

Chapitre 10

Proportions et évolutions

Sommaire

10.1 Proportions	93
10.2 Évolutions	94
10.3 Exercices	95
10.3.1 Proportions	95
10.3.2 Évolutions	98

10.1 Proportions

ACTIVITÉ 10.1.

Il y a 16 garçons dans une classe de 26 élèves. Quel est la proportion des garçons dans cette classe?

Définition 10.1. On a les définitions suivantes :

Population : Une *population* E est un ensemble faisant l'objet d'une étude statistique.

Sous-population : Un échantillon d'individus (ou partie ou sous-ensemble) d'une population E est une *sous-population* de E .

Élément : Un élément de la population est un *individu*.

Effectif : Le nombre d'individus de la population est l'*effectif* de la population.

Définition 10.2. Soit A une sous-population d'effectif n_A d'une population E d'effectif n_E . La proportion p_A (ou fréquence) de A dans E est le quotient défini par

$$p_A = \dots\dots$$

Exemple. Une classe comporte 18 filles et 12 garçons.

Les élèves de cette classe forment une population E d'effectif $n_E = \dots\dots$

La population F des filles de la classe est une sous-population de E d'effectif $n_F = \dots\dots$

La proportion de F dans E , c'est-à-dire la proportion des filles dans la classe, est $p_F = \dots\dots$

Remarques.

- Une proportion est un nombre réel compris entre ... et ... et n'a pas d'unité.
- Une proportion s'exprime souvent sous forme de pourcentage.
On écrit aussi bien $p = \frac{3}{5}$ ou $p = \dots\dots$ ou $p = \dots\dots$
- Si on connaît deux des trois nombres n_A , n_E et p_A , on peut calculer le troisième :

$$\text{Comme } p_A = \frac{n_A}{n_E} \quad \text{alors } n_A = \dots\dots \quad \text{ou encore } n_E = \dots\dots$$

Par exemple, si l'on veut calculer 3 % de 240 :

On a $n_E = \dots\dots$ $p_A = \dots\dots$ Donc $n_A = \dots\dots$

10.2 Évolutions

ACTIVITÉ 10.2.

Au 1^{er} janvier 2 000, trois villes ont une population de 25 000 habitants.

1. Ville 1

- La population de la première ville augmente de 6 % en 2 000, en 2 001 et en 2 002.
En déduire sa population au 1^{er} janvier 2 003.
- Par quel nombre la population a-t-elle été multipliée :
 - entre le 1^{er} janvier 2 000 et le 1^{er} janvier 2 001 ?
 - entre le 1^{er} janvier 2 001 et le 1^{er} janvier 2 002 ?
 - entre le 1^{er} janvier 2 002 et le 1^{er} janvier 2 003 ?

Ce nombre s'appelle le *coefficient multiplicateur* correspondant à une augmentation de 6 %.

- Par quel nombre la population a-t-elle été multipliée entre le 1^{er} janvier 2 000 et le 1^{er} janvier 2 003 ?
À quel pourcentage d'augmentation cela correspond-il ?

2. Ville 2

Le 31 décembre 2 000, la deuxième ville a une population de 26 400 habitants.

Calculer le coefficient multiplicateur correspondant et en déduire le pourcentage d'augmentation.

3. Ville 3

La population de la troisième ville diminue de 6 % durant l'année 2 000.

- Calculer sa population à la fin 2 000, puis le coefficient multiplicateur correspondant.
- Si la population augmente de 6 % l'année suivante, calculer sa population à la fin 2 001.
En déduire le pourcentage global d'évolution sur les deux années de début 2 000 à fin 2 001.

Définition 10.3. Dire qu'une quantité Q évolue de $t\%$, où t est un réel quelconque, signifie que Q est multiplié par $k = (1 + \frac{t}{100})$ qui est appelé *coefficient multiplicateur* correspondant à une évolution de $t\%$.

Remarque. Cette évolution est une augmentation si t est positif et une diminution si t est négatif.

Propriété 10.1. Le taux d'évolution t d'une grandeur passant de la valeur initiale $V_I \neq 0$ à la valeur finale V_F est donné par : $t = \frac{V_F - V_I}{V_I} \times 100$.
Le coefficient multiplicateur k d'une grandeur passant de la valeur initiale $V_I \neq 0$ à la valeur finale V_F est donné par : $k = \frac{V_F}{V_I}$.
On a de plus $t = (k - 1) \times 100$.

Preuve.

- $V_F = V_I \times (1 + \frac{t}{100}) \Leftrightarrow V_F = V_I + V_I \times \frac{t}{100} \Leftrightarrow V_F - V_I = V_I \times \frac{t}{100} \Leftrightarrow \frac{V_F - V_I}{V_I} = \frac{t}{100} \Leftrightarrow t = \frac{V_F - V_I}{V_I} \times 100$.
- On a vu que $V_F = V_I \times k$ donc $k = \frac{V_F}{V_I}$.
- Par définition $k = 1 + \frac{t}{100} \Leftrightarrow k - 1 = \frac{t}{100} \Leftrightarrow t = (k - 1) \times 100$.

◇

Évolutions successives

Définitions 10.4. Soit t et t' deux taux d'évolution.

Lorsqu'on applique à une quantité Q une évolution de $t\%$ pour obtenir une quantité Q' et qu'on applique à la quantité Q' une évolution de $t'\%$ pour obtenir une quantité Q'' , on dit que Q a subi deux évolutions *successives* de $t\%$ et de $t'\%$.

Le taux d'évolution permettant de passer de Q à Q'' est appelé *taux d'évolution globale*.

Évolutions réciproques

Définition 10.5. Soit t et t' deux taux d'évolution successifs. Si le taux d'évolution globale est nul alors on dit que t et t' sont des *évolutions réciproques*.

10.3 Exercices

10.3.1 Proportions

EXERCICE 10.1.

Les questions sont indépendantes.

1. 35,89 millions de foyers fiscaux ont été recensés en France en septembre 2013. Sur ce total, 18,94 millions d'entre eux étaient imposables au titre de leur revenu de 2012.
Calculer la proportion des foyers imposables en septembre 2013. Traduire le résultat avec un pourcentage arrondi à 0,01 près.
2. Dans une grande entreprise, les $\frac{5}{6}$ des 720 employés sont des commerciaux.
Combien y a-t-il de commerciaux dans l'entreprise?
3. Dans une administration, 23 employés sont des personnels administratifs, ce qui représente 18% des employés.
Combien y a-t-il d'employés dans cette administration?

EXERCICE 10.2.

Les questions sont indépendantes.

- Un lycéen a travaillé pendant les vacances. Sur sa feuille de paye est inscrit :
 - Salaire brut : 1 200,00 €
 - Retenue Sécurité Sociale : 151,20 €
 Quel pourcentage du salaire brut, la retenue représente-t-elle?
- En 2 004, la population active française comptait 27 455 000 individus, dont 12 680 000 femmes. Quel pourcentage de la population active représentaient les femmes?
- 28 % de la surface du territoire français, ce qui représente environ 154 000 km², est constitué de terrain boisé (forêts, etc.). Quelle est la surface totale du territoire français?
- Lors de l'achat d'un article coûtant 1 625 €, je dois verser un acompte de 130 €. Quel pourcentage de la somme totale cet acompte représente-t-il?
- Lors de l'achat d'un autre article, je dois verser un acompte de 15 %, et il me restera alors à déboursier 1 700 €. Quel est le prix de cet article?
- Dans la commune de Vachelle, sur 1 742 votants, 42 % ont choisi le candidat DESIRE. Combien cela fait-il de voix?
 - M. DESIRE a obtenu 428 voix sur 1 312 votants à Port-Blanc et 323 voix sur 918 votants à Saint-André. Où a-t-il fait le meilleur score en pourcentage?

EXERCICE 10.3.

Le tableau ci-dessous donne la répartition des filles dans trois classes de Première ES d'un Lycée.

Classe	A	B	C
Filles	10	8	9
Élèves	40	20	18

Déterminer la proportion de filles dans chacune des classes. Que constate-t-on?

EXERCICE 10.4.

Les questions sont indépendantes.

- Une personne passe une petite annonce dans un journal diffusé dans 18 % des foyers d'un département. Elle passe aussi cette annonce dans un autre journal diffusé, lui, dans 25 % des foyers du département. À quelle condition cette personne peut-elle espérer que son annonce touche 43 % des foyers du département? Pourquoi?
- Vrai ou faux? Dans une entreprise 21 % des employés a moins de 25 ans et 36 % a plus de 45 ans; donc 43 % du personnel de cette entreprise a entre 25 et 45 ans.
- Dans cette entreprise, 40 % des employés ont suivi le stage de formation en comptabilité, tandis que 48 % ont suivi le stage d'anglais. Sachant que 35 % des employés ont suivi ces deux stages, quel pourcentage des employés de l'entreprise peut prétendre avoir suivi au moins l'un des deux stages?
- Vrai ou faux? Dans cette même entreprise, 18 % des employés (hommes) a une ancienneté inférieure à 5 ans, tout comme 22 % des employées (femmes). Donc 40 % des employés de l'entreprise a une ancienneté inférieure à 5 ans.

EXERCICE 10.5.

Dans un établissement scolaire, il y a 30 % de garçons et 30 % des filles sont internes. Sachant que le pourcentage d'internes dans l'établissement est de 27 %, quel est le pourcentage de garçons internes?

EXERCICE 10.6.

Il y a 800 élèves au Lycée JACQUES CARTIER. dans ce Lycée :

- 15 % des élèves de Lycée sont des filles de Première;
- 48 % des élèves de Première sont des filles;
- 25 % des filles du Lycée sont en Première.

1. Calculer l'effectif des filles de Première.
2. En déduire l'effectif des élèves de Première, puis des filles dans ce Lycée.

3. Compléter le tableau des effectifs :

	Fille	Garçon	Total
Première			
Autres			
Total			

4. Calculer le pourcentage d'élèves de Première dans ce Lycée.

EXERCICE 10.7.

Dans une entreprise, 70 % des salariés sont des hommes, 6 % des femmes sont cadres et 4 % des hommes sont cadres.

1. Quel est le pourcentage des cadres dans cette entreprise?
2. Faire un tableau, en pourcentages de salariés de l'entreprise, résumant la situation.
3. L'entreprise compte 23 cadres. Quel est le nombre total de salariés?
4. Faire un tableau, en nombres de salariés de l'entreprise, résumant la situation.

EXERCICE 10.8.

Les questions sont indépendantes.

1. Un Lycée compte 1 250 élèves; 26 % d'entre eux sont en classe de Première et 24 % des élèves de Première sont en Première ES.
 - (a) Quel calcul doit-on effectuer pour déterminer le nombre d'élèves de Première du Lycée?
 - (b) Quel calcul doit-on faire pour déterminer le nombre d'élèves en Première ES dans ce Lycée?
 - (c) Combien y a-t-il d'élèves en Première ES dans ce Lycée? Quel pourcentage cela représente-t-il vis-à-vis de l'ensemble des lycéens?
 - (d) Quel calcul aurait-on pu faire directement pour déterminer ce pourcentage?
2. 75 % des foyers d'un pays ont une connexion Internet, dont 80 % de type ADSL. Quel est le pourcentage de foyers équipés d'une connexion ADSL dans ce pays?

3. Dans une population, 65 % des individus partent en vacances et 20 % de ceux qui partent en vacances vont à la montagne. Quelle est la proportion de départs à la montagne dans cette population ?

EXERCICE 10.9.

Les questions sont indépendantes.

1. Considérons les statistiques (fictives) suivantes :

- en janvier 2 004 : 2 183 500 chômeurs, dont 624 200 jeunes (moins de 25 ans) ;
- en janvier 2 005 : 2 008 700 chômeurs, dont 617 400 jeunes.

Le nombre de chômeurs a-t-il diminué ? Le nombre de jeunes chômeurs a-t-il diminué ? Le pourcentage de jeunes chômeurs parmi l'ensemble des chômeurs a-t-il diminué ?

2. Voici les chiffres d'affaires d'une entreprise (fictive) pendant quatre ans :

Année	1 997	1 998	1 999	2 000
CA (en millions d'€)	35	38	41	44

- (a) De combien de millions d'euros, d'une année sur l'autre, augmente le chiffre d'affaire ?
 (b) De combien de millions d'euros en pourcentage, d'une année sur l'autre, augmente le chiffre d'affaire ?

10.3.2 Évolutions**EXERCICE 10.10.**

Les questions sont indépendantes.

1. Calculer les coefficients multiplicateurs dans chacun des cas suivants :

- hausse de 20 % ; • hausse de 0,1 % ; • hausse de 100 % ; • hausse de 300 % ;
- baisse de 15 % ; • baisse de 5,2 % ; • baisse de 85 % ; • baisse de 100 %.

2. Donner les pourcentages de hausse ou de baisse associés aux coefficients multiplicateurs suivants :

- 1,25 ; • 3 ; • 1,0049 ; • 0,5 ;
- 0,98 ; • 1,001 ; • 1,0101 ; • 0,999 ;
- 1,175 ; • 1,01 ; • 0,875 ; • 0,1.

3. Donner le pourcentage d'évolution pour une grandeur qui passe :

- de 12 540 à 13 620 ; • de 5,7 à 2,6 ; • 21 000 à 84 000.

EXERCICE 10.11.

Les questions sont indépendantes.

1. En août un loyer était de 564 €. Un an plus tard il est de 589 €. Quelle est son évolution en pourcentage ?
2. Le chiffre d'affaire d'une entreprise en 2 004 était de 124 000 €. En 2 005, les prévisions donnent un chiffre d'affaire de 117 000 € seulement. Quelle est son évolution en pourcentage ?

3. Pour un même produit, le magasin A propose 20 % de produit en plus pour la même prix et le magasin B propose 20 % de remise sur le prix pour une même quantité.
Si 1 Kg de produit coûte 100 euros, quelle est la proposition la plus avantageuse pour le client?
4. Après une augmentation de 15 %, un produit coûte 89,70 €. Quel était son prix initial?

EXERCICE 10.12.

Dire que la TVA est de 19,6 % revient à dire que le prix hors taxe (HT) a été augmenté de 19,6 % de TVA pour obtenir le prix toutes taxes comprises (TTC).

1. Par quel nombre doit-on multiplier le prix HT pour obtenir le prix TTC?
2. Un article vaut 120 € HT. Combien va-t-on le payer en magasin?
3. Vous payez un article en magasin (donc TTC) à 200 €. À combien s'élève le prix HT et la TVA en €?
4. Laquelle de ces deux propositions est la plus avantageuse :
 - Proposition 1 : Faire une remise de 10 % sur le prix HT, puis appliquer la TVA.
 - Proposition 2 : Appliquer la TVA, puis faire une remise de 10 % sur le prix TTC.

EXERCICE 10.13.

Les questions sont indépendantes.

1. Au moment des soldes, un magasin propose une baisse de 10 % sur un article, suivie d'une nouvelle baisse de 20 % sur ce même article. Quel est le taux d'évolution globale de cet article?
2. Le prix d'un article augmente de 22 % puis diminue de 15 %. Quel est le taux d'évolution globale de cet article?
3. Le prix d'un produit subit successivement une hausse de 12 %, une baisse de 5 %, une baisse de 8 % et une hausse de 2 %. Quel est le taux d'évolution globale du prix de ce produit?
4. Si le nombre de chômeurs dans une ville diminue de 2 % par mois pendant un an, quel sera le taux d'évolution globale du nombre de chômeurs sur l'année?
5. Un client veut acheter un véhicule qui coûtait 17 000 € le mois dernier mais qui, depuis, a augmenté de 4 %. Le vendeur consent une remise de 3,85 %. Le modèle coûte-t-il plus ou moins de 17 000 €?

EXERCICE 10.14.

Les questions sont indépendantes.

1. Après une augmentation de 5 % suivie d'une hausse de t %, on obtient une hausse globale de 17,6 %. Combien vaut t ?
2. À la bourse de Paris, l'action Renault :
 - a augmenté de 1,45 % entre le 10 juin 2 000 et le 11 juin 2 000 ;
 - a baissé de 0,5 % entre le 10 juin 2 000 et le 12 juin 2 000.

Quelle a été son évolution entre le 11 juin 2 000 et le 12 juin 2 000?

3. Après deux augmentations successives de t % le prix d'un produit a globalement augmenté de 20 %. Combien vaut t ?

4. Après une augmentation de t % suivie d'une baisse de t %, on obtient une baisse globale de 4 %. Combien vaut t ?
5. Un article subit une augmentation de 10 %. Quel est le taux d'évolution réciproque ?

EXERCICE 10.15.

Les questions sont indépendantes.

1. Est-il pertinent de dire que 3 augmentations successives de 2 % sont approximativement équivalentes à une augmentation globale de 6 % ?
2. Est-il pertinent de dire qu'une hausse de 1 % suivie d'une baisse de 3 % suivie d'une hausse de 2 % sont approximativement équivalentes à une évolution globale de 0 % ?
3. Est-il pertinent de dire que 3 augmentations successives de 20 % sont approximativement équivalentes à une augmentation globale de 60 % ?