Chapitre 1

Calculs dans l'espace

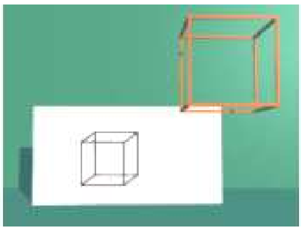
Sommaire

1.1 Perspective cavalière . . . 1
1.1.1 Principe . . . 1
1.1.2 Construction et propriétés . . . 2
1.2 Solides usuels et volumes . . . 2
1.2.1 Famille des prismes droits . . . 2
1.2.2 Famille des pyramides . . . 3
1.2.3 Sphère . . . 3
1.3 Exercices et problèmes . . . 3
1.3.1 Exercices . . . 3
1.3.2 Calculs de volumes . . . 4
1.3.3 Patrons et vues en perspective cavalière . . . 7
1.3.4 Géométrie de la sphère . . . 8
1.3.5 Divers . . . 9

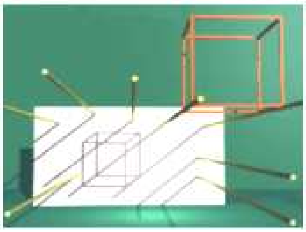
1.1 Perspective cavalière

1.1.1 Principe

Vous faites face à un écran. Une lumière placée à l'infini (le soleil ?) éclaire la scène (elle est dans votre dos). Un cube est placé devant l'écran et il projette son ombre sur cet écran.
Si les rayons du soleil ne sont pas perpendiculaires à l'écran, l'ombre du cube sur l'écran est une représentation en perspective cavalière du cube.

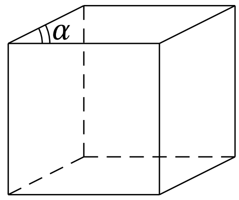


On appelle fuyante *une droite perpendiculaire à l'écran.*
Les ombres de toutes les fuyantes sont parallèles et leur direction commune dépend de celle des rayons du soleil.



1.1.2 Construction et propriétés

Construction



- L'angle α des fuyantes (droites perpendiculaires au plan de projection) vaut habituellement 30°, 45°ou 60°.
- Toutes les dimensions qui sont dans des plans parallèles au plan de projection sont représentées en vraie grandeur.
- Les dimensions qui sont portées par les fuyantes sont multipliées par un coefficient de réduction, en général compris entre 0,5 et 0,8.

Propriétés

- *Des droites parallèles sont représentées sur le dessin par des droites parallèles.*
- *Des droites sécantes sont représentées sur le dessin par des droites sécantes.*
- *Les rapports de longueur sur une droite sont conservés sur le dessin.*
  Ainsi, par exemple, le milieu d'un segment est représenté sur le dessin par le milieu du segment obtenu.

Remarques. Attention, les réciproques ne sont pas vraies. Ainsi :

- Deux droites qui semblent parallèles sur le dessin ne le sont pas toujours dans la réalité.
- Deux droites qui semblent sécantes sur le dessin ne le sont pas toujours dans la réalité.
- Un point qui semble être au milieu d'un segment dans la représentation en perspective cavalière n'est pas toujours le milieu du segment dans la réalité : il peut ne pas être sur le segment dans la réalité.

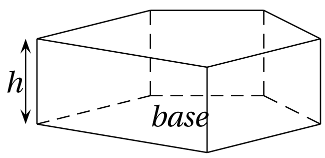
1.2 Solides usuels et volumes

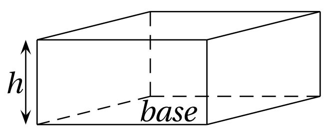
1.2.1 Famille des prismes droits

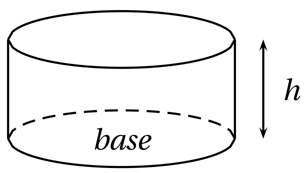
Prisme droit
Toutes les faces sont des rectangles sauf (éventuellement) les deux bases.

Pavé
Prisme droit dont les bases sont des rectangles.

Cylindre
Peut être considéré comme un prisme droit dont les bases sont des disques.







Propriété 1.1. *Le volume de ces solides est donné par la formule suivante :*

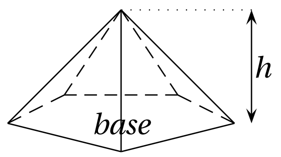
$$Volume = Aire\ de\ la\ base \times hauteur$$

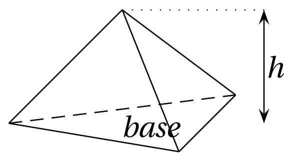
1.2.2 Famille des pyramides

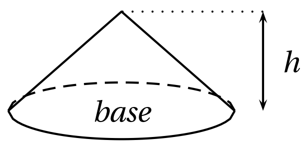
Pyramide
Constituée d'une base de forme quelconque et d'un sommet. Des arêtes joignent ce sommet à chacun des sommets de la base.

Tétraèdre
Pyramide dont la base est un triangle.

Cône de révolution
Peut être considéré comme une pyramide dont la base est un disque.







Propriété 1.2. *Le volume de ces solides est donné par la formule suivante :*

$$Volume = \frac{1}{3} Aire\ de\ la\ base \times hauteur$$

On peut ainsi mettre trois fois le volume d'un cône de révolution dans un cylindre de révolution ayant même base et même hauteur, ou trois fois le volume d'un tétraèdre dans un prisme droit ayant même base et même hauteur.

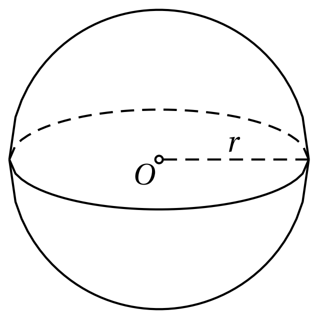
1.2.3 Sphère

Propriété 1.3. *Le volume d'une sphère de rayon r est donné par la formule :*

$$Volume = \frac{4}{3}\pi r^3$$

L'aire de la surface d'une sphère de rayon r est donnée par la formule :

$$Aire = 4\pi r^2$$



1.3 Exercices et problèmes

1.3.1 Exercices

EXERCICE 1.1.
On considère un tétraèdre $ABCD$, dont les faces ABC, ABD et ACD sont des triangles rectangles en A.
On donne $AB = AD = 5$ cm et $AC = 12$ cm.

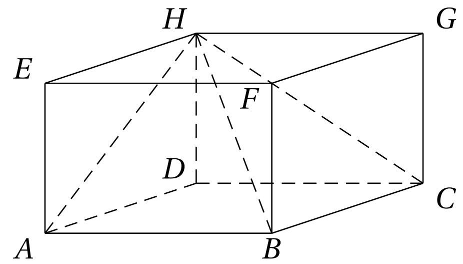
1. Dessiner ce tétraèdre en perspective cavalière, la face ABC étant frontale.
2. Quelle est la nature de CDB ? Le représenter en vraie grandeur.
3. Quel est le volume de $ABCD$?

EXERCICE 1.2.
$ABCDEFGH$ est un cube d'arête $a = 6$ cm.

1. Quelle est la nature du triangle AFC ? Justifier.
2. Calculer la longueur d'une diagonale principale du cube (on supposera AEG rectangle et on calculera la longueur de la diagonale AG).

EXERCICE 1.3.
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle (un pavé) tel que $AB = 5$, $AE = 3$ et $BC = 4$.

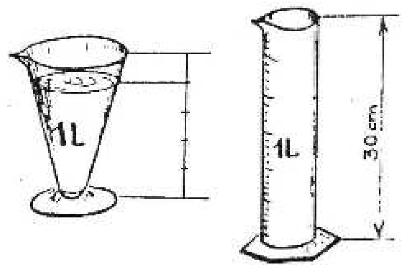
1. Calculer les longueurs des segments $[HA]$, $[HF]$, $[HC]$ et $[HB]$.
2. Calculer le volume des pyramides $HABCD$ et $HBCGF$.
3. Réaliser un patron de ces deux pyramides.



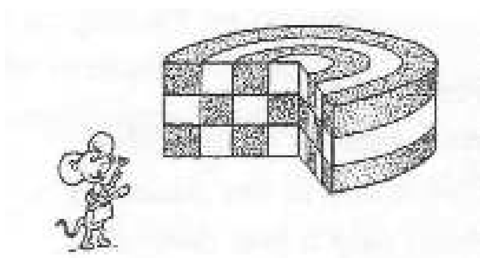
1.3.2 Calculs de volumes

EXERCICE 1.4.
Daniel et Antoine sont assis en deux points diamétralement opposés d'une piscine circulaire dont l'eau est profonde de 1,80 m.
Lorsque Myriam prend place au bord du même bassin, tous deux nagent tout droit vers elle.
Après un parcours de 10 m, Antoine a déjà atteint Myriam, alors que Daniel devra nager 14 m de plus pour la rejoindre.
Combien de litres d'eau y a-t-il dans ce bassin ?

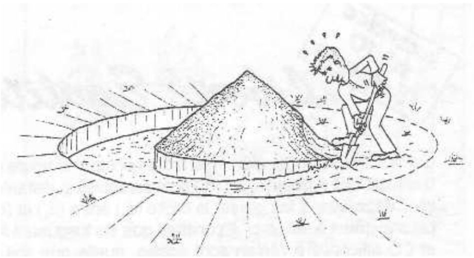
EXERCICE 1.5.
L'intérieur d'un verre de laboratoire a la forme d'un cône de révolution, celui d'une éprouvette a la forme d'un cylindre de révolution ; leur contenance commune est 1 litre.
On remplit le verre aux quatre cinquièmes de la hauteur du cône et on transvase le liquide du verre dans l'éprouvette.
Sachant que la hauteur de l'éprouvette est 30 cm, calculer la hauteur du liquide dans l'éprouvette.



EXERCICE 1.6.
Le gâteau de Mamie est superbe et plein de surprises. Quand on le coupe, on découvre qu'elle s'est donné bien du mal à le faire ; il est formé de deux pâtes différentes : l'une est à la vanille et l'autre au chocolat.
Il comprend trois étages de même hauteur. Le moule qui a permis de le faire est circulaire.
Le damier qu'on obtient sur la tranche est constitué de 12 carrés de 1 cm de côté.
Il suffit de la regarder pour en avoir un avant-goût.
En comptant les carrés blancs et les carrés noirs, un de ses petits-fils, Gaston, s'exclame : « Tiens, on dirait que dans le gâteau, il y a autant de vanille que de chocolat. »
Calculer le volume de gâteau à la vanille et de gâteau au chocolat.

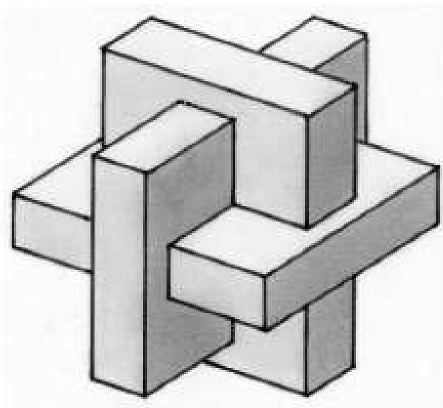


EXERCICE 1.7.
Pour réaliser un tas de sable, Albert creuse un fossé dont les parois sont verticales et dont la base est délimitée par deux cercles dont l'un a un rayon double de l'autre.
Avec tout le sable extrait, il forme au milieu un cône de révolution dont la base coïncide parfaitement avec le disque autour duquel il a creusé.
Tout à coup, le père d'Albert lui demande de s'arrêter de creuser et constate : « Le tas de sable a la forme d'un cône de révolution. En plus, si tu te tiens debout au fond du fossé, le sommet du tas de sable est exactement à la même hauteur que le sommet de ta tête. »
À ce moment précis, le fossé creusé par Albert a 15 cm de profondeur.
Quelle est la taille du jeune Albert ?



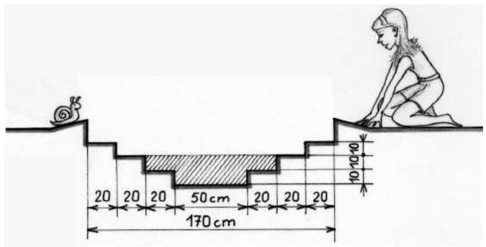
EXERCICE 1.8.
Chez le meunier Tudor, le mousquetaire Jacques commande un sac de blé cylindrique de 4 pieds de haut et 6 pieds de tour ? Le meunier lui propose à la place 2 sacs de blé cylindriques de 4 pieds de haut mais de 3 pieds de tour chacun, en lui affirmant que cela donne le même volume de blé.
Jacques dégaine son épée et la pointe sur le meunier.
Donner l'explication mathémtique de son geste.
D'après Jacques OZANAM (1640-1717).

EXERCICE 1.9.
On imbrique 3 pavés droits pour obtenir le solide ci-dessous.
Les 3 pavés ont les mêmes dimensions : $2\text{ cm} \times 8\text{ cm} \times 10\text{ cm}$.
Calculer le volume de ce solide.

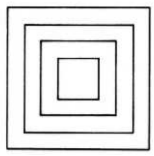


EXERCICE 1.10.
Coralie a construit un petit bassin en forme de gradins. Le fond est un carré de 50 cm de côté. Les trois marches ont chacune une hauteur de 10 cm et une largeur de 20 cm.
Les schémas ci-dessous donnent une vue de profil et de haut de ce bassin :

Profil



Haut

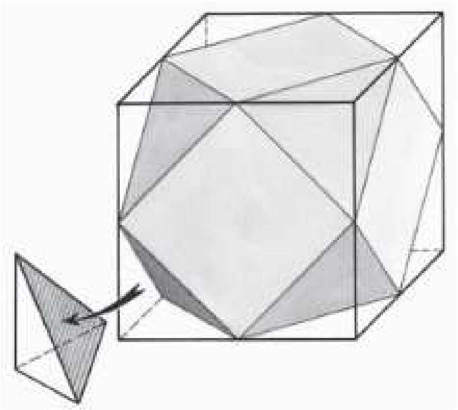


Coralie installe le bassin dans son jardin de telle façon que le fond soit bien horizontal ; soudain l'orage gronde et une pluie torrentielle se met à tomber.
Après la pluie vient le beau temps et Coralie constate alors que le niveau de l'eau récupérée par le bassin affleure la deuxième marche.
Quel est, en litres, le volume d'eau tombé par m^2 pendant cet orage ?

EXERCICE 1.11.
En soufflant dans une paille trempée dans de l'eau savonneuse, Dominique dépose sur une surface lisse horizontale une bulle de savon en forme de demi-sphère, d'un diamètre de 12 cm.
Elle souffle une deuxième bulle hémisphérique à l'intérieur de la première. La première bulle s'agrandit. Son nouveau volume est égal à la somme de son volume initial et du volume de la bulle intérieure.

Quel devrait être le diamètre de la bulle intérieure pour que le diamètre de la grande bulle soit de 14 cm ?

EXERCICE 1.12.
Sur les faces d'un cube, je dessine des carrés en reliant les milieux des arêtes du cube. Les côtés ainsi dessinés font apparaître huit pyramides, une à chaque sommet du cube. En enlevant ces huit pyramides, j'obtiens un nouveau polyèdre convexe.



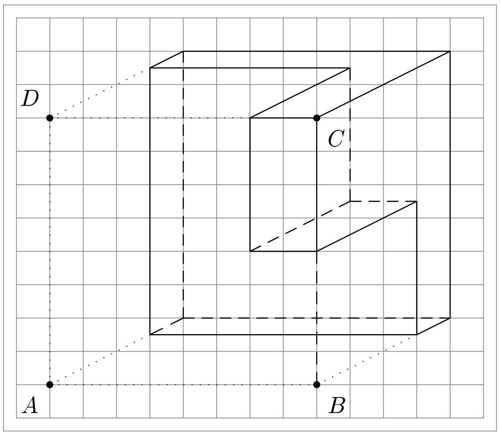
Déterminer le nombre de faces, de sommets et d'arêtes de ce solide.
Calculer le volume de ce polyèdre en fonction de la longueur d'un côté du cube.

EXERCICE 1.13.
Morane a un pain d'épices de forme cubique de 10 cm de côté.
Le premier jour elle coupe trois tranches de 1 cm d'épaisseur de telle façon qu'elle obtienne un nouveau cube. Elle mange ces trois tranches.
Le lendemain et les jours suivants, elle procède de la même manière : elle découpe et mange trois tranches de 1 cm d'épaisseur pour obtenir un nouveau cube.
Donner jour par jour le volume mangé par Morane.

EXERCICE 1.14.
Luc joue avec son équerre. Il tient l'équerre par deux sommets entre ses deux index et la fait tourner. La rotation de l'équerre autour de l'un de ses côtés engendre un solide.
Selon les sommets qu'il choisit, la rotation engendre trois solides différents. Comme la surface de son équerre ne change pas, il se dit que les volumes des trois solides sont sûrement égaux.
Luc a-t-il raison ?

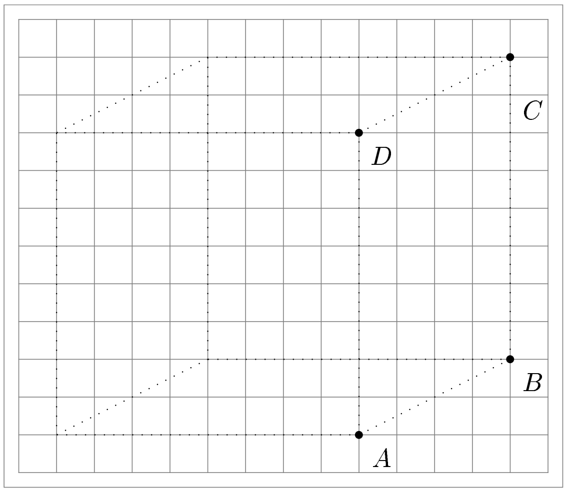
1.3.3 Patrons et vues en perspective cavalière

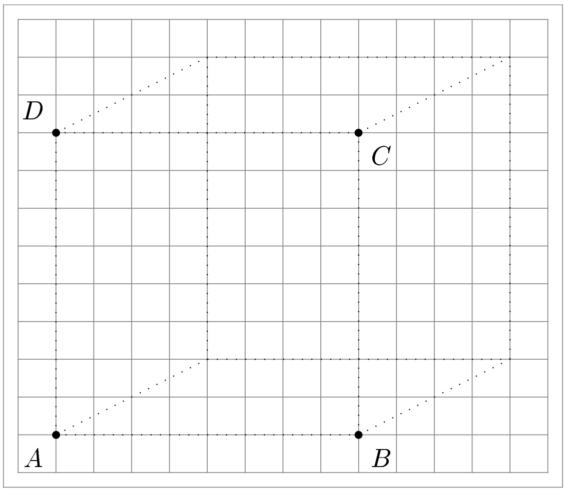
EXERCICE 1.15.
Une pièce métallique (en traits pleins) est découpée dans un cube.



Construire, en perspective cavalière :

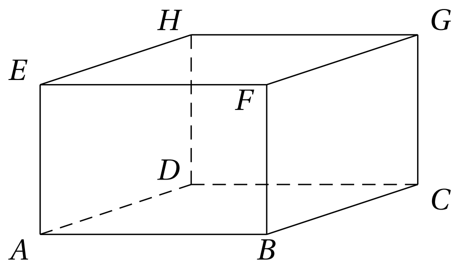
- la pièce restante du cube la face $ABCD$ restant devant;



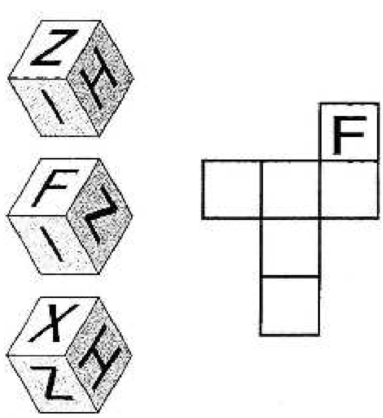


- la pièce restante du cube la face $ABCD$ étant à droite.

EXERCICE 1.16.
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle (un pavé) tel que $AB=5$, $AE=2$ et $BC=3$.
Une fourmi se situe en E et se rend en C en cheminant sur les faces.
Déterminer le trajet le plus court.
Indication : on pourra s'aider du patron.

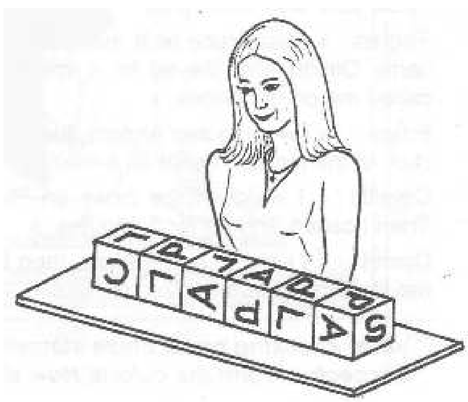


EXERCICE 1.17.
Voici trois perspectives d'un même cube. Recopier et compléter le patron.



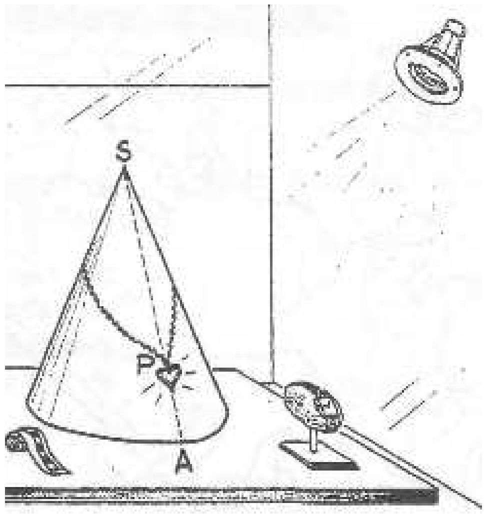
EXERCICE 1.18.
Pierre dit « Tiens, j'ai fabriqué un solide qui a 6 faces. »
Jean : « Mais je le connais, c'est un cube ! Il a 6 faces et 8 sommets. »
Pierre : « Ah non, mon solide n'a que 5 sommets et donc 9 arêtes. »
Jean : « Mais alors les faces ne sont pas carrées ? »
Pierre : « Non bien sûr, ce ne sont que des triangles équilatéraux »
Jean : « Alors je sais aussi le fabriquer. »
Dessiner un patron et une représentation en perspective de ce solide.

EXERCICE 1.19.
Étienne a posé sur la table 6 cubes tous identiques représentés ci-dessous.



Dessiner ce que voit Barbara de l'autre côté de la table.

EXERCICE 1.20.
Leonardo admire dans la vitrine d'une bijouetrie un pendentif posé sur un présentoir conique. Le bijou est contitué d'une lourde pierre précieuse suspendue en un point P à une fine chaînette d'or. La chaînette suit sur le cône une courbe qui est le plus court chemin allant de P à P en faisant le tour du cône.



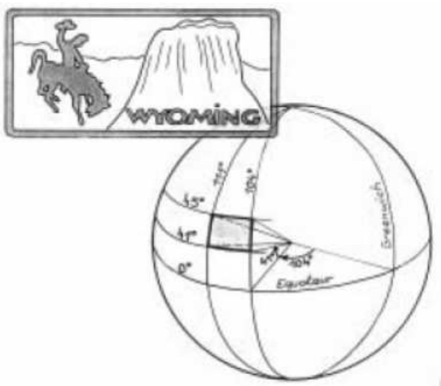
Le diamètre de la base du cône est égal à 21 cm, le distance SA égale à 35 cm et la distance SP égale à 30 cm. On voudrait connaître la longueur de la chaînette.
Construire à l'échelle 1 :5 le patron de la surface latérale du cône après découpage suivant la droite (SP). Sur ce patron, tracer la ligne de contact de la chaînette avec le cône puis calculer la longueur de la chaînette.

1.3.4 Géométrie de la sphère

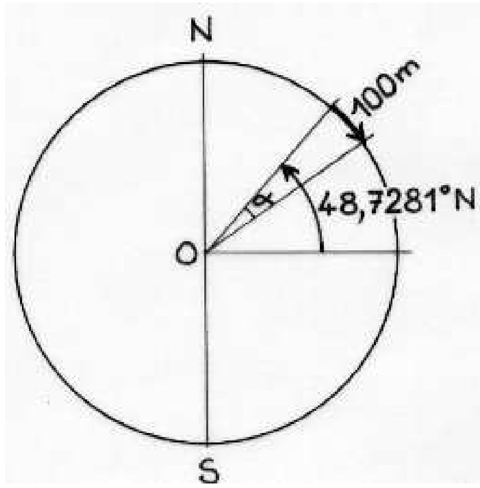
EXERCICE 1.21.
Les frontières de nos états sont généralement définies par des lignes naturelles ou fixées par des considérations d?ordre historique.
L'état du Wyoming, aux USA, a des frontières plus simples, du moins en apparence.
Il est limité :

- à l'ouest par le méridien de longitude 111°ouest,
- à l'est par le méridien de longitude 104°ouest,
- au nord par le parallèle de latitude 45°nord,
- au sud par le parallèle de latitude 41°nord.

La Terre étant une boule dont l'équateur mesure 40 000 km, calculer le périmètre de l'état du Wyoming.



EXERCICE 1.22.
La tour « Burj Khalifa » construite à Dubaï aux Émirats Arabes Unis mesure 828 m.
Un bateau amarré au pied de la tour lève l'ancre et met cap au Nord.
Sachant que la Terre est assimilée à une boule de 6 370 km de rayon, quelle distance aura parcouru le bateau lorsque le sommet de la tour ne sera plus visible ?



EXERCICE 1.23.
Pour déterminer la position d'un point situé à la surface de la Terre, un GPS calcule sa position angulaire (latitude et longitude) à partir de la position de plusieurs satellites.
Je suis au point de coordonnées 48,728 1°de latitude Nord et 7,898 2°de longitude Est. Je me déplace de 100 mètres vers le Sud. La longitude est inchangée.
On considère que la surface de la Terre est assimilée à une sphère de rayon 6 370 km.
Quelle est la latitude indiquée par ce GPS ?

EXERCICE 1.24.
Un astronaute en mission sur la Lune a posé son vaisseau spatial dans une grande plaine, la Mer de la Tranquillité.
Debout sur le sol, il mesure à l'aide d'un rayon laser la distance qui le sépare de la pierre la plus lointaine qu'il puisse apercevoir à l'horizon. Il trouve 2 195 mètres. L'instrument est posé à 1,65 m du sol.
Calculer le rayon de la lune à 1 km près.

1.3.5 Divers

EXERCICE 1.25.
Les 4 récipents ci-dessous ont la même hauteur et contiennent le même volume lorsqu'ils sont remplis à ras-bord.
Pour chacun d'eux, on a tracé la courbe représentant le volume de liquide versé en fonction de la hauteur atteinte.
Rendre à chaque récipent le numéro de la courbe qui lui correspond.