Chapitre 3

Généralités sur les fonctions

Sommaire

3.1 Problème d'introduction

Le problème : Nous nous situons en 2008, dans le contexte suivant :

« Le prix du riz à l'exportation a doublé depuis février 2007 pour atteindre un sommet historique en février 2008 avec un prix de plus de 40 centimes par kg. Ce phénomène n'a pas été sans causer des problèmes de nutrition dans les régions du monde les moins riches, pour lesquelles le riz est souvent la base de l'alimentation. Cependant cette tendance, d'après un prévisionniste, devrait s'inverser ; selon lui, le prix du riz devrait baisser d'environ 2 centimes par kg. »

Nous sommes le 1$^{\text{er}}$ mars 2008, juste avant cette future baisse et le prix au kg du riz est encore de 40 centimes par kg.

Un fermier estime que s'il effectue sa récolte de riz, il obtiendra 1 200 kg, mais il peut encore attendre. Il sait que pour chaque semaine d'attente, la récolte augmentera de 87 kg mais que le prix au kg va baisser de 2 centimes par kg.

Problème : Quand devra-t-il effectuer sa récolte pour maximiser ses bénéfices ?

Travail préparatoire : On appelle :

- t le temps, en semaine, mesuré à partir du 1er mars,
- q la quantité de kg de riz que le fermier peut récolter en fonction du nombre de semaines t,
- p le prix du kg de riz en fonction du nombre de semaines t,
- r la recette en centime qu'il peut obtenir de la vente de sa récolte en fonction du nombre de semaines t.

1. Si on se fie au prévisionniste, dans combien de semaines le riz atteindra un prix de 0 centime par kg ? En déduire entre quelles valeurs peut varier t.
2. Calculer la quantité q et le prix p dans le cas où le nombre de semaines d'attente est $t = 2$, $t = 5$, $t = 15$ puis, dans chaque cas, la recette r que le fermier pourrait obtenir par la vente de sa récolte.
3. Plus généralement, déterminer les formules, *en fonction du nombre de semaines t*, qui donnent :
   - la quantité q, en kg,
   - le prix p, en centime par kg,
   - la recette r, en centime.

Utilisation de la calculatrice : Entrer dans $Y1$, $Y2$ et $Y3$ (ou $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ selon les calculatrices) les formules qui donnent, en fonction du nombre de semaines x, respectivement :

- la quantité q, en kg,
- le prix p, en centime par kg,
- la recette r, en centime.

Tableau de valeurs : À l'aide des résultats obtenus, compléter le tableau suivant :

t en semaine	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
r en centime											

Graphique : En utilisant le graphe de la calculatrice, sur lequel on n'affichera que la courbe représentative de r, répondre aux questions suivantes.

On note $r(t)$ la recette en fonction du nombre de semaines t. Ainsi $r(2) = 49\,464$ centimes car après une attente de $t = 2$ semaines, on peut obtenir graphiquement ou dans le tableau de valeurs que la recette est de 49 464 centimes.

1. Pour quelle valeurs de t, peut-on déterminer $r(t)$?
2. Quel est la recette pour une attente de 5 semaines ?
   Compléter $r(5) =$ ....
   On dit que :
   - 5 a pour image .... par la fonction r ;
     est l'image de 5 par la fonction r ;
   - .... a pour antécédent 5 par la fonction r ;
     5 est un antécédent de .... par la fonction r.
3. Pour quel nombre de semaines, la recette est-elle de 49 000 centimes ? De 10 000 centimes ?
   Compléter :

- 49 000 a pour antécédent(s) .... par la fonction r
- 10 000 a pour antécédent(s) .... par la fonction r

4. (a) Déterminer l'image de 1, de 2, de 3 et de 4 par la fonction r.
   (b) Peut-on déterminer l'image de 25 par la fonction r ? Pourquoi ?
   (c) Résoudre par lecture graphique :
   - l'équation $r(t) = 20000$.
     Que signifie la réponse à cette question ?
   - l'inéquation $r(t) > 40000$.

Résolution du problème : À l'aide du tableau de valeurs, en réglant éventuellement les paramètres du tableau, ou du graphique en réglant éventuellement la fenêtre d'affichage ou en utilisant les fonctionnalités de la calcultrice, résoudre le problème.

3.2 Premières notions (bilan et compléments)

Définition 3.1 (Notion de fonction)**.** Une fonction est un procédé qui, à un élément x d'un ensemble de départ, associe au plus un élément y d'un ensemble d'arrivée.
On notera $f : x \mapsto y$ ou $f : x \mapsto f(x)$ qui se lit « f est la fonction qui à x associe y (ou $f(x)$) »..
On dit que y est *l'image* de x.
On dit que x est *un antécédent* de y.

Définition 3.2 (Ensemble de définition)**.** L'ensemble des réels x possédant une image par une fonction numérique f est appelé *l'ensemble de définition de la fonction* f. On le note souvent D_f.

Définition 3.3 (Représentation graphique)**.** Dans un plan muni d'un repère, la *représentation graphique* de la fonction f est l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ du plan tels que :

- L'abscisse x de M décrit l'ensemble de définition D_f ;
- L'ordonnée y est l'image de x par f : $y = f(x)$.

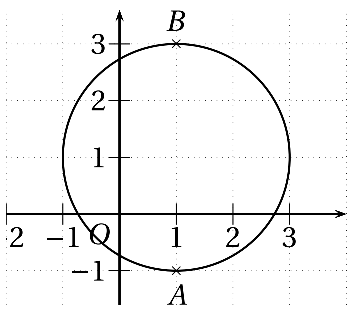
On note souvent $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f. On dit que $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = f(x)$.
Si la courbe est d'un seul « tenant » on parle de *courbe représentative* de la fonction f.

Remarque. L'équation permet de déterminer si un point $A(x_A; y_A)$ appartient ou pas à cette courbe. En effet, un point appartient à la courbe si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de la courbe. On a alors :

$$A \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow y_A = f(x_A)$$

Dans la pratique, pour les fonctions numériques définies par une expression algébrique, pour esquisser une représentation graphique, on utilise souvent un tableau de valeurs.

Remarque. Une courbe ne représente pas toujours une fonction. Sur la figure ci-contre, par exemple, la courbe a plusieurs points ayant la même abscisse, comme $A(1, -1)$ et $B(1,3)$. Ce n'est donc pas la courbe représentative d'une fonction car alors 1 aurait plusieurs images.

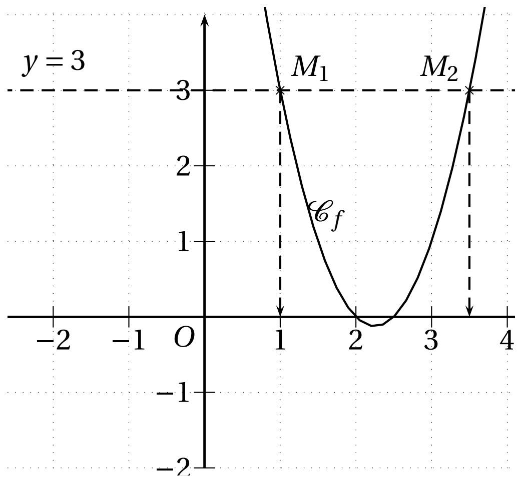


3.3 Résolutions graphiques d'équations et d'inéquations

3.3.1 Résolutions d'équations de la forme $f(x) = k$

Résoudre l'équation $f(x) = k$ c'est déterminer tous les antécédents éventuels d'un élément k de l'ensemble d'arrivée, c'est-à-dire chercher tous les x de l'ensemble de départ tels que $f(x) = k$.
Une telle recherche peut se faire graphiquement à partir de la représentation graphique de la fonction f.

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto 2x^2 - 9x + 10$. On recherche les solutions de l'équation $f(x) = 3$.
On commence par tracer soigneusement la courbe représentative de f et on obtient la représentation donnée sur la figure ci-contre.
On cherche les points de la courbe ayant pour ordonnée 3. Pour cela on peut tracer la droite d'équation $y = 3$ et chercher les points d'intersection de cette droite avec la courbe de f.
On obtient ici deux points $M_1(1;3)$ et $M_2\left(\frac{7}{2};3\right)$. Les solutions sont leurs abscisses : 1 et $\frac{7}{2}$.
On écrit : « Les solutions de l'équation $f(x) = 3$ sont $x = 1$ ou $x = \frac{7}{2}$ car les points de la courbe de f d'ordonnée 3 ont pour abscisses 1 et $\frac{7}{2}$ ».



3.3.2 Résolutions d'inéquations de la forme $f(x) \leqslant k$

Ces inéquations peuvent se résoudre graphiquement. On procède de la façon suivante :

- on trace soigneusement $\mathscr{C}_f$ dan un repère (orthogonal) ;
- on trace la droite d'équation $y = k$;
- on recherche les points de la courbe situés *sous* la droite ;
- l'ensemble des solutions est constitué des abscisses de ces points.

Exemple. Sur l'exemple précédent, si l'on doit résoudre $f(x) \leqslant 3$, après avoir tracé $y = 3$ on constate que les points de la courbe situés sous cette droite ont leurs abscisses comprises entre 0 et $\frac{5}{2}$.
Donc $f(x) \leqslant 3 \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{5}{2}\right]$.

Remarque.

- On résoud de la même manière les équations du type $f(x) \geqslant k$.

  On retient alors les abscisses des points situés *au-dessus* de la droite d'équation $y = k$.

  Dans l'exemple $f(x) \geqslant 3 \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$.

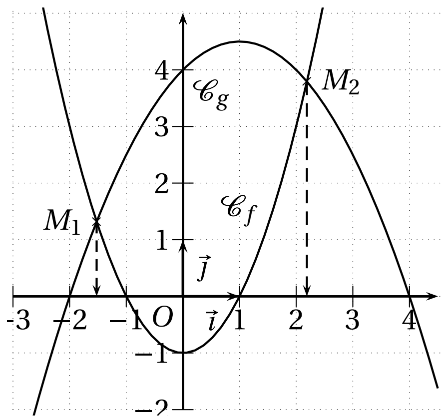
- De même pour les inéquations strictes : $f(x) > k$ ou $f(x) < k$. On excluera alors les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite.

  Dans l'exemple $f(x) < 3 \Leftrightarrow x \in \left]0; \frac{5}{2}\right[$.

3.3.3 Résolutions d'équations de la forme $f(x) = g(x)$

Cela revient à chercher les éléments de l'ensemble de départ qui ont la même image par f et par g. Une telle recherche peut se faire graphiquement. On recherche alors les points des deux courbes représentatives ayant même abscisse et même ordonnée, c'est-à-dire les points d'intersection des deux courbes.

Exemple. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par, respectivement, $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = -0{,}5x^2 + x + 4$. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.
On commence par tracer soigneusement les deux courbes représentatives et on obtient la représentation donnée sur la figure ci-contre.
On cherche les points d'intersection des deux courbes, ici M_1 et M_2, et les solutions de l'équation sont leurs abscisses dont les valeurs approximatives sont $-1{,}5$ et $2{,}2$.
Les solutions sont donc $x \approx -1{,}5$ et $x \approx 2{,}2$.



3.3.4 Résolutions d'inéquations de la forme $f(x) \leqslant g(x)$

Là encore ces inéquations peuvent se résoudre graphiquement. On procède de la façon suivante :

- on trace soigneusement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un repère (orthogonal) ;
- l'ensemble des solutions est constitué des abscisses des points où la courbe de f est située *sous* celle de g.

Exemple. Sur l'exemple précédent, si l'on doit résoudre $f(x) \leqslant g(x)$, on constate que les points de la courbe de f situés sous celle de g ont leurs abscisses comprises entre environ $-1{,}5$ et $2{,}2$.
Donc $f(x) \leqslant g(x) \Leftrightarrow x \in [-1{,}5; 2{,}2]$. Ou bien $S = [-1{,}5; 2{,}2]$.

Remarques.

- On résoud de la même manière les équations du type $f(x) \geqslant g(x)$.

  On retient alors les abscisses des points de la courbe de f situés *au-dessus* de celle de g.

  Dans l'exemple $f(x) \geqslant g(x) \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1{,}5] \cup [2{,}2; +\infty[$.

- De même pour les inéquations strictes : $f(x) > g(x)$ ou $f(x) < g(x)$. On excluera alors les abscisses des points d'intersection des deux courbes.

  Dans l'exemple $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x \in]-1{,}5; 2{,}2[$.

3.4 Exercices et problèmes

3.4.1 Premières notions

EXERCICE 3.1.
On définit f et g, deux fonctions :

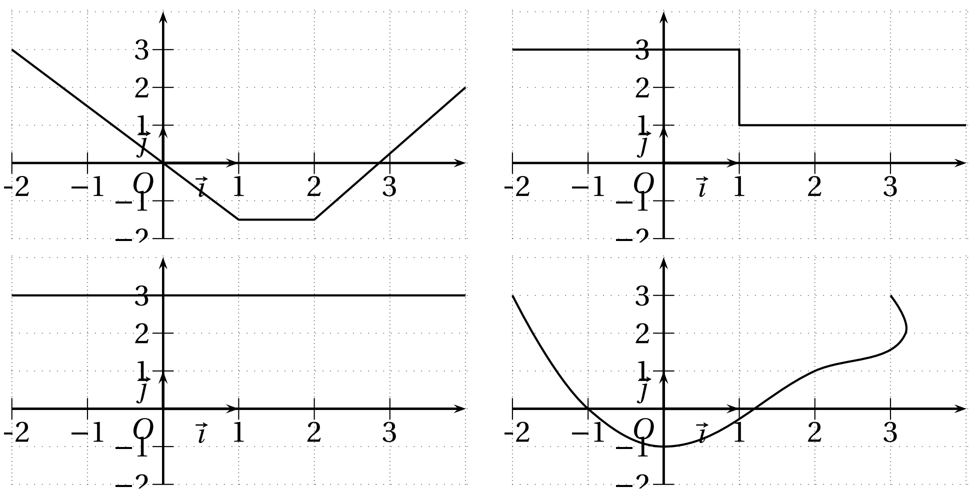
- f est la fonction qui à un nombre réel x associe le nombre obtenu en procédant de la manière suivante : on ajoute 4 au nombre, on élève le résultat obtenu au carré, on retranche 16, on divise par le nombre de départ et on retranche 6.
- $g : x \mapsto x^2 - 4$.

1. Donner l'expression correspondant à f puis simplifier cette expression.
2. Quel réel n'a pas d'image par f ?
3. Quelle est l'image de 3 par g ?
4. Quelle est l'image de -1 par g ?
5. Quels sont les antécédents éventuels de 12 par g ?
6. Quels sont les antécédents éventuels de -5 par g ?

EXERCICE 3.2.
Vrai ou faux ? *Corriger la phrase lorsqu'elle est fausse.*

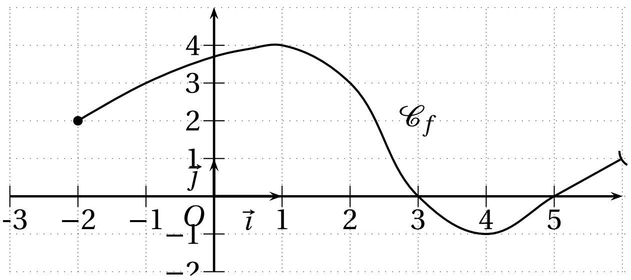
1. $f(-2) = 0$ signifie que l'image de 0 est -2
2. $f(0) = 3$ signifie que la courbe de f passe par le point $(0;3)$
3. $f(1) = 2$ signifie que l'antécédent de 1 est 2
4. L'image de 2 par f est -3 s'écrit $f(2) = -3$
5. Dire que $(5;1)$ est un point de la courbe de f s'écrit $5 = f(1)$
6. Par la fonction g, -5 est l'image de 3 s'écrit $g(-5) = 3$
7. 2 a pour image 0 par f signifie que la courbe de f traverse l'axe des abscisses en 2
8. $f(4) = 0$ signifie que la courbe de f traverse l'axe des abscisses au point $(4;0)$
9. 3 a pour image 5, signifie que 3 est l'image de 5
10. 4 a pour antécédent 5 signifie que 5 est l'image de 4

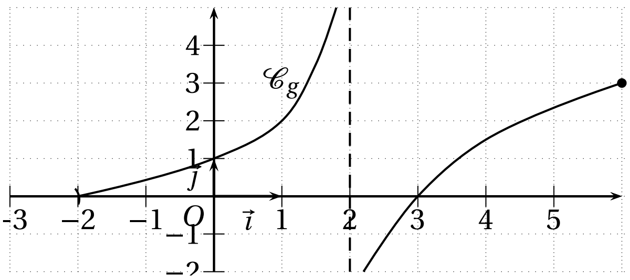
EXERCICE 3.3.
Vrai ou faux ? *Justifier la réponse lorsque c'est faux.*
Les courbes de la figure ci-dessous représentent des fonctions de la variable x.



EXERCICE 3.4.
Vrai ou faux? *Corriger la phrase lorsqu'elle est fausse.*
Les fonctions f et g sont représentées sur la figure ci-dessous.

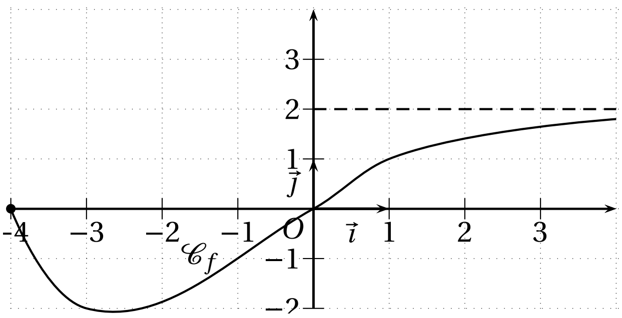
1. La fonction f est définie entre -2 et 6 inclus
2. Les images par la fonction f sont comprises entre -1 et 4 inclus
3. La fonction g est définie entre -2 exclu et 6 inclus
4. Les images par la fonction g sont comprises entre 0 exclu et 3 inclus

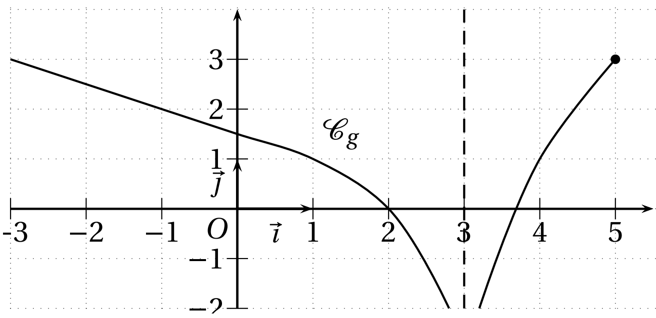




EXERCICE 3.5.
Vrai ou faux? *Corriger la proposition lorsqu'elle est fausse.*

- D'après la représentation graphique de la figure ci-dessous $D_f = [-4;2]$
- D'après la représentation graphique de la figure ci-dessous $D_g =]-\infty;3[\cup]3;5]$





EXERCICE 3.6 (Avec la calculatrice)**.**
La fonction f est définie sur $[-1{,}5;2]$ par $f : x \longmapsto 2x^3 - 1{,}5x^2 - 3x$

1. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$								

2. Tracer la courbe représentative de f.

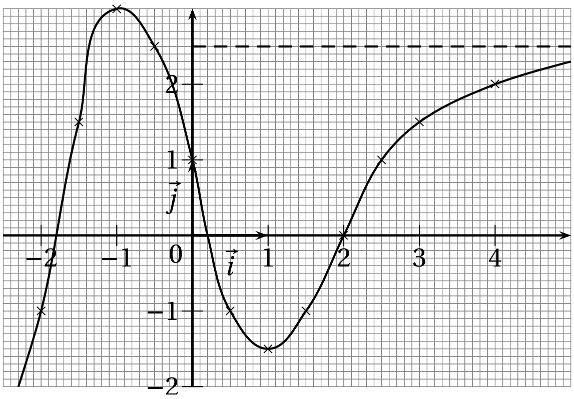
EXERCICE 3.7 (Avec la calculatrice)**.**
La fonction f est définie sur $[-3;3]$ par $f : x \longmapsto x^2 - 3x + 1$.
Après avoir dressé un tableau de valeurs de la fonction, tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

3.4.2 Résolutions graphiques

EXERCICE 3.8.
La fonction f est définie sur $[-3;3]$ par : $f : x \longmapsto x^2 - 3x + 1$.
$\mathscr{C}_f$, courbe représentative de f a déjà été obtenue dans l'exercice 3.7.

1. À l'aide de la représentation graphique $\mathscr{C}_f$, avec la précision permise par le graphique, répondre aux question suivantes :
   (a) Quelles sont les images de 2 ? de 3 ? de 4 ?
   (b) Quels sont les antécédents de 1 ? de 2 ? de -2 ?
2. Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :
   (a) $f(x) = 3$;
   (b) $f(x) = -1{,}5$;
   (c) $f(x) \geqslant -1$;
   (d) $f(x) < 4$;
   (e) $f(x) > -3$;
   (f) $f(x) < -2$.
3. Déterminer graphiquement le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

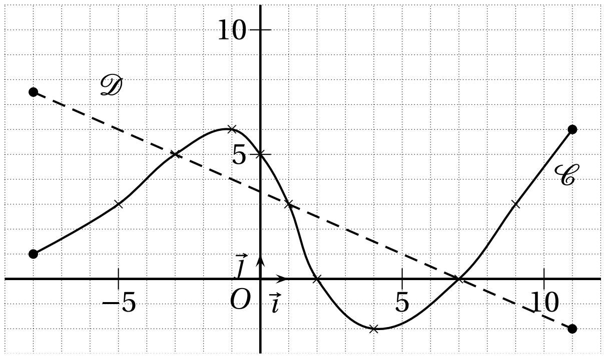
EXERCICE 3.9.
Une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est donnée par sa courbe représentative $\mathscr{C}$:



Avec la précision permise par le graphique, résoudre :

1. Les équations suivantes :
   (a) $f(x) = 1$;
   (b) $f(x) = 0$;
   (c) $f(x) = -1$;
   (d) $f(x) = 2$.
2. Les inéquations suivantes :
   (a) $f(x) \geqslant 1$;
   (b) $f(x) \geqslant 0$;
   (c) $f(x) < -1$;
   (d) $f(x) > 2$.
3. Déterminer graphiquement le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

EXERCICE 3.10.
La courbe $\mathscr{C}$ de la figure ci-dessous représente une fonction f et le segment de droite $\mathscr{D}$ représente une fonction g.



1. Résoudre graphiquement les équations :
   (a) $f(x) = 3$;
   (b) $f(x) = -2$;
   (c) $f(x) = 0$;
   (d) $f(x) = 6$.
2. Résoudre graphiquement les inéquations :
   (a) $f(x) \leqslant 0$;
   (b) $f(x) \geqslant 3$;
   (c) $f(x) > 5$.
3. Résoudre graphiquement :
   (a) $f(x) = g(x)$;
   (b) $f(x) < g(x)$.
4. Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

EXERCICE 3.11 (Avec la calculatrice)**.**
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f : x \longmapsto x^3$ et $g : x \longmapsto 3x - 2$.

1. Tracer soigneusement les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de f et g sur l'intervalle $[-2;2]$.
2. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 1$.
3. Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

EXERCICE 3.12 (Avec la calculatrice)**.**
Les fonctions f et g sont définies sur $[-2;2]$ par : $f : x \longmapsto x^3$ et $g : x \longmapsto 1 - x$.

1. Tracer sur une calculatrice graphique les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de f et de g.
2. En déduire le nombre de solutions de l'équation $x^3 + x - 1 = 0$.

3.4.3 Résolutions calculatoires

EXERCICE 3.13.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f : x \longmapsto 2x^2 + x + 3$.

1. Calculer les valeurs exactes de $f(x)$ pour les valeurs de x suivantes :
   - 0 ;
   - 1 ;
   - -2.
2. Résoudre $f(x) = 3$.

EXERCICE 3.14.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f : x \longmapsto 2x^2 - 5x + 3$.
Résoudre $f(x) = 3$.

EXERCICE 3.15.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f : x \longmapsto 4x^2 - 4x + 1$. On cherche à résoudre, par le calcul, l'équation $f(x) = 9$.

1. Factoriser $f(x)$.
2. Résoudre $f(x) = 9$.

EXERCICE 3.16.
Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par, respectivement, $f : x \longmapsto x^2 - 1$ et $g : x \longmapsto -x^2 + 2$.
Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = g(x)$.

EXERCICE 3.17.
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f : x \longmapsto x^3$ et $g : x \longmapsto 3x - 2$. On cherche à résoudre, par le calcul, l'équation $f(x) = g(x)$.

1. Développer $(x-1)^2(x+2)$.
2. En déduire les solutions de l'équation $x^3 - 3x + 2 = 0$.
3. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

EXERCICE 3.18.
On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f : x \longmapsto x(x-2)$. On cherche à trouver, par le calcul, le minimum de $f(x)$.

1. Démontrer que $f(x) = (x-1)^2 - 1$.
2. En déduire le minimum de $f(x)$.