Chapitre 1

Calculs dans l'espace

Sommaire

1.1 Perspective cavalière

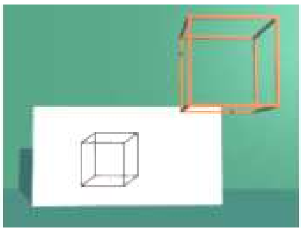
1.1.1 Principe

Dans ce chapitre, nous allons travailler sur des objets en trois dimensions qui seront représentés, la plupart du temps, sur des feuilles de papier qui, elles, n'ont que deux dimensions et sur lesquelles il faudra donner l'illusion de la profondeur. C'est le but de la perspective.

La représentation que nous utiliserons s'appelle la *perspective cavalière*.

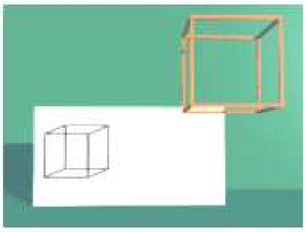
Le principe de la perspective cavalière est le suivant :

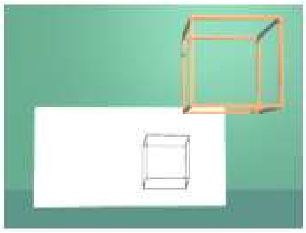
Vous faites face à un écran. Le soleil éclaire la scène (il est dans votre dos). Un cube est placé devant l'écran et il projette son ombre sur cet écran.
Il est placé de telle façon que deux de ses faces sont parallèles à l'écran et deux autres horizontales.
Si les rayons du soleil ne sont pas perpendiculaires à l'écran, l'ombre du cube sur l'écran est une représentation en perspective cavalière du cube.



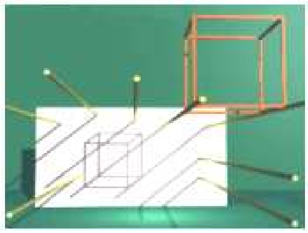
Remarques.

- Il arrivera parfois que le cube soit représenté sans faces parallèles à l'écran.
- Si les rayons sont perpendiculaires à l'écran, on parle de perspective orthogonale. Dans toute la suite, on exclura ce cas.
- On parle d'**une** représentation en perspective cavalière, car la forme de l'ombre dépend de la direction des rayons du soleil.





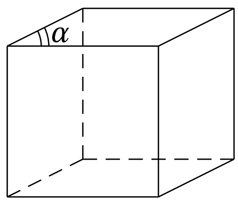
On appelle fuyante *une droite perpendiculaire à l'écran.*
Les ombres de toutes les fuyantes sont parallèles et leur direction commune dépend de celle des rayons du soleil.



1.1.2 Construction et propriétés

Construction

- L'angle α des fuyantes (droites perpendiculaires au plan de projection) vaut habituellement 30°, 45° ou 60°.
- Toutes les dimensions qui sont dans des plans parallèles au plan de projection sont représentées en vraie grandeur.
- Les dimensions qui sont portées par les fuyantes sont multipliées par un coefficient de réduction, en général compris entre 0,5 et 0,8.



Propriétés

- *Des droites parallèles sont représentées sur le dessin par des droites parallèles.*
- *Des droites sécantes sont représentées sur le dessin par des droites sécantes.*
- *Les rapports de longueur sur une droite sont conservés sur le dessin.*
  Ainsi, par exemple, le milieu d'un segment est représenté sur le dessin par le milieu du segment obtenu.

Remarques. Attention, les réciproques ne sont pas vraies. Ainsi :

- Deux droites qui semblent parallèles sur le dessin ne le sont pas toujours dans la réalité.
- Deux droites qui semblent sécantes sur le dessin ne le sont pas toujours dans la réalité.
- Un point qui semble être au milieu d'un segment dans la représentation en perspective cavalière n'est pas toujours le milieu du segment dans la réalité : il peut ne pas être sur le segment dans la réalité.

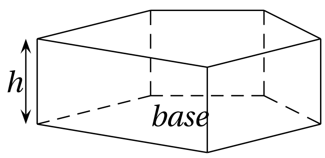
1.2 Solides usuels et volumes

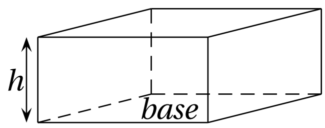
1.2.1 Famille des prismes droits

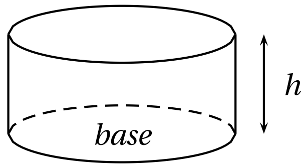
Prisme droit
Toutes les faces sont des rectangles sauf (éventuellement) les deux bases.

Pavé
Prisme droit dont les bases sont des rectangles.

Cylindre
Peut être considéré comme un prisme droit dont les bases sont des disques.







Propriété 1.1. *Le volume de ces solides est donné par la formule suivante :*

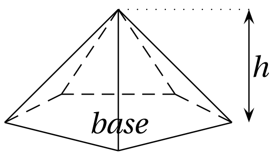
$$\textit{Volume} = \textit{Aire de la base} \times \textit{hauteur}$$

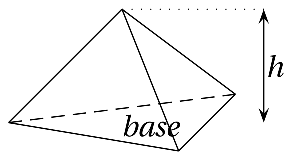
1.2.2 Famille des pyramides

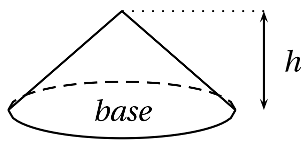
Pyramide
Constituée d'une base de forme quelconque et d'un sommet. Des arêtes joignent ce sommet à chacun des sommets de la base.

Tétraèdre
Pyramide dont la base est un triangle.

Cône de révolution
Peut être considéré comme une pyramide dont la base est un disque.







Propriété 1.2. *Le volume de ces solides est donné par la formule suivante :*

$$\textit{Volume} = \frac{1}{3}\textit{Aire de la base} \times \textit{hauteur}$$

On peut ainsi mettre trois fois le volume d'un cône de révolution dans un cylindre de révolution ayant même base et même hauteur, ou trois fois le volume d'un tétraèdre dans un prisme droit ayant même base et même hauteur.

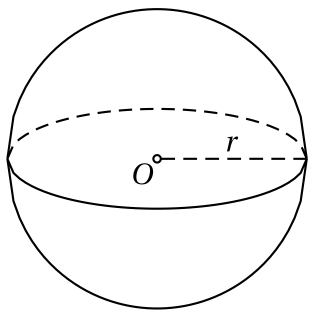
1.2.3 Sphère

Propriété 1.3. *Le volume d'une sphère de rayon r est donné par la formule :*

$$\textit{Volume} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

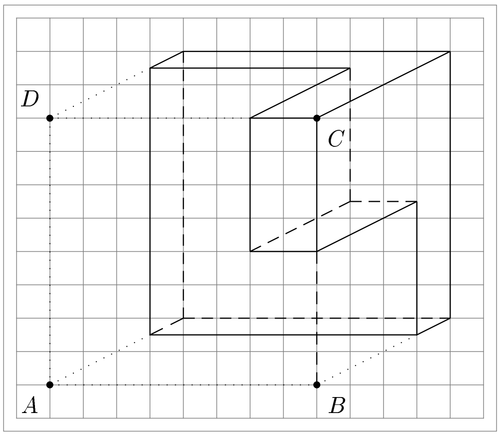
L'aire de la surface d'une sphère de rayon r est donnée par la formule :

$$\textit{Aire} = 4\pi r^2$$



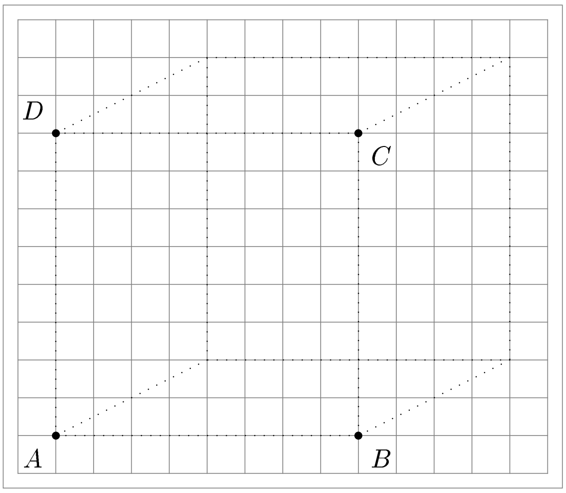
1.3 Exercices

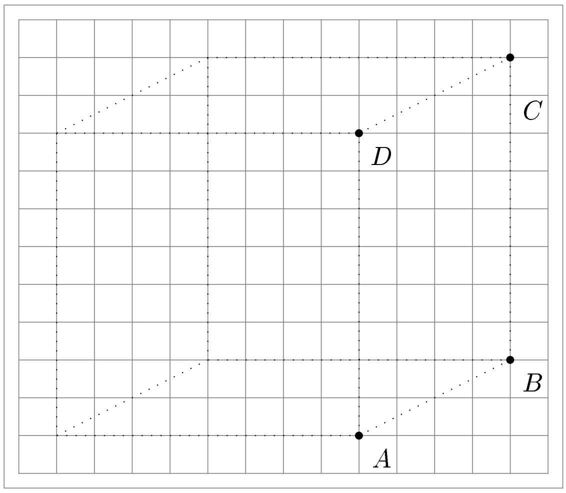
EXERCICE 1.1.
Une pièce métallique (en traits pleins) est découpée dans un cube.



Construire, en perspective cavalière :

- la pièce restante du cube la face $ABCD$ restant devant ;
- la pièce restante du cube la face $ABCD$ étant à droite.





EXERCICE 1.2.
On considère un tétraèdre $ABCD$, dont les faces ABC, ABD et ACD sont des triangles rectangles en A.
On donne $AB = AD = 5$ cm et $AC = 12$ cm.

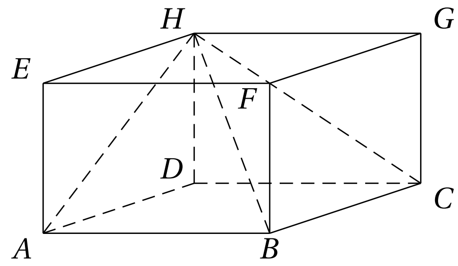
1. Dessiner ce tétraèdre en perspective cavalière, la face ABC étant frontale.
2. Quelle est la nature de CDB ? le représenter en vraie grandeur.
3. Quel est le volume de $ABCD$?

EXERCICE 1.3.
$ABCDEFGH$ est un cube d'arête a.

1. Quelle est la nature du triangle AFC ? Justifier.
   Le représenter en vraie grandeur à la règle et au compas en prenant $a = 6$ cm.
2. Calculer la longueur d'une diagonale principale du cube.

EXERCICE 1.4.

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle (un pavé) tel que $AB = 10$, $AE = 6$ et $BC = 8$.



1. Calculer les longueurs des segments $[HA]$, $[HF]$, $[HC]$ et $[HB]$.
2. Calculer le volume des pyramides $HABCD$ et $HBCGF$.
3. Réaliser un patron de ces deux pyramides.

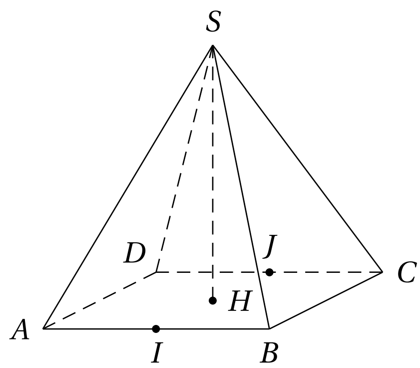
EXERCICE 1.5.

$ABCDEFGH$ est un cube. $AB = 5$ cm. Soit I le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABH.

1. Calculer AH et HB.
2. On admet que le triangle AHB est rectangle en A. Calculer alors AI.
   On pourra utiliser $\mathscr{A}$, l'aire du triangle AHB.
3. Représenter en vraie grandeur le triangle AIC.
4. Démontrer que la mesure en degrés de $\widehat{AIC}$ est 120°.

EXERCICE 1.6.

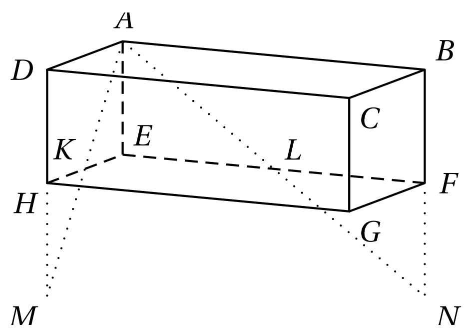
Soit $SABCD$ une pyramide régulière dont la base est le carré de côté $2a$ et dont les faces latérales sont des triangles isocèles d'angles au sommet de mesure 30°. On désigne respectivement par I, J et H les milieux de $[AB]$, $[CD]$ et le centre du carré $ABCD$.



1. Déterminer, en fonction de a, la hauteur SH de cette pyramide.
2. Réaliser un patron de cette pyramide en prenant $a = 5$ cm.

EXERCICE 1.7.

K et L sont les milieux des arêtes $[EH]$ et $[EF]$ du parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$. Les droites (AK) et (DH) se coupent en M. Les droites (AL) et (BF) se coupent en N.



1. Démontrer que K est le milieu de $[AM]$.
2. Démontrer que les droites (KL) et (MN) sont parallèles.

EXERCICE 1.8.

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle (un pavé) tel que $AB = 5$, $AE = 2$ et $BC = 3$.

Une fourmi se situe en E et se rend en C en cheminant sur les faces.

Déterminer le trajet le plus court.

Indication : on pourra s'aider du patron.