

Chapitre 12

Enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique

Sommaire

12.1 Enroulement de la droite des réels	127
12.2 Une nouvelle unité de mesure des angles : le radian	128
12.3 Cosinus et sinus d'un réel x	128

12.1 Enroulement de la droite des réels

ACTIVITÉ 12.1.

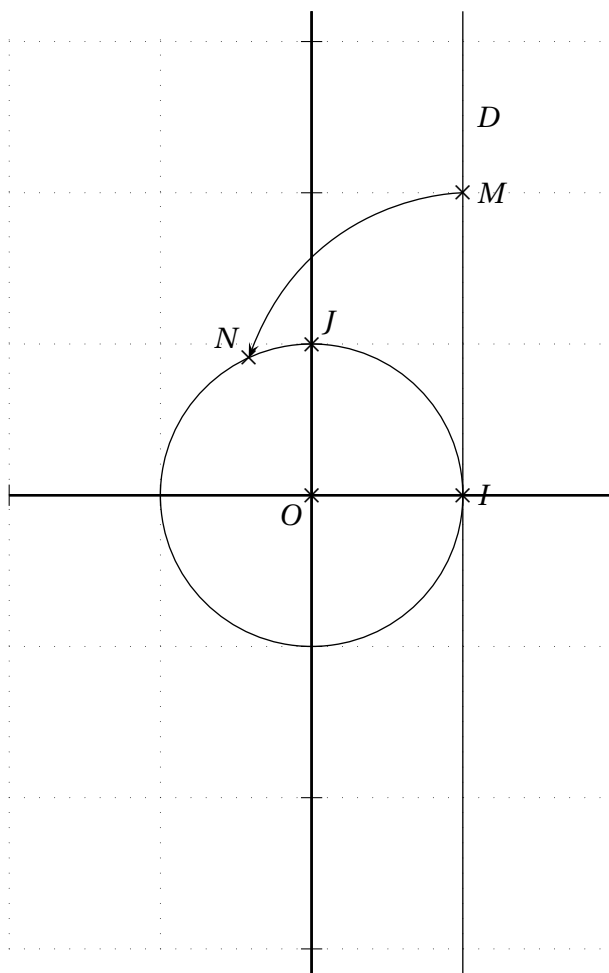
Soit un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 1 et la droite D d'équation $x = 1$ qui coupe l'axe (Ox) en I , représentés sur la figure ci-contre.

À tout nombre a , on associe le point M de la droite D , d'abscisse 1 et d'ordonnée a .

« L'enroulement » de la droite D autour du cercle \mathcal{C} met en coïncidence le point M avec un point N de \mathcal{C} . Plus précisément, si a est positif, le point N est tel que $\widehat{IN} = IM = a$, l'arc étant mesuré dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et, si a est négatif, le point N est tel que $\widehat{IN} = IM = |a|$, l'arc étant mesuré dans le sens des aiguilles d'une montre.

Le point N est le point du cercle \mathcal{C} associé au nombre a .

1. Placer les points M_a de la droite D dont les ordonnées a respectives sont : $0; \frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}; \pi; -\pi$.
2. Placer les points N_a du cercle associés à ces nombres a .
3. Indiquer un nombre associé à chacun des points $I, J, B(-1; 0)$ et $B'(0; -1)$.
4. Existe-t-il plusieurs nombres associés à un même point? Donner quatre nombres associés au point J .



12.2 Une nouvelle unité de mesure des angles : le radian

Définition 12.1 (Orientation d'un cercle, du plan, cercle trigonométrique). On se place dans le plan.

- Orienter un cercle, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle appelé *sens direct* (ou positif). L'autre sens est appelé *sens indirect* (négatif ou rétrograde).
- Orienter le plan, c'est orienter tous les cercles du plan dans le même sens. L'usage est de choisir pour sens direct le sens contraire des aiguilles d'une montre (appelé aussi *sens trigonométrique*).
- Un cercle trigonométrique est un cercle orienté dans le sens direct et de rayon 1. Lorsque le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le cercle trigonométrique est le cercle orienté dans le sens direct, de centre O et de rayon 1.

Dans la suite du chapitre, on suppose que le plan est orienté dans le sens trigonométrique.

Définition 12.2. La mesure d'un angle en radian est égale à la longueur de l'arc de cercle que cet angle intercepte sur le cercle trigonométrique.

Avec les notations de l'activité précédente, la mesure de l'angle $\widehat{I\hat{O}N}$ en radian est égale à la longueur \widehat{IN} , c'est-à-dire à a .

EXERCICE 12.1.

Compléter le tableau suivant :

Mesure de l'arc \widehat{IN} = mesure en radian de l'angle $\widehat{I\hat{O}N}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
Mesure en degré de l'angle $\widehat{I\hat{O}N}$							

EXERCICE 12.2.

La figure 12.2 page 131 propose plusieurs cercles trigonométriques.

- Sur un de ces cercles, placer les points correspondant aux nombres suivant :
 $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, 2\pi, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}, -\pi, -\frac{7\pi}{4}, -2\pi$
- Sur un autre de ces cercles, placer les points correspondant aux nombres suivant :
 $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{5\pi}{6}$

12.3 Cosinus et sinus d'un réel x

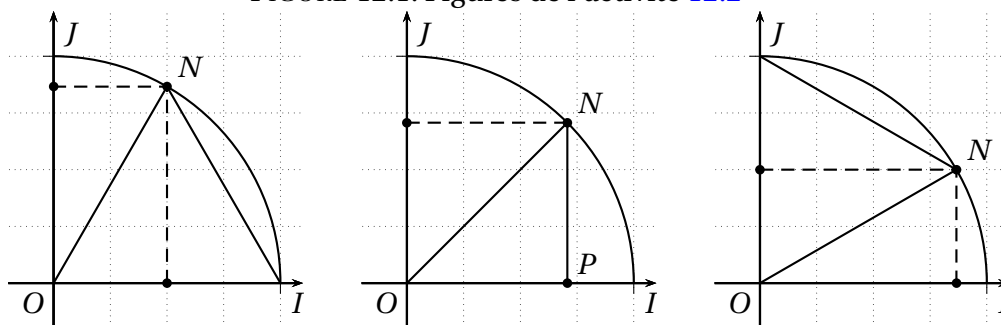
ACTIVITÉ 12.2.

En s'aidant des schémas de la figure 12.1 page suivante, compléter le tableau suivant :

Mesure de l'arc \widehat{IN}	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
Abscisse de N							
Ordonnée de N							

On pourra observer que les triangles OIN , ONP et ONJ ne sont pas quelconques lorsque N correspond, respectivement, aux nombres $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{6}$.

FIGURE 12.1: Figures de l'activité 12.2



Définition 12.3. Soit x un réel et $N(x_n; y_n)$ le point qui lui est associé par enroulement sur le cercle trigonométrique. Alors on a :

$$\cos x = x_n \quad \sin x = y_n \quad \text{et, quand } \cos x \neq 0, \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

EXERCICE 12.3.

Compléter le tableau suivant :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$						
$\cos x$						
$\tan x$						

Propriété 12.1. Pour tout réel x on a :

- $-1 \leq \cos x \leq 1$
- $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos(x + 2\pi) = \cos x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(x + 2\pi) = \sin x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

EXERCICE 12.4.

Par lecture graphique et sans justifier, en s'aidant des schémas obtenus dans l'exercice 12.2, compléter le tableau suivant :

x	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{6}$	π	2π
$\sin x$												
$\cos x$												
$\tan x$												

EXERCICE 12.5. 1. Compléter le tableau suivant :

x	-2π	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$\cos x$													
$\sin x$													
$\tan x$													

- Tracer dans trois repères orthogonaux (ordonnées : 5 cm = une unité; abscisses : 6 cm = π unités) les courbes représentatives des fonctions sinus, cosinus et tangente.
- Dresser le tableau des variations de ces fonctions pour $x \in [-2\pi; 2\pi]$

FIGURE 12.2: Cercles trigonométriques

