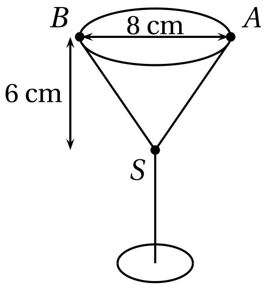
Chapitre 3

Généralités sur les fonctions

Sommaire

3.1 Activité d'introduction

3.1.1 Un problème



Un verre à pied a une forme conique dont la base est un disque de 8 cm de diamètre et de hauteur 6 cm. Il repose sur une table parfaitement horizontale. On désire le remplir de façon à ce qu'il contienne la moitié de son volume maximal. On recherche donc jusqu'à quelle hauteur il faut verser du liquide pour qu'il soit rempli à moitié.

3.1.2 Travail préparatoire

On appelle h la hauteur à laquelle est versée le liquide.

1. Entre quelles valeurs peut varier h ?
2. Quel est le volume maximal que peut contenir le verre ?
3. Si on verse du liquide jusqu'à mi hauteur (3 cm) dans le verre, aura-t-on la moitié du volume maximal du verre ?
4. Calculer le rayon puis l'aire de la base puis le volume du liquide dans le verre lorsque $h = 2$ cm, lorsque $h = 3$ cm et lorsque $h = 4$ cm.
5. Déterminer le rayon puis l'aire de la base puis le volume du liquide dans le verre en fonction de h (quelles formules de calcul permettent d'obtenir le rayon, l'aire de la base et le volume du liquide dans le verre, lorsque l'on connaît h ?).

3.1.3 Utilisation du tableur comme calculateur

Ce travail est à faire en salle informatique en groupe.

1. Créer la feuille de calcul suivante :

	A	B	C	D	E
1		Volume du liquide			
2					
3	hauteur	rayon	aire de la base	VOLUME	
4					
5					
6					

2. Créer dans les cellules B4, C4, D4, et E4 les formules donnant, en fonction de la hauteur h, respectivement le rayon, l'aire de la base du cône et le volume du liquide dans le verre. *Indication : π s'obtient en entrant PI().*
3. Contrôler les résultats de la question 4 du travail préparatoire en entrant successivement les valeurs 2, puis 3 et enfin 4 dans la cellule A4 qui correspond à la hauteur.
4. Parmi les valeurs entières de h, déterminer de même celle pour laquelle le volume du liquide est le plus proche de la moitié du volume du verre.

3.1.4 Création d'un tableau

1. (a) Sélectionner le tableau créé précédemment, puis le recopier (avec les menus Edition, Copier) sur une autre feuille de calcul du tableur.
   (b) Entrer la valeur 0 dans la cellule A4, puis la formule =A4+1 dans la cellule A5. Recopier cette formule vers le bas de façon à obtenir les valeurs demandées de la hauteur.
   (c) Sélectionner alors les cellules B4 à D4 et, de même que précédemment, les recopier vers le bas.
2. On désire plus de précision.
   (a) Entrer la valeur 0 dans la cellule A4, puis la formule =A4+0,5 dans la cellule A5. Recopier cette formule vers le bas de façon à ce que les valeurs de la hauteur aillent de 0 à 6.
   (b) Sélectionner alors les cellules B4 à D4 et, de même que précédemment, les recopier vers le bas.

À l'aide des résultats obtenus, compléter le tableau suivant :

hauteur	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
VOLUME													

3.1.5 Représentation graphique du volume en fonction de h

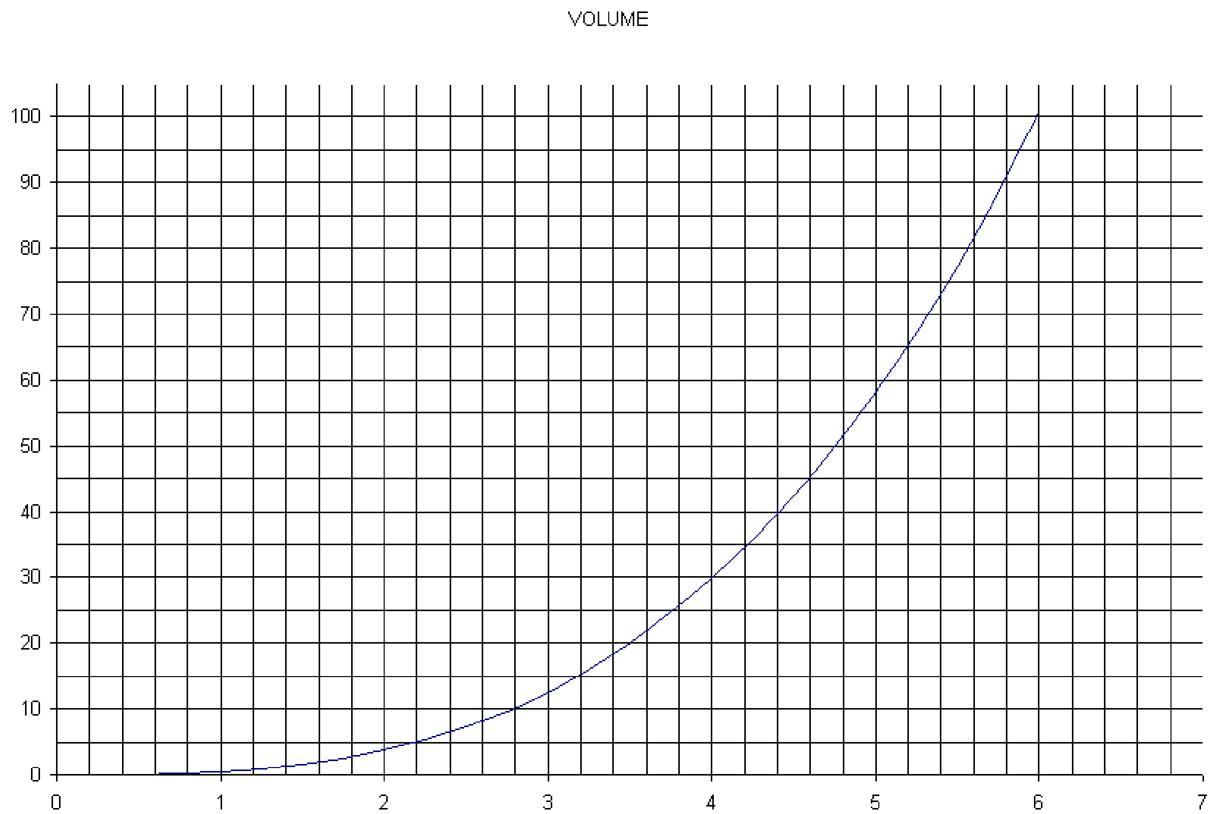
1. Sélectionner dans le tableau la colonne "hauteur" et la colonne "VOLUME" avec leurs titres. *Indication : pour sélectionner deux colonnes (ou plus généralement des plages de cellules) non voisines, procéder ainsi : sélectionner la première puis, en maintenant appuyée la touche* Ctrl *sélectionner la seconde.*
2. Cliquer sur l'icône correspondant à l'insertion d'un graphique. Essayer les différents types de représentations (un aperçu est proposé), puis en choisir un et se laisser guider par les indications de l'assistant graphique.
3. À l'aide du graphique obtenu, donner une valeur arrondie au millimètre de la hauteur pour laquelle le volume est égal à la moitié de celui du verre, ainsi qu'une valeur approchée de ce volume.

3.1.6 Exploitation de la courbe représentative

Vous trouverez ci-dessous la courbe obtenue avec le tableur en module qui donne le volume du liquide dans le verre en fonction de la hauteur de liquide dans le verre.

On note $V(h)$ le volume en fonction de la hauteur h. Ainsi $V(3) = 12,566\,\text{cm}^3$ car pour une hauteur de 3 cm, on peut lire graphiquement que le volume est de 12,566 cm^3.

1. Pour quelle valeurs de h, peut-on déterminer $V(h)$?
2. Quel est le volume pour une hauteur de 5 cm ?
   Compléter $V(5) = \ldots\ldots$
   On dit que :
   - 5 a pour image …… par la fonction V ;
     …… est l'image de 5 par la fonction V ;
   - …… a pour antécédent 5 par la fonction V ;
     5 est un antécédent de …… par la fonction V.
3. Quel est le volume pour une hauteur de 2,5 cm ?
   Compléter $V(2,5) = \ldots\ldots$
   On dit que :
   - 2,5 a pour image …… par la fonction V ;
   - 2,5 est un antécédent de …… par la fonction V.
4. Pour quelle hauteur le volume est-il de 70 cm^3 ? 50 cm^3 ?
   Compléter :
   - 70 a pour antécédent(s) …… par la fonction V ;
   - 50 a pour antécédent(s) …… par la fonction V.
5. (a) Déterminer l'image de 1, de 2, de 4 et de 6 par la fonction V.
   (b) Déterminer les antécédents de 0, de 25, de 60 et de 80 par la fonction V.
   (c) Peut-on déterminer l'image de 13 par la fonction V ? Pourquoi ?
   (d) Peut-on déterminer les antécédents de 120 par la fonction V ? Pourquoi ?
   (e) Résoudre par lecture graphique :
   - l'équation $V(h) = 75$.
     Que signifie la réponse à cette question ?
   - l'inéquation $V(h) > 50$.



3.2 Premières notions (bilan et compléments)

Définition 3.1 (Notion de fonction)**.** Une fonction est un procédé qui, à un élément x d'un ensemble de départ, associe au plus un élément y d'un ensemble d'arrivée.
On notera $f : x \mapsto y$ ou $f : x \mapsto f(x)$ qui se lit « f est la fonction qui à x associe y (ou $f(x)$) »..
On dit que y est *l'image* de x.
On dit que x est *un antécédent* de y.

Définition 3.2 (Ensemble de définition)**.** L'ensemble des réels x possédant une image par une fonction numérique f est appelé *l'ensemble de définition de la fonction f*. On le note souvent D_f.

Définition 3.3 (Représentation graphique)**.** Dans un plan muni d'un repère, la *représentation graphique* de la fonction f est l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ du plan tels que :
- L'abscisse x de M décrit l'ensemble de définition D_f ;
- L'ordonnée y est l'image de x par f. $y = f(x)$.

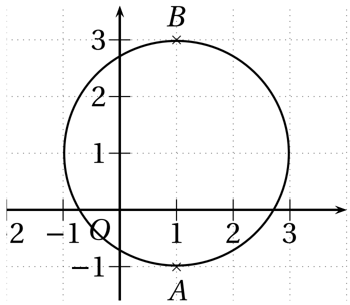
On note souvent $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f. On dit que $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = f(x)$.
Si la courbe est d'un seul « tenant » on parle de *courbe représentative* de la fonction f.

Remarque. L'équation permet de déterminer si un point $A(x_A; y_A)$ appartient ou pas à cette courbe. En effet, un point appartient à la courbe si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de la courbe. On a alors :

$$A \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow y_A = f(x_A)$$

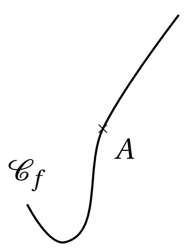
Dans la pratique, pour les fonctions numériques définies par une expression algébrique, pour esquisser une représentation graphique, on utilise souvent un tableau de valeurs.

Remarque. Une courbe ne représente pas toujours une fonction. Sur la figure ci-contre, par exemple, la courbe a plusieurs points ayant la même abscisse, comme $A(1, -1)$ et $B(1, 3)$. Ce n'est donc pas la courbe représentative d'une fonction car alors 1 aurait plusieurs images.

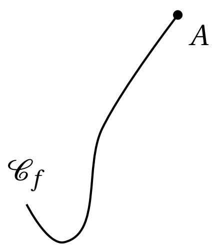


Quelques conventions graphiques

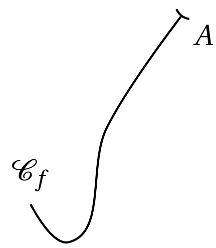
Lorsqu'un point A sur la courbe est connu avec précision, il est noté par une croix.



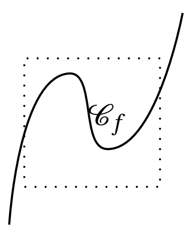
Lorsqu'un point A est l'extrémité de la courbe, il est noté par un gros point.



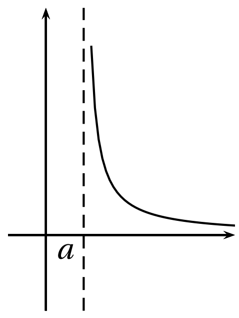
Lorsqu'un point A à l'extrémité de la courbe n'appartient pas à la courbe, il est noté par un « demi-cercle ».



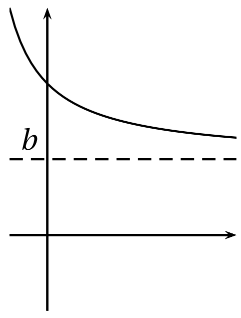
Une courbe est donnée dans une fenêtre; s'il n'y a pas d'extrémités, la courbe garde la même allure quand on la prolonge.



Une droite verticale en pointillés signifie que si l'on prolonge la courbe, elle ne coupe pas cette droite. Sur l'exemple ci-dessous, a n'appartient pas à D_f.



Une droite horizontale en pointillés signifie que si l'on prolonge la courbe, elle ne coupe pas cette droite.

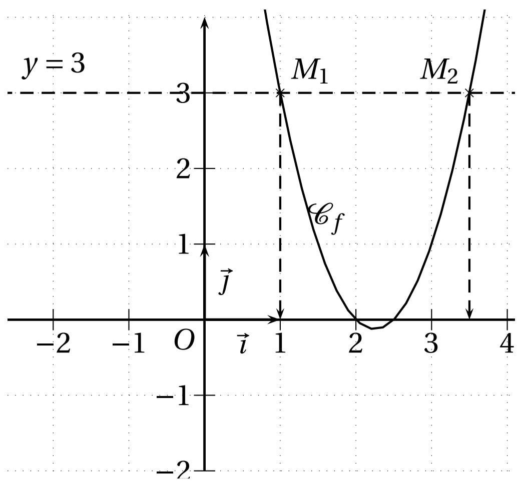


3.3 Résolutions graphiques d'équations et d'inéquations

3.3.1 Résolutions d'équations de la forme $f(x) = k$

Résoudre l'équation $f(x) = k$ c'est déterminer tous les antécédents éventuels d'un élément k de l'ensemble d'arrivée, c'est-à-dire chercher tous les x de l'ensemble de départ tels que $f(x) = k$.
Une telle recherche peut se faire graphiquement à partir de la représentation graphique de la fonction f.

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 9x + 10$. On recherche les solutions de l'équation $f(x) = 3$.
On commence par tracer soigneusement la courbe représentative de f et on obtient la représentation donnée sur la figure ci-dessous.
On cherche les points de la courbe ayant pour ordonnée 3.
Pour cela on peut tracer la droite d'équation $y = 3$ et chercher les points d'intersection de cette droite avec la courbe de f.
On obtient ici deux points $M_1(1;3)$ et $M_2\left(\frac{7}{2};3\right)$. Les solutions sont leurs abscisses : 1 et $\frac{7}{2}$.
On écrit : « Les solutions de l'équation $f(x) = 3$ sont $x = 1$ ou $x = \frac{7}{2}$ car les points de la courbe de f d'ordonnée 3 ont pour abscisses 1 et $\frac{7}{2}$ ».



3.3.2 Résolutions d'inéquations de la forme $f(x) \leqslant k$

Ces inéquations peuvent se résoudre graphiquement. On procède de la façon suivante :
- on trace soigneusement $\mathscr{C}_f$ dan un repère (orthogonal);
- on trace la droite d'équation $y = k$;
- on recherche les points de la courbe situés *sous* la droite;
- l'ensemble des solutions est constitué des abscisses de ces points.

Exemple. Sur l'exemple précédent, si l'on doit résoudre $f(x) \leqslant 3$, après avoir tracé $y = 3$ on constate que les points de la courbe situés sous cette droite ont leurs abscisses comprises entre 0 et $\frac{5}{2}$.
Donc $f(x) \leqslant 3 \Leftrightarrow x \in \left[0;\frac{5}{2}\right]$.

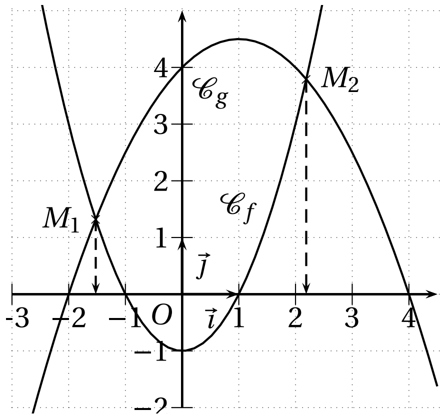
Remarque.

- On résoud de la même manière les équations du type $f(x) \geqslant k$.
  On retient alors les abscisses des points situés *au-dessus* de la droite d'équation $y = k$.
  Dans l'exemple $f(x) \geqslant 3 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty; 0\right] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$.
- De même pour les inéquations strictes : $f(x) > k$ ou $f(x) < k$. On excluera alors les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite.
  Dans l'exemple $f(x) < 3 \Leftrightarrow x \in \left]0; \frac{5}{2}\right[$.

3.3.3 Résolutions d'équations de la forme $f(x) = g(x)$

Cela revient à chercher les éléments de l'ensemble de départ qui ont la même image par f et par g. Une telle recherche peut se faire graphiquement. On recherche alors les points des deux courbes représentatives ayant même abscisse et même ordonnée, c'est-à-dire les points d'intersection des deux courbes.

Exemple. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par, respectivement, $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = -0,5x^2 + x + 4$. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.
On commence par tracer soigneusement les deux courbes représentatives et on obtient la représentation donnée sur la figure ci-contre.
On cherche les points d'intersection des deux courbes, ici M_1 et M_2, et les solutions de l'équation sont leurs abscisses dont les valeurs approximatives sont $-1,5$ et $2,2$.
Les solutions sont donc $x \approx -1,5$ et $x \approx 2,2$.



3.3.4 Résolutions d'inéquations de la forme $f(x) \leqslant g(x)$

Là encore ces inéquations peuvent se résoudre graphiquement. On procède de la façon suivante :

- on trace soigneusement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un repère (orthogonal) ;
- l'ensemble des solutions est constitué des abscisses des points où la courbe de f est située *sous* celle de g.

Exemple. Sur l'exemple précédent, si l'on doit résoudre $f(x) \leqslant g(x)$, on constate que les points de la courbe de f situés sous celle de g ont leurs abscisses comprises entre environ $-1,5$ et 2,2.
Donc $f(x) \leqslant g(x) \Leftrightarrow x \in [-1,5; 2,2]$. Ou bien $S = [-1,5; 2,2]$.

Remarques.

- On résoud de la même manière les équations du type $f(x) \geqslant g(x)$.
  On retient alors les abscisses des points de la courbe de f situés *au-dessus* de celle de g.
  Dans l'exemple $f(x) \geqslant g(x) \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1,5] \cup [2,2; +\infty[$.
- De même pour les inéquations strictes : $f(x) > g(x)$ ou $f(x) < g(x)$. On excluera alors les abscisses des points d'intersection des deux courbes.
  Dans l'exemple $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x \in]-1,5; 2,2[$.

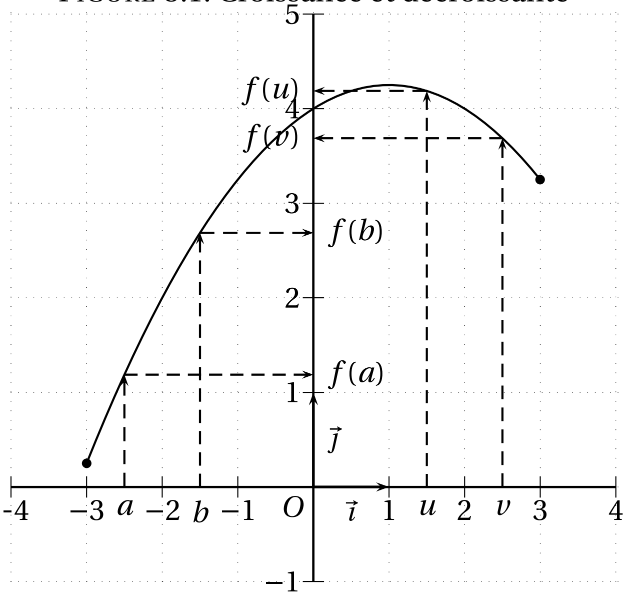
3.4 Variations, extremums

3.4.1 Sens de variation

Il s'agit de traduire mathématiquement qu'une fonction « augmente » ou « diminue ».

Exemple. Soit, par exemple, la fonction définie sur $[-3;3]$ par la courbe représentative donnée sur la figure 3.1 de la présente page. On constate que lorsque $x \in [-3;1]$, si x augmente, $f(x)$ augmente aussi alors que lorsque $x \in [1;3]$, si x augmente, $f(x)$ diminue.
C'est la définition mathématique de la croissance ou de la décroissance d'une fonction f.

FIGURE 3.1: Croissance et décroissante



Définition 3.4. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est
- *croissante* sur I si, pour tous réels a et b de I, on a :
  Si $a < b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$.
- *décroissante* sur I si, pour tous réels a et b de I, on a :
  Si $a < b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$.
- *monotone* si elle n'est que croissante sur I ou si elle n'est que décroissante sur I.
- *constante* sur I si, pour tous réels a et b de I, on a : $f(a) = f(b)$.

Remarques.
- Ces notions ne sont valables que sur **un intervalle** et pas sur une réunion d'intervalles disjoints.
- Antécédents et images étant rangés dans le même ordre, on dit qu'une fonction croissante *conserve* l'ordre.
- Antécédents et images étant rangés dans l'ordre inverse, on dit qu'une fonction décroissante *inverse* l'ordre.
- On obtient les définitions d'une fonction *strictement* croissante ou *strictement* décroisante en remplaçant les inégalités par des inégalités strictes. Ainsi on dit que f est strictement croissante sur I si pour tous réels a et b de I on a :
  Si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$
- Une fonction est strictement monotone sur I si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I

3.4.2 Tableau de variations

Ces résultats peuvent se résumer dans un tableau de variation, qui est une forme stylisée de représentation où l'on indique uniquement si la courbe monte, descend ou est stable. Dans la première ligne on indique les valeurs importantes de x et dans la seconde les variations de f.

Exemple. Dans l'exemple précédent on obtient

x	-3		1		3
f			$\approx 4,25$		
	$\approx 0,25$	$\nearrow$		$\searrow$	$\approx 2,25$

3.4.3 Extremums

Les extremums, s'ils existent, sont les valeurs maximale et minimale qui sont **atteintes** par la fonction f sur un intervalle donné. Plus précisément :

Définition 3.5. Soit une fonction f définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On dit que
- f admet un *maximum*, atteint en x_0 si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant f(x_0)$. Ce maximum est alors $f(x_0)$.
- f admet un *minimum*, atteint en x_0 si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f(x_0)$. Ce minimum est alors $f(x_0)$.

Les maximum et minimum sont appelés les *extremums*.

Exemple. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ n'admet pas -1 comme minimum.
En effet, si on a bien $f(x) \geqslant -1$ sur $\mathbb{R}$, il n'existe pas de x_0 tel que $f(x_0) = -1$.
Par contre 1 est bien le minimum de f sur $\mathbb{R}$ car
- $f(x) \geqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ **ET**
- $f(0) = 1$

On dira donc : le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est 1 et il est atteint pour $x_0 = 0$.

3.5 Exercices et problèmes

3.5.1 Premières notions

EXERCICE 3.1.
On définit f et g, deux fonctions :

- f est la fonction qui à un nombre réel x associe le nombre obtenu en procédant de la manière suivante : on ajoute 4 au nombre, on élève le résultat obtenu au carré, on retranche 16, on divise par le nombre de départ et on retranche 6.
- $g : x \mapsto x^2 - 4$.

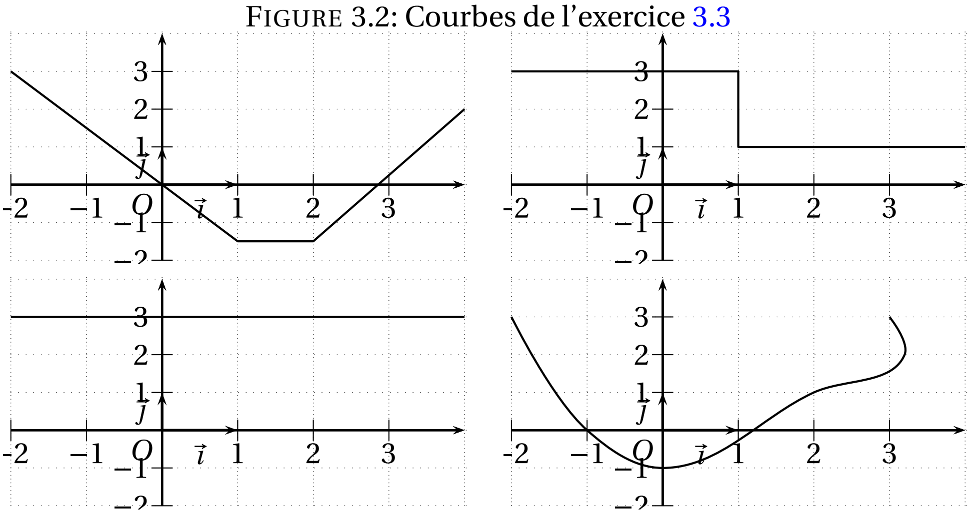
1. Donner l'expression correspondant à f puis simplifier cette expression.
2. Quel réel n'a pas d'image par f ?
3. Quelle est l'image de 3 par g ?
4. Quelle est l'image de -1 par g ?
5. Quels sont les antécédents éventuels de 12 par g ?
6. Quels sont les antécédents éventuels de -5 par g ?

EXERCICE 3.2.
Vrai ou faux ? *Corriger la phrase lorsqu'elle est fausse.*

1. $f(-2) = 0$ signifie que l'image de 0 est -2
2. $f(0) = 3$ signifie que la courbe de f passe par le point $(0;3)$
3. $f(1) = 2$ signifie que l'antécédent de 1 est 2
4. L'image de 2 par f est -3 s'écrit $f(2) = -3$
5. Dire que $(5;1)$ est un point de la courbe de f s'écrit $5 = f(1)$
6. Par la fonction g, -5 est l'image de 3 s'écrit $g(-5) = 3$
7. 2 a pour image 0 par f signifie que la courbe de f traverse l'axe des abscisses en 2
8. $f(4) = 0$ signifie que la courbe de f traverse l'axe des abscisses au point $(4;0)$
9. 3 a pour image 5, signifie que 3 est l'image de 5
10. 4 a pour antécédent 5 signifie que 5 est l'image de 4

EXERCICE 3.3.
Vrai ou faux ? *Justifier la réponse lorsque c'est faux.*
Les courbes de la figure 3.2 de la présente page représentent des fonctions de la variable x.

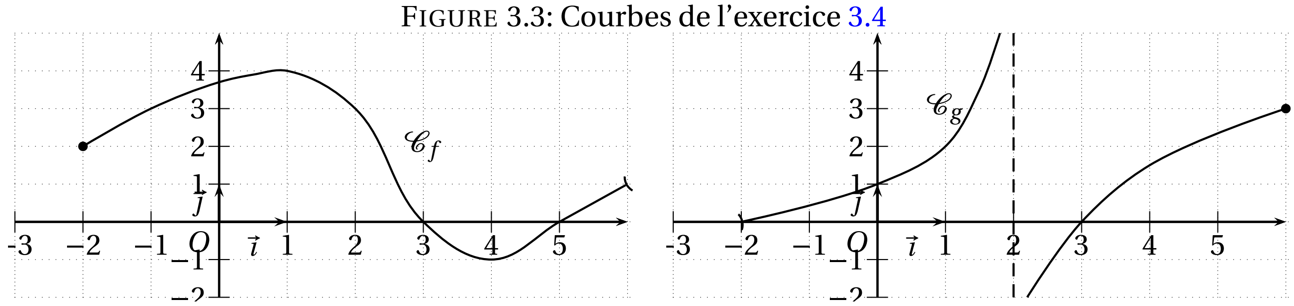
FIGURE 3.2: Courbes de l'exercice 3.3



EXERCICE 3.4.
Vrai ou faux? *Corriger la phrase lorsqu'elle est fausse.*
Les fonctions f et g sont représentées sur la figure 3.3 de la présente page.

1. La fonction f est définie entre -2 et 6 inclus
2. Les images par la fonction f sont comprises entre -1 et 4 inclus
3. La fonction g est définie entre -2 exclu et 6 inclus
4. Les images par la fonction g sont comprises entre 0 exclu et 3 inclus

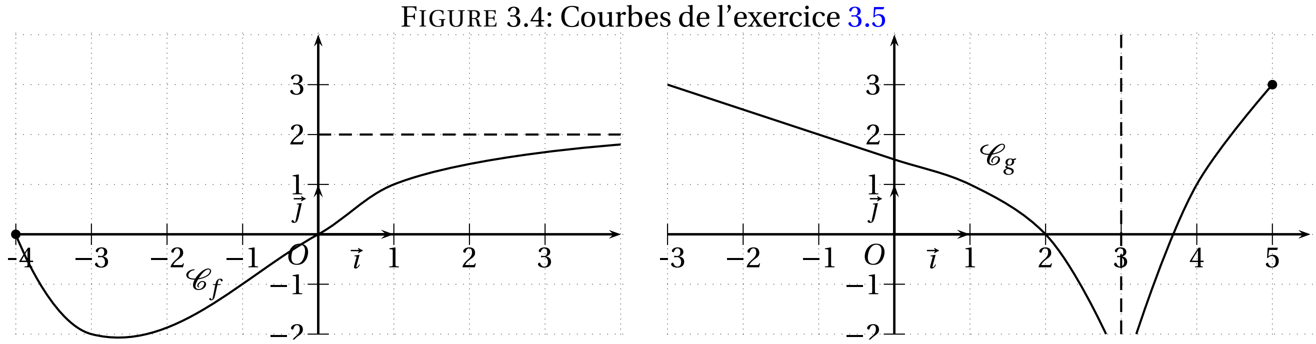
FIGURE 3.3: Courbes de l'exercice 3.4



EXERCICE 3.5.
Vrai ou faux? *Corriger la proposition lorsqu'elle est fausse.*

- D'après la représentation graphique de la figure 3.4 de la présente page $D_f = [-4;2]$
- D'après la représentation graphique de la figure 3.4 de la présente page $D_g =]-\infty;3[\cup]3;5]$

FIGURE 3.4: Courbes de l'exercice 3.5



EXERCICE 3.6 (Avec la calculatrice)**.**
La fonction f est définie sur $[-1,5;2]$ par : $f(x) = 2x^3 - 1,5x^2 - 3x$

1. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$								

2. Tracer la courbe représentative de f.

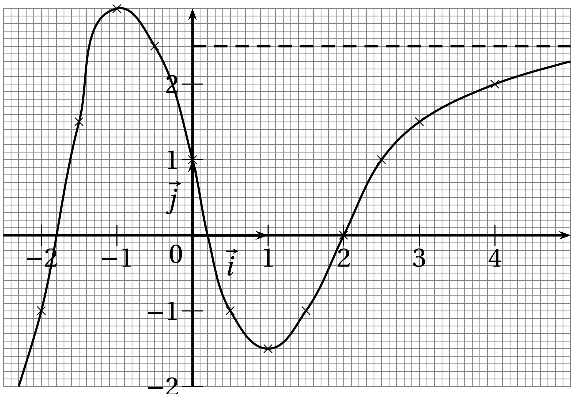
EXERCICE 3.7 (Avec la calculatrice)**.**
La fonction f est définie sur $[-3;3]$ par : $f(x) = x^2 - 3x + 1$.
Après avoir dressé un tableau de valeurs de la fonction, tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

3.5.2 Résolutions graphiques

EXERCICE 3.8.
La fonction f est définie sur $[-3;3]$ par : $f(x) = x^2 - 3x + 1$.
$\mathscr{C}_f$, courbe représentative de f a déjà été obtenue dans l'exercice 3.7.

1. À l'aide de la représentation graphique $\mathscr{C}_f$, avec la précision permise par le graphique, répondre aux question suivantes :
   (a) Quelle est l'image de 2 ?
   (b) Quelle est l'image de 3 ?
   (c) Quelle est l'image de 4 ?
   (d) Quels sont les antécédents de 1 ?
   (e) Quels sont les antécédents de 2 ?
   (f) Quels sont les antécédents de -2 ?
2. Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :
   (a) $f(x) = 3$;
   (b) $f(x) = -1,5$;
   (c) $f(x) \geqslant -1$;
   (d) $f(x) < 4$;
   (e) $f(x) > -3$;
   (f) $f(x) < -2$.
3. Déterminer graphiquement le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

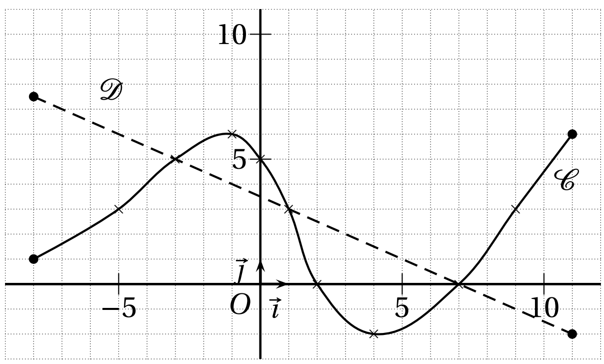
EXERCICE 3.9.
Une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est donnée par sa courbe représentative $\mathscr{C}$:



Avec la précision permise par le graphique, résoudre :

1. Les équations suivantes :
   (a) $f(x) = 1$;
   (b) $f(x) = 0$;
   (c) $f(x) = -1$;
   (d) $f(x) = 2$.
2. Les inéquations suivantes :
   (a) $f(x) \geqslant 1$;
   (b) $f(x) \geqslant 0$;
   (c) $f(x) < -1$;
   (d) $f(x) > 2$.
3. Déterminer graphiquement le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

EXERCICE 3.10.
La courbe $\mathscr{C}$ de la figure ci-dessous représente une fonction f et le segment de droite $\mathscr{D}$ représente une fonction g.



1. Résoudre graphiquement les équations :
   (a) $f(x) = 3$;
   (b) $f(x) = -2$;
   (c) $f(x) = 0$;
   (d) $f(x) = 6$.
2. Résoudre graphiquement les inéquations :
   (a) $f(x) \leqslant 0$;
   (b) $f(x) \geqslant 3$;
   (c) $f(x) > 5$.
3. Résoudre graphiquement :
   (a) $f(x) = g(x)$;
   (b) $f(x) < g(x)$.
4. Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Exercice 3.11 (Avec la calculatrice).
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$ et $g(x) = 3x - 2$.

1. Tracer soigneusement les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de f et g sur l'intervalle $[-2;2]$.
2. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 1$.
3. Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

Exercice 3.12 (Avec la calculatrice).
Les fonctions f et g sont définies sur $[-2;2]$ par : $f(x) = x^3$ et $g(x) = 1 - x$.

1. Tracer sur une calculatrice graphique les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de f et de g.
2. En déduire le nombre de solutions de l'équation $x^3 + x - 1 = 0$.

3.5.3 Résolutions calculatoires

Exercice 3.13.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 2x^2 + x + 3$.

1. Calculer les valeurs exactes de $f(x)$ pour les valeurs de x suivantes :
   - 0 ;
   - 1 ;
   - -2 ;
   - $\sqrt{2}$;
   - $1+\sqrt{3}$;
   - $2-\sqrt{5}$.
2. Résoudre $f(x) = 3$.

Exercice 3.14.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 2x^2 - 5x + 3$.
Résoudre $f(x) = 3$.

Exercice 3.15.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$. On cherche à résoudre, par le calcul, l'équation $f(x) = 9$.

1. Factoriser $f(x)$.
2. Résoudre $f(x) = 9$.

Exercice 3.16.
Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par, respectivement, $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = -x^2 + 2$.
Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = g(x)$.

Exercice 3.17.
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$ et $g(x) = 3x - 2$. On cherche à résoudre, par le calcul, l'équation $f(x) = g(x)$.

1. Développer $(x-1)^2(x+2)$.
2. En déduire les solutions de l'équation $x^3 - 3x + 2 = 0$.
3. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

Exercice 3.18.
On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = x(x-2)$. On cherche à trouver, par le calcul, le minimum de $f(x)$.

1. Démontrer que $f(x) = (x-1)^2 - 1$.
2. En déduire le minimum de $f(x)$.

3.5.4 Variations, extremums

EXERCICE 3.19.
On considère la fonction f dont on donne la représentation $\mathscr{C}$ sur la figure 3.5 de la présente page (en deux parties).
Indiquer son ensemble de définition et dresser son tableau de variations.

EXERCICE 3.20 (Avec une calculatrice)**.**
On considère la fonction f définie par : $f(x) = 2x\sqrt{4-x^2}$. À l'aide d'une calculatrice graphique :

1. conjecturer l'ensemble de définition de f ;
2. conjecturer quels sont les extremums de f sur son ensemble de définition ;
3. dresser le tableau des variations de f.

EXERCICE 3.21.
Tracer une courbe représentative d'une fonction f sachant que :

- le tableau des variations de f est le suivant :

x		0		3	
f	1	↗	↘		↗

- 1 a pour antécédents, par la fonction f, -2 et 1,5 ;
- $f(x) = 0$ a pour solutions $x = 2$ ou $x = 4$;
- $f(-1) = 2$;
- -1 est l'image de 3 ;
- $D_f = [-2;4]$;
- le maximum de f est 3 ;

EXERCICE 3.22.
On donne le tableau des variations d'une fonction f :

x	-5		-3		0		1		8
f	3	↘	0	↗	1	↘	0	↘	-2

1. S'il est possible de répondre, compléter par « < », « > » ou « = ». Sinon mettre une croix.
   - $f(-1)$ …… $f(-2)$
   - $f(-3)$ …… $f(1)$
   - $f(-1)$ …… 1
   - $f(-2)$ …… $f(0,5)$
   - $f(-2)$ …… $f(1,5)$
   - $f(4)$ …… $f(2)$
   - 4 …… $f(-4)$
2. Résoudre, lorsque c'est possible, les inégalités suivantes :

   (a) $f(x) \geqslant 0$; (c) $f(x) < -1$;
   (b) $f(x) = 1$; (d) $f(x) < 0$.

3. Dire, si c'est possible, quel est le maximum de la fonction et quel est son minimum.

FIGURE 3.5: Figure de l'exercice 3.19