À l'aide des deux questions précédentes, tracer la courbe représentative de la fonction carrée dans le repère ci-contre.
4. Quel semble être le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^+$?
   Démontrons cette conjecture.
   Montrer que si $0 \leqslant a < b$ alors $|a| < |b|$. Que peut-on en déduire ?
5. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^-$.



x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$									

Propriété 11.12. *Soit f la fonction valeur absolue.*

- *La fonction valeur absolue est une fonction paire.*
- *Elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et admet comme minimum 0.*

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = \|x\|$	$\searrow$	0	$\nearrow$

11.5 Exercices et problèmes

11.5.1 Exercices

EXERCICE 11.10.
Développer puis réduire les expressions suivantes :

- $A=(x^2+4)(2x-3)$
- $B=x+2(x-5)+8(3-2x)$
- $C=(5-2x)(x-4)$
- $D=(x-4)^2+(3x+1)^2$
- $E=(x-1)^2-(2x+5)^2$
- $F=x(x+1)(x-3)$
- $G=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
- $H=(a+b)^3$
- $I=(a-b)^3$
- $J=-(x-7)$
- $K=-(2x+3)^2$
- $L=(x-2)^2$
- $M=(x+1)^2-x^2$

EXERCICE 11.11.
Factoriser au maximum les expressions suivantes :

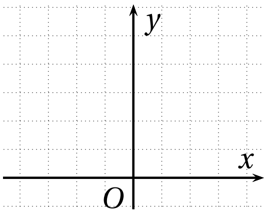
- $A=x(x-1)+2x(x-3)$
- $B=(x-1)^2+4(x-1)(x+5)$
- $C=x^2-(3x+1)^2$
- $D=x(x-4)-5(4-x)$
- $E=4x^2+20x+25$
- $F=x(x-1)-(2x+5)x$
- $G=(x+5)^2-(2x+7)^2$
- $H=(5x+1)(-3x+4)+x(10x+2)$
- $I=x^3-12x^2$
- $J=x^2-4+(x-2)(2x+1)$
- $K=2x-3+(3-2x)^2$
- $L=(2a+1)^2-(a+6)^2$
- $M=(2x-3)(1-x)-3(x-1)(x+2)$
- $N=(x-1)^2+2(x^2-1)$
- $O=x^4+4x^3+4x^2$
- $P=4x^5-x^3$
- $Q=x^7-x^5$
- $R=x(x+2)^2-4x(x-1)^2$
- $S=(2a-b)(b-a)-(2b-a)(b-2a)$
- $T=a^4-b^4$

EXERCICE 11.12.
Étudier la parité des fonctions suivantes et, en cas de parité, interpréter le résultat.
On pourra commencer par visualiser la courbe de la fonction sur calculatrice pour se donner une idée du résultat à obtenir.

- $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$
- $g : x \mapsto \sqrt{x^2+1}-2$
- $h : x \mapsto (x-1)^2+3$
- $i : x \mapsto -2x^3$
- $j : x \mapsto x^2+x$
- $k : x \mapsto x^4+x^3$.

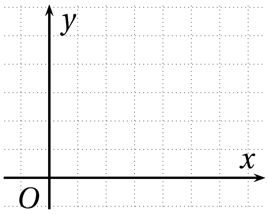
EXERCICE 11.13.
Déterminer graphiquement l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de chacune des inéquations suivantes.
On construira avec soin les représentations graphiques des fonctions de référence concernées et on fera apparaître les traits de constructions.

$2 \leqslant x^2$



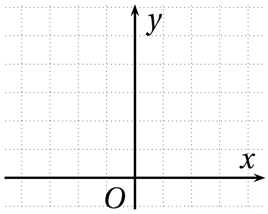
$\mathscr{S} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\sqrt{x} \geqslant 2$



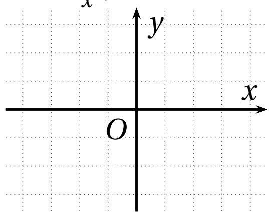
$\mathscr{S} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$|x| > 1$



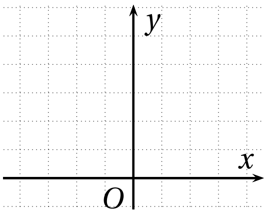
$\mathscr{S} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{1}{x} \geqslant -3$



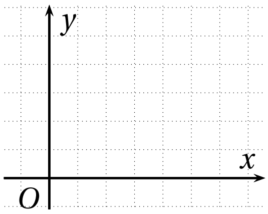
$\mathscr{S} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$1 \leqslant x^2 \leqslant 5$



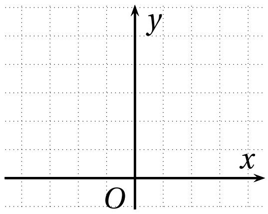
$\mathscr{S} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$3 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 4$



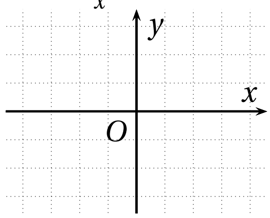
$\mathscr{S} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$4 > |x| > 2$



$\mathscr{S} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\frac{1}{x} < 2$



$\mathscr{S} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

EXERCICE 11.14.
En s'aidant éventuellement de la courbe de la fonction carrée ou de son tableau de variation, compléter par ce qu'il est possible de déduire pour x^2 :

1. Si $x > 3$ alors ....
2. Si $x < -\sqrt{2}$ alors ....
3. Si $x > 2$ alors ....
4. Si $x < -3$ alors ....
5. Si $x < 4$ alors ....
6. Si $x > -10$ alors ....
7. Si $x < 1$ alors ....
8. Si $x > -5$ alors ....

EXERCICE 11.15. 1. On pose : $-7 \leqslant x \leqslant 5$.
Compléter :

(a) Si $-7 \leqslant x \leqslant 0$ alors .... x^2 ....
(b) Si $0 \leqslant x \leqslant 5$ alors .... x^2 ....
(c) Donc si $-7 \leqslant x \leqslant 5$ alors
.... $\leqslant x^2 \leqslant$ ....

2. Compléter de la même manière :

(a) Si $-3 \leqslant x \leqslant 1$ alors .... $\leqslant x^2 \leqslant$ ....
(b) Si $-2 \leqslant x \leqslant 3$ alors .... $\leqslant x^2 \leqslant$ ....
(c) Si $-3 \leqslant x \leqslant 3$ alors .... $\leqslant x^2 \leqslant$ ....

EXERCICE 11.16.
Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1. $x^2 = 4$;
2. $x^2 = 5$;
3. $x^2 = 0$;
4. $x^2 = -2$;
5. $x^2 < 4$;
6. $x^2 \geqslant 9$;
7. $x^2 > -2$;
8. $x^2 \leqslant -3$;
9. $4 \leqslant x^2 \leqslant 9$;
10. $-1 \leqslant x^2 \leqslant 9$;
11. $0 \leqslant x^2 \leqslant 8$;
12. $4 > x^2 > 1$.

EXERCICE 11.17.
En s'aidant éventuellement de la courbe de la fonction inverse ou de son tableau de variation, compléter :

1. Si $x > 3$ alors $\ldots\ldots \frac{1}{x} \ldots\ldots$
2. Si $x < -\sqrt{2}$ alors $\ldots \frac{1}{x} \ldots$
3. Si $x > 2$ alors $\ldots\ldots \frac{1}{x} \ldots\ldots$
4. Si $x < -3$ alors $\ldots \frac{1}{x} \ldots$
5. Si $x < 4$ alors $\ldots\ldots \frac{1}{x} \ldots\ldots$
6. Si $x > -10$ alors $\ldots \frac{1}{x} \ldots$
7. Si $x < 1$ alors $\ldots\ldots \frac{1}{x} \ldots\ldots$
8. Si $x > -5$ alors $\ldots \frac{1}{x} \ldots$

EXERCICE 11.18.
Calculer $\sqrt{x^2}$ dans les cas suivants :

- $x = 3$
- $x = -3$
- $x = 2$
- $x = -2$

En déduire la valeur de $\sqrt{x^2}$.

11.5.2 Problèmes

PROBLÈME 11.1.
On donne les fonctions f, g et h suivantes :

- $f : x \mapsto x$;
- $g(x) = x^2$;
- $h(x) = x^3$.

Leurs courbes sont notées, respectivement, $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$.
Sur $[O; +\infty[$, étudier les positions relatives :

1. de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_g$;
2. de $\mathscr{C}_g$ et de $\mathscr{C}_h$;
3. de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_h$.

PROBLÈME 11.2.
Accoudée à son balcon, Morgan laisse échapper son téléphone portable.
La hauteur h par rapport au sol, en mètre, à laquelle le téléphone se situe après t secondes de chute est donnée par la relation : $h(t) = -4{,}90t^2 + 15$.

1. De quelle hauteur Morgan lâche-t-il son téléphone ?
2. Au bout de combien de temps passe-t-il au 3e étage situé à une hauteur de 9 mètres ?
3. Combien de temps s'écoule-t-il pour que le téléphone atteigne le sol ?

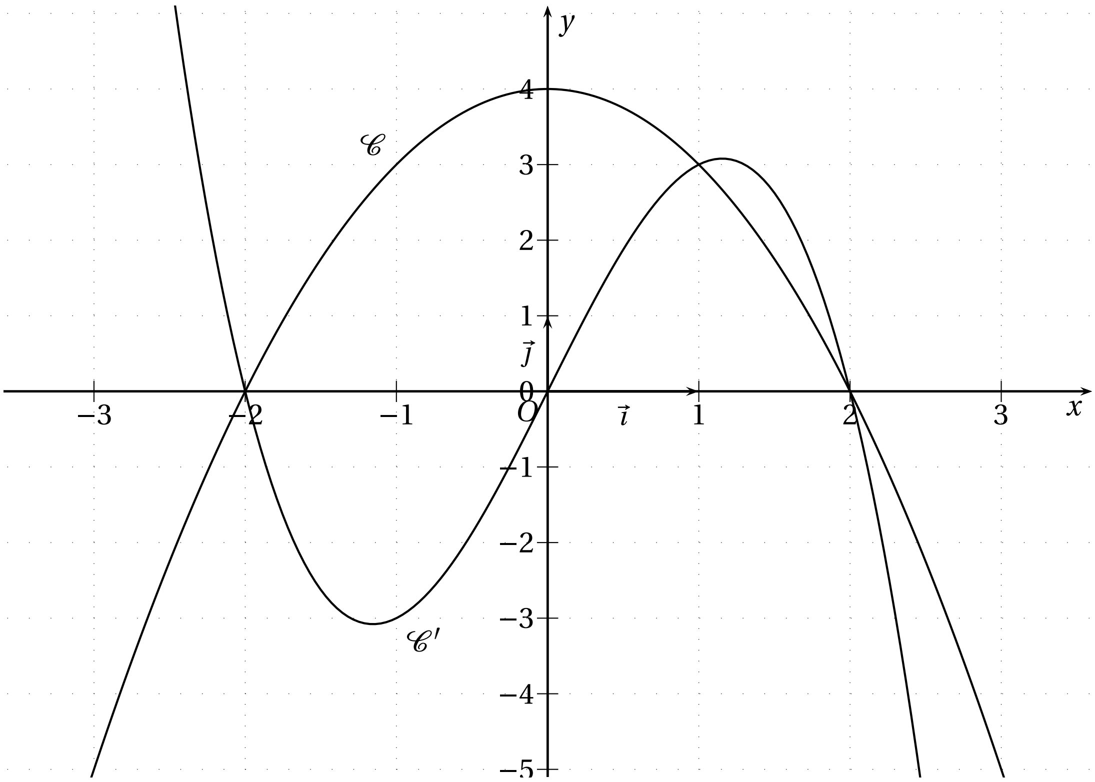
PROBLÈME 11.3.
Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f : x \mapsto -x^3 + 4x$ et $g(x) = -x^2 + 4$. On a tracé sur le graphique 11.1 page suivante les courbes représentatives de f et de g.

1. Associer chaque courbe à la fonction qu'elle représente. Justifier succintement.
2. Déterminer graphiquement le nombre de solution des équations :
   - $f(x) = 0$;
   - $g(x) = 0$;
   - $f(x) = g(x)$.
3. Résoudre par le calcul : $f : (x) = 0$ et $g(x) = 0$
4. Résoudre graphiquement : $f(x) \leqslant g(x)$.
5. Un logiciel de calcul formel affiche les choses suivantes :

```
(%i1) factor(-x^3+x^2+4*x-4);
(%o1)        - (x - 2) (x - 1) (x + 2)
```

   (a) Interpréter ces deux lignes.
   (b) En déduire une résolution algébrique de l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

FIGURE 11.1: Graphique de l'exercice 11.3



PROBLÈME 11.4.
On appelle *distance entre deux nombres réels a et b*, la distance entre les points A et B d'abscisses respectives a et b sur la droite réelle munie d'un repère $(O; \vec{\imath})$.

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer la distance entre les deux nombres réels :
   - 2 et 3
   - −1 et 3
   - 0 et 3
   - 3 et −1
   - −2 et −4
   - 0 et −3

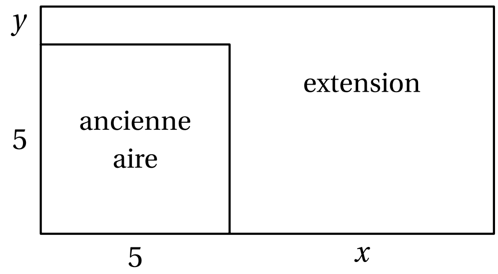
2. Conjecturer le lien entre distance entre deux réels et valeur absolue.
   En se basant sur les deux dernières distances calculées dans la question précédente, donner une nouvelle définition de $|x|$.

3. On appelle *centre de l'intervalle* $[a; b]$ le nombre $\frac{a+b}{2}$ et *amplitude de l'intervalle* $[a; b]$ le nombre $b-a$.

   (a) Traduire « $x \in [2; 4]$ » en termes de distance entre des nombres.

   (b) Traduire les inégalités suivantes en intervalles :
   - $|x-1| \leqslant 2$
   - $|x+2| < 3$
   - $|x-1| \geqslant 4$
   - $|x+3| > 1$

PROBLÈME 11.5.
La petite station balnéaire de Port-Soleil est de plus en plus fréquentée. Aussi pour satisfaire les vacanciers, le maire a-t-il décidé d'agrandir l'aire de jeu. Actuellement, cette aire a la forme d'un carré de 5 mètres de côté. Le responsable du projet propose d'allonger chacun de ses côtés pour lui donner la forme rectangulaire ci-dessous :



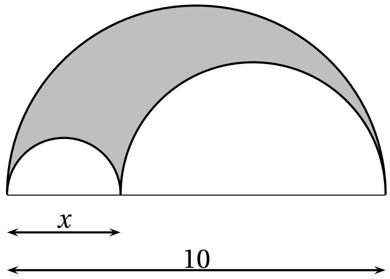
1. Exprimer l'aire de cette nouvelle aire de jeu en fonction de x et y.
2. Les contraintes budgétaires de la commune font que la surface de la nouvelle aire de jeu devra être de 100 mètres carrés.
   Démontrer que $y = \frac{100}{5+x} - 5$.
   Quelle information le maire doit-il donner à l'entrepreneur : x, y ou les deux ?
3. On considère la fonction f définie pour $x \geqslant 0$ par $f : x \mapsto \frac{100}{5+x} - 5$.
   (a) La valeur de y est limitée à 5 mètres par le bord de mer. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
   (b) Représenter la fonction f avec la calculatrice sur l'intervalle $[5\,;15]$.
   (c) Quelles semblent être les variations de f sur l'intervalle $[5\,;15]$?
   (d) Parmi les deux valeurs suivantes de x, laquelle donne à la nouvelle aire de jeu la plus grand périmètre : $x_1 = 5$ m ou $x_2 = 10$ m ?

PROBLÈME 11.6.
Montrer que le somme du produit de trois entiers consécutifs $n-1$, n et $n+1$ et de l'entier n est le cube d'un entier.

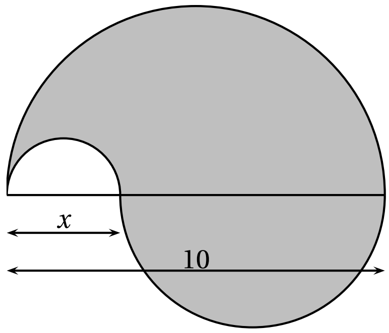
PROBLÈME 11.7.
Choisir un nombre entier, élever le nombre suivant et le nombre précédent cet entier au carré, puis faire la différence de ces deux carrés : on obtient un multiple du nombre choisi. Pourquoi ?

PROBLÈME 11.8.
Choisir quatre nombres entiers consécutifs, puis faire le produit du plus petit et du plus grand, puis faire le produit des deux nombres. Que remarque-t-on ? Est-ce toujours vrai ? Le démontrer.

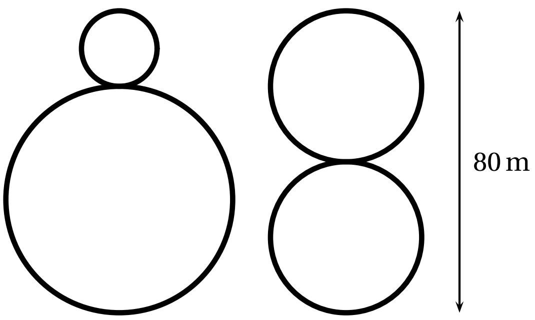
PROBLÈME 11.9.
Soit x un nombre strictement compris entre 0 et 10. Calculer le périmètre de la figure grisée en fonction du nombre x. Que constate-t-on ?



PROBLÈME 11.10.
Soit x un nombre strictement compris entre 0 et 10. Calculer l'aire de la surface grisée en fonction de x.

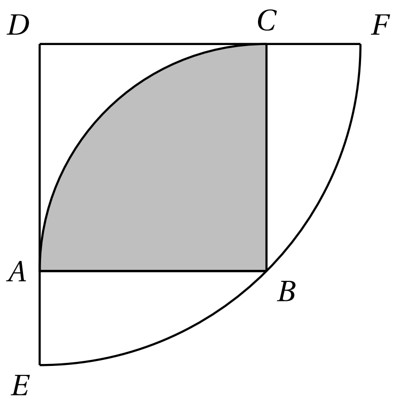


PROBLÈME 11.11.
Oscar et Alix doivent tracer sur la plage un circuit de karting. Ils souhaitent construire un circuit en forme de 8 et disposent de 80 mètres de plage. Sur la figure ci-dessous sont tracés leurs modèles respectifs, composés chacun de deux cercles tangeants ; dans le premier modèle le petit cercle est d'un rayon quelconque (compris entre 0 et 80 m) tandis que dans le second modèle les deux cercles ont même rayon. De ces deux circuits, lequel est le plus long ?

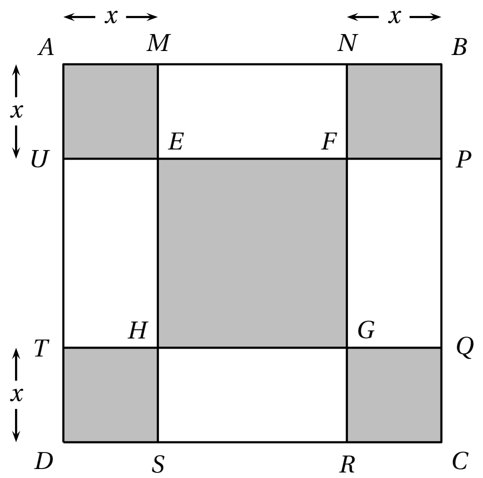


PROBLÈME 11.12.
$ABCD$ est un carré. Pour construire E et F, on a tracé un quart de cercle de centre D passant par B. On a également tracé un quart de cercle de centre B passant par A.

1. Montrer que l'aire de la surface blanche intérieure au secteur DEF est égale à l'aire de la surface grisée.
2. L'aire de la surface grisée est-elle plus grande ou plus petite que les trois quarts de l'aire du carré $ABCD$?

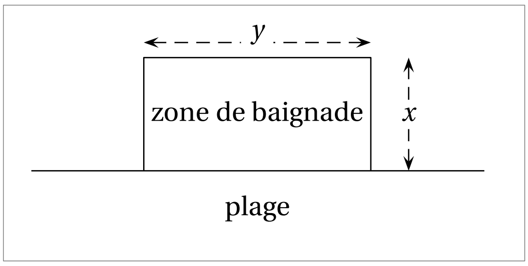


Problème 11.13.
Sur les côtés d'un carré $ABCD$ de côté 4, on place les points M, N, P, Q, R, S, T et U comme indiqué sur le dessin, où $0 \leqslant x \leqslant 2$. On note $\mathscr{A}(x)$ l'aire du domaine grisé.



1. Montrer par un raisonnement géométrique que $\mathscr{A}(x)$ peut s'écrire sous l'une des formes suivantes : $\mathscr{A}(x) = 4x^2 + (4-2x)^2$ ou $\mathscr{A}(x) = 16 - 4x(4-2x)$.
2. Montrer que l'on a aussi : $\mathscr{A}(x) = 8x^2 - 16x + 16$.
3. En utilisant la forme la plus adaptée, calculer $\mathscr{A}(2)$ puis $\mathscr{A}(\sqrt{3})$.
4. (a) Montrer que : $\mathscr{A}(x) = 8(x-1)^2 + 8$.
   (b) En déduire que l'aire $\mathscr{A}(x)$ est minimale pour $x = 1$.
5. (a) Montrer que : $\mathscr{A}(x) = (2x-1)(4x-6) + 10$.
   (b) En utilisant l'expression précédente de $\mathscr{A}(x)$, déterminer les valeurs de x telles que l'aire $\mathscr{A}(x)$ soit égale à 10.

Problème 11.14.
Les maîtres nageurs d'une plage disposent d'un cordon flottant d'une longueur de 400 m avec lequel ils délimitent la zone de baignade surveillée, de forme rectangulaire.
Le problème est de déterminer les dimensions de ce rectangle pour que l'aire de baignade soit maximale.
On appelle x la largeur du rectangle et y sa longueur.



1. Expression de l'aire de la zone de baignade
   .
   (a) Calculer l'aide de la zone de baignade lorsque $x = 50$ m et lorsque $x = 100$ m.
   (b) Quelles sont les valeurs posibles pour x ?
   (c) Sachant que la longueur du cordon est de 400 m, exprimer y en fonction de x.
   (d) Exprimer, en fonction de x, l'aire $\mathscr{A}(x)$ de la zone de baignade. Sur quel intervalle cette fonction est-elle définie ?
2. Recherche graphique de l'aire maximale.
   (a) Représenter dans un repère aux unités bien choisies la courbe de $\mathscr{A}$.
   (b) Pour quelle(s) valeur(s) de x, l'aire semble-t-elle maximale ?
3. Recherche par le calcul de l'aire maximale.
   (a) Démontrer que pour tout $x \in [0; 400]$, $\mathscr{A}(x)$ peut s'écrire sous la forme :
   $$\mathscr{A}(x) = 20000 - 2(x-100)^2$$
   (b) Peut-on obtenir une aire de 22 000 m^2 ? Justifier.
   (c) Quelle est l'aire maximale qu'on peut obtenir ? Quelles sont alors les dimensions du rectangle ?