Chapitre 12

Géométrie dans l'espace

Sommaire

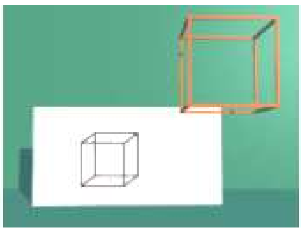
12.1 Perspective cavalière

12.1.1 Principe

Dans ce chapitre, nous allons travailler sur des objets en trois dimensions qui seront représentés, la plupart du temps, sur des feuilles de papier qui, elles, n'ont que deux dimensions et sur lesquelles il faudra donner l'illusion de la profondeur. C'est le but de la perspective.

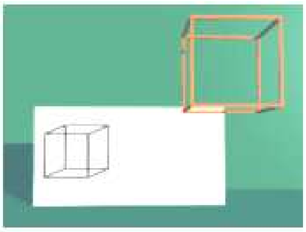
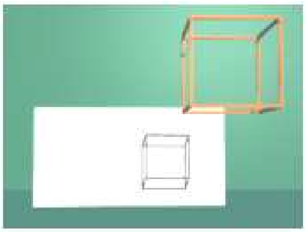
La représentation que nous utiliserons s'appelle la *perspective cavalière*.
Le principe de la perspective cavalière est le suivant :

Vous faites face à un écran. Le soleil éclaire la scène (il est dans votre dos). Un cube est placé devant l'écran et il projette son ombre sur cet écran.
Il est placé de telle façon que deux de ses faces sont parallèles à l'écran et deux autres horizontales.
Si les rayons du soleil ne sont pas perpendiculaires à l'écran, l'ombre du cube sur l'écran est une représentation en perspective cavalière du cube.

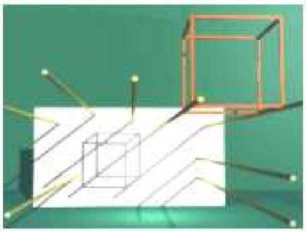


Remarques.

- Il arrivera parfois que le cube soit représenté sans faces parallèles à l'écran.
- Si les rayons sont perpendiculaires à l'écran, on parle de perspective orthogonale. Dans toute la suite, on exclura ce cas.
- On parle d'**une** représentation en perspective cavalière, car la forme de l'ombre dépend de la direction des rayons du soleil.

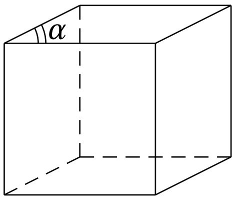
On appelle fuyante *une droite perpendiculaire à l'écran.*
Les ombres de toutes les fuyantes sont parallèles et leur direction commune dépend de celle des rayons du soleil.



12.1.2 Construction et propriétés

Construction

- L'angle α des fuyantes (droites perpendiculaires au plan de projection) vaut habituellement 30°, 45° ou 60°.
- Toutes les dimensions qui sont dans des plans parallèles au plan de projection sont représentées en vraie grandeur.
- Les dimensions qui sont portées par les fuyantes sont multipliées par un coefficient de réduction, en général compris entre 0,5 et 0,8.



Propriétés

- *Des droites parallèles sont représentées sur le dessin par des droites parallèles.*
- *Des droites sécantes sont représentées sur le dessin par des droites sécantes.*
- *Les rapports de longueur sur une droite sont conservés sur le dessin.*
  Ainsi, par exemple, le milieu d'un segment est représenté sur le dessin par le milieu du segment obtenu.

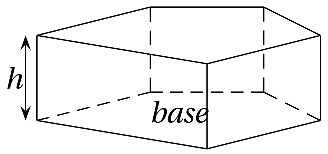
Remarques. Attention, les réciproques ne sont pas vraies. Ainsi :

- Deux droites qui semblent parallèles sur le dessin ne le sont pas toujours dans la réalité.
- Deux droites qui semblent sécantes sur le dessin ne le sont pas toujours dans la réalité.
- Un point qui semble être au milieu d'un segment dans la représentation en perspective cavalière n'est pas toujours le milieu du segment dans la réalité : il peut ne pas être sur le segment dans la réalité.

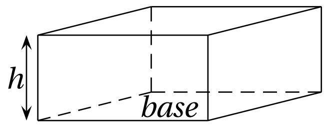
12.2 Solides usuels et volumes

12.2.1 Famille des prismes droits

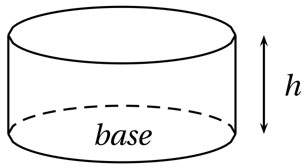
Prisme droit
Toutes les faces sont des rectangles sauf (éventuellement) les deux bases.



Pavé
Prisme droit dont les bases sont des rectangles.



Cylindre
Peut être considéré comme un prisme droit dont les bases sont des disques.

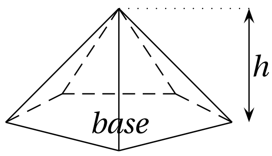


Propriété 12.1. *Le volume de ces solides est donné par la formule suivante :*

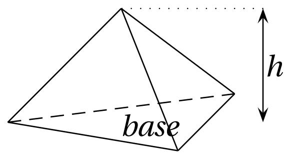
$$\textit{Volume} = \textit{Aire de la base} \times \textit{hauteur}$$

12.2.2 Famille des pyramides

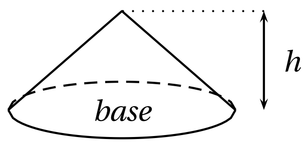
Pyramide
Constituée d'une base de forme quelconque et d'un sommet. Des arêtes joignent ce sommet à chacun des sommets de la base.



Tétraèdre
Pyramide dont la base est un triangle.



Cône de révolution
Peut être considéré comme une pyramide dont la base est un disque.



Propriété 12.2. *Le volume de ces solides est donné par la formule suivante :*

$$\textit{Volume} = \frac{1}{3}\textit{Aire de la base} \times \textit{hauteur}$$

On peut ainsi mettre trois fois le volume d'un cône de révolution dans un cylindre de révolution ayant même base et même hauteur, ou trois fois le volume d'un tétraèdre dans un prisme droit ayant même base et même hauteur.

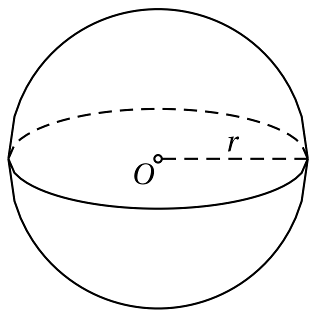
12.2.3 Sphère

Propriété 12.3. *Le volume d'une sphère de rayon r est donné par la formule :*

$$\textit{Volume} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

L'aire de la surface d'une sphère de rayon r est donnée par la formule :

$$\textit{Aire} = 4\pi r^2$$



12.3 Incidence et parallélisme dans l'espace

12.3.1 Règles d'incidence

Règle 12.1. *Par deux points distincts de l'espace A et B, il passe une unique droite, notée (AB).*

Règle 12.2. *Par trois points non alignés de l'espace A, B et C, il passe un unique plan, noté (ABC).*

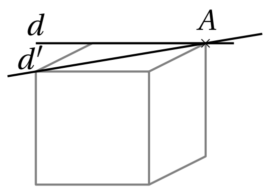
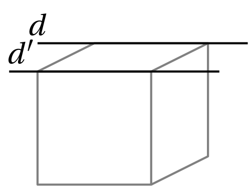
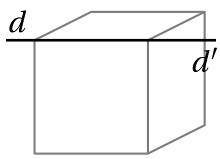
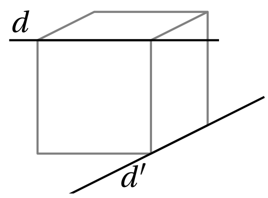
Règle 12.3. *Si deux points distincts A et B de l'espace appartiennent à un plan $\mathscr{P}$, alors la droite (AB) est contenue dans le plan $\mathscr{P}$, c'est-à-dire que tout point M appartenant à la droite (AB) appartient aussi au plan $\mathscr{P}$.*

Règle 12.4. *Dans chaque plan de l'espace, on peut appliquer tous les théorèmes de géométrie plane (*Pythagore*,* Thalès*, etc.).*

12.3.2 Postions relatives

Positions relatives de deux droites

Règle 12.5. *Deux droites de l'espace sont soit coplanaires, soit non coplanaires.*

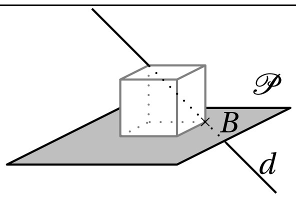
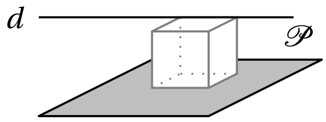
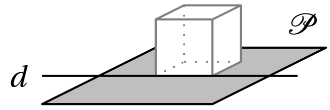
Coplanaires (dans un même plan)			**Non coplanaires**
d et d' sécantes	d et d' parallèles		
			
d et d' ont un point d'intersubsection A. $d \cap d' = \{A\}$	d et d' sont strictement parallèles. $d \cap d' = \varnothing$	d et d' sont confondues $d \cap d' = d = d'$	Aucun plan ne contient à la fois d et d'. $d \cap d' = \varnothing$

Remarques.

- Contrairement au plan, deux droites de l'espace n'ayant pas de point en commun ne sont pas forcément parallèles.
- Des droites strictement parallèles sont des droites **coplanaires et qui n'ont aucun point en commun**.
- On peut définir un plan de plusieurs manières :
  - par la donnée de trois points;
  - par la donné de deux droites sécantes;
  - par la donnée de deux droites strictement parallèles;
  - par la donnée d'une droite et d'un point n'appartenant par à cette droite.

Positions relatives d'une droite et d'un plan

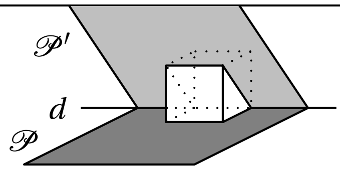
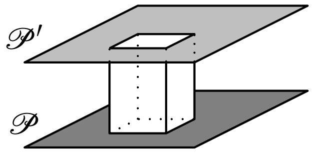
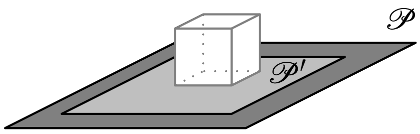
Règle 12.6. *Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.*

Sécants	**Parallèles**	
		
d et $\mathscr{P}$ ont un point d'intersubsection B. $d \cap \mathscr{P} = \{B\}$	d et $\mathscr{P}$ sont strictement parallèles. $d \cap \mathscr{P} = \varnothing$	d est contenue dans $\mathscr{P}$ $d \cap \mathscr{P} = d$

Remarque. Une droite d et un plan $\mathscr{P}$ sont parallèles s'ils ne sont pas sécants. On note alors $d \parallel \mathscr{P}$ ou $\mathscr{P} \parallel d$.

Positions relatives de deux plans

Règle 12.7. *Deux plans de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.*

Sécants	**Parallèles**	
		
$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ont une droite d'intersubsection d. $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = d$	$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont strictement parallèles. $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \varnothing$	$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont confondus $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \mathscr{P} = \mathscr{P}'$

Remarque. Deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles lorsqu'ils ne sont pas sécants. On note $\mathscr{P} \parallel \mathscr{P}'$.

Remarques.

- Pour démontrer que trois points sont alignés, il suffit de montrer que les trois points appartiennent à deux plans sécants : comme l'intersubsection de deux plans sécants est une droite, cela implique que les points sont tous les trois sur cette droite.
- Pour trouver la droite d'intersubsection de deux plans, il suffit de trouver deux points distincts qui appartiennent aux deux plans : la droite d'intersubsection est alors celle qui passe par ces deux points. Ces points sont en général des points d'intersubsection de droites sécantes, l'une contenue dans l'un des plans, l'autre dans l'autre plan.

12.3.3 Parallélisme dans l'espace

Parallélisme entre droites

Propriété 12.4. *Deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.*

$$\text{Si } d \parallel d' \text{ et } d' \parallel d'' \text{ alors } d \parallel d''$$

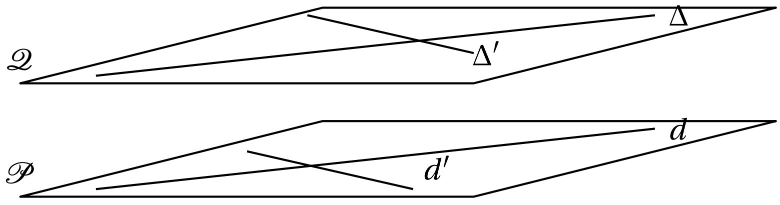
Propriété 12.5. *Si deux droites sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'une, coupe l'autre.*

Parallélisme entre plans

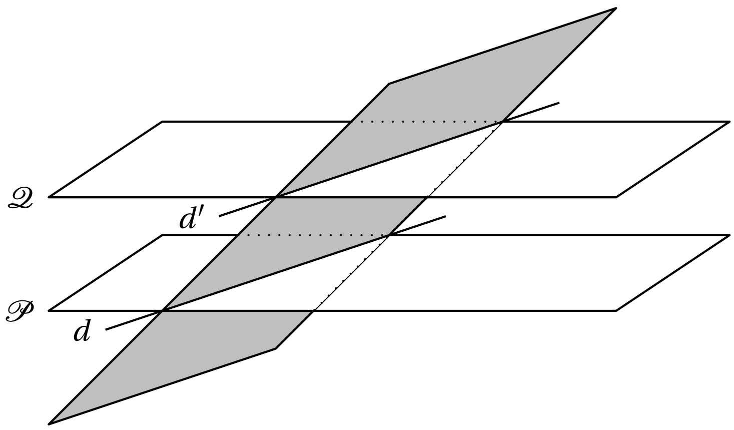
Propriété 12.6. *Deux plans parallèles à un même plan sont parallèles entre eux.*

$$\text{Si } \mathscr{P} \parallel \mathscr{P}' \text{ et } \mathscr{P}' \parallel \mathscr{P}'' \text{ alors } \mathscr{P} \parallel \mathscr{P}''$$

Propriété 12.7. *Si deux droites sécantes d et d' d'un plan $\mathscr{P}$ sont parallèles à deux droites sécantes Δ et Δ' d'un plan $\mathscr{Q}$, alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont parallèles.*



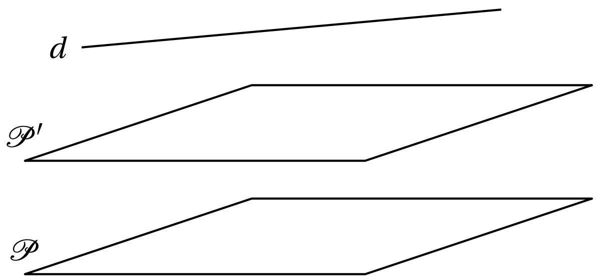
Propriété 12.8. *Si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles, alors tout plan sécant à $\mathscr{P}$ est aussi sécant à $\mathscr{P}'$ et leurs droites d'intersubsection d et d' sont parallèles.*



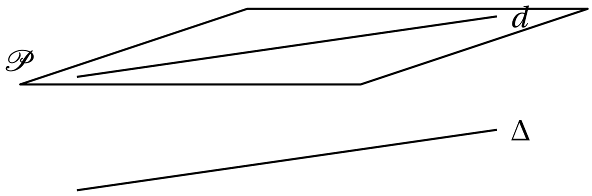
Parallélisme entre droite et plan

Propriété 12.9. *Si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles et si une droite d est parallèle à $\mathscr{P}$, alors d est parallèle à $\mathscr{P}'$.*

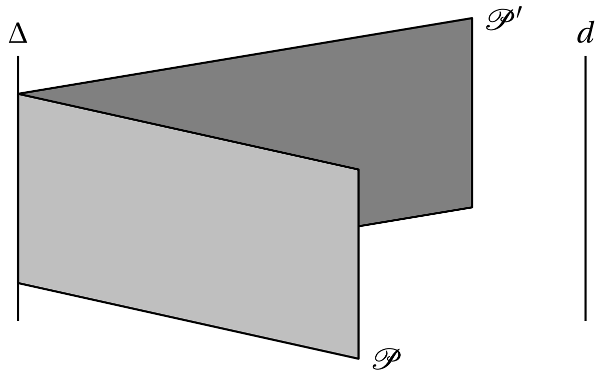
$$\text{Si } d \parallel \mathscr{P} \text{ et } \mathscr{P} \parallel \mathscr{P}' \text{ alors } d \parallel \mathscr{P}'$$



Propriété 12.10. *Si deux droites d et Δ sont parallèles, et si d est contenue dans un plan $\mathscr{P}$, alors Δ est parallèle à $\mathscr{P}$.*



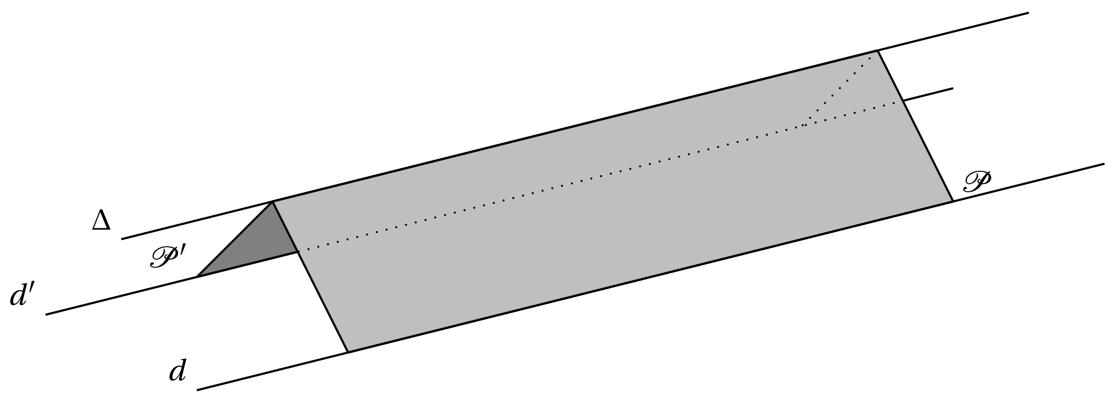
Propriété 12.11. *Si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants selon une droite Δ et si d est une droite parallèle à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ alors d et Δ sont parallèles.*



Théorème 12.12 (Théorème du toit)**.** *Si :*

- *d et d' sont parallèles ;*
- *$\mathscr{P}$ est un plan qui contient d et $\mathscr{P}'$ est un plan qui contient d' ;*
- *$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants selon une droite Δ*

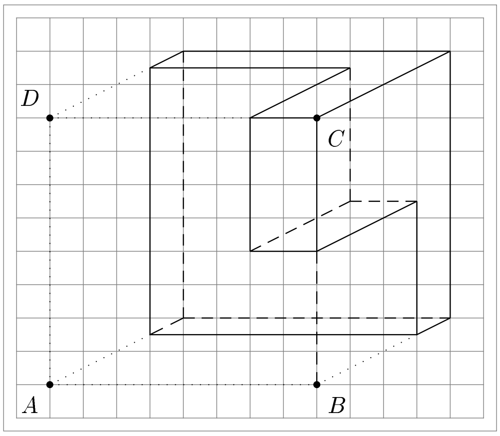
alors Δ est parallèle à d et à d'.



12.4 Exercices

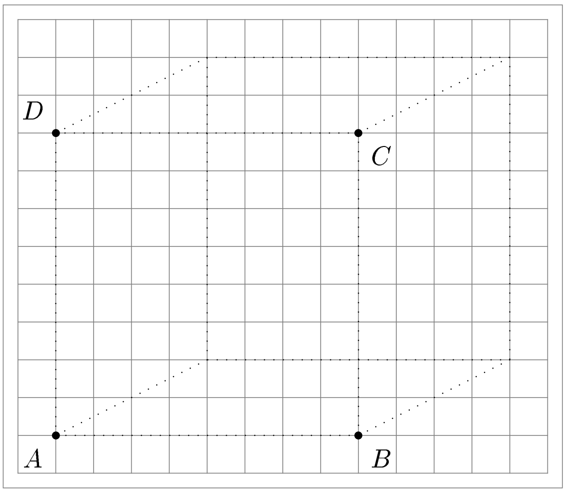
12.4.1 Perspective et calculs

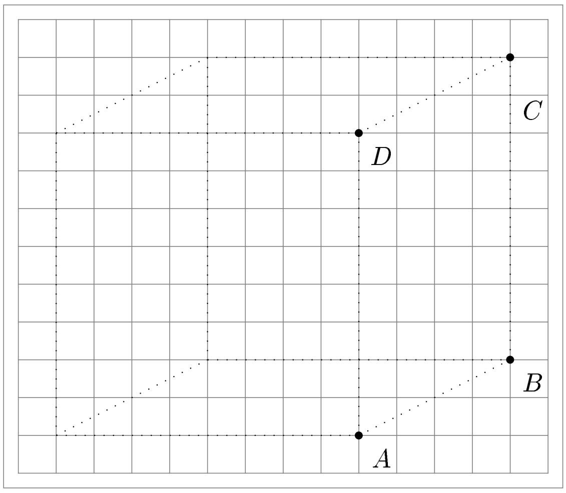
EXERCICE 12.1.
Une pièce métallique (en traits pleins) est découpée dans un cube.



Construire, en perspective cavalière :

- la pièce restante du cube la face $ABCD$ restant devant ;
- la pièce restante du cube la face $ABCD$ étant à droite.





EXERCICE 12.2.
On considère un tétraèdre $ABCD$, dont les faces ABC, ABD et ACD sont des triangles rectangles en A.
On donne $AB = AD = 5$ cm et $AC = 12$ cm.

1. Dessiner ce tétraèdre en perspective cavalière, la face ABC étant frontale.
2. Quelle est la nature de CDB ? le représenter en vraie grandeur.
3. Quel est le volume de $ABCD$?

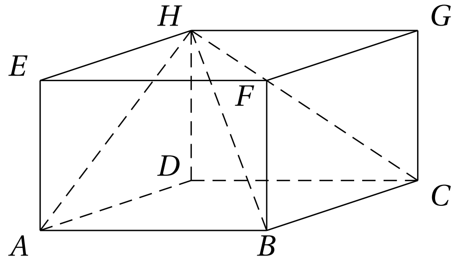
EXERCICE 12.3.
$ABCDEFGH$ est un cube d'arête a.

1. Quelle est la nature du triangle AFC ? Justifier.
   Le représenter en vraie grandeur à la règle et au compas en prenant $a = 6$ cm.
2. Calculer la longueur d'une diagonale principale du cube.

EXERCICE 12.4.
On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté a. On nomme P le centre de la face $EFGH$ et Q le centre de la face $BCGF$. M désigne le milieu de $[PQ]$. On admettra que (EG) est perpendiculaire à (EA) et que (BG) est perpendiculaire à (AB).

1. Montrer que $PQ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ puis que $AP = AQ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.
2. Calculer une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{PAQ}$.
3. Donner, en fonction de a, la valeur exacte de l'aire du triangle APQ.

EXERCICE 12.5.
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle (un pavé) tel que $AB = 10$, $AE = 6$ et $BC = 8$.



1. Calculer les longueurs des segments $[HA]$, $[HF]$, $[HC]$ et $[HB]$.
2. Calculer le volume des pyramides $HABCD$ et $HBCGF$.
3. Réaliser un patron de ces deux pyramides.

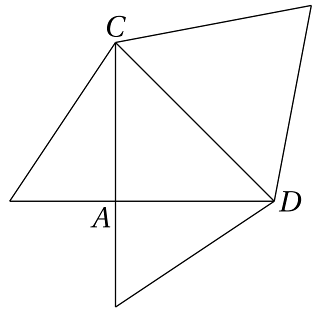
EXERCICE 12.6.
$ABCDEFGH$ est un cube. $AB = 5$ cm. Soit I le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABH.

1. Calculer AH, HB et AI.
2. Représenter en vraie grandeur le triangle AIC.
3. Démontrer que la mesure en degrés de $\widehat{AIC}$ est 120°.

EXERCICE 12.7.
$SABC$ est un tétraèdre régulier d'arête a. Calculer en fonction de a :

1. la hauteur SH (on admettra que H est l'intersubsection des hauteurs de ABC ;
2. l'aire du triangle ABC et l'aire totale du tétraèdre ;
3. le volume du tétraèdre.

EXERCICE 12.8.
La figure ci-contre est un patron d'un solide $ABCD$. Le triangle ADC est rectangle en A et a pour dimensions :



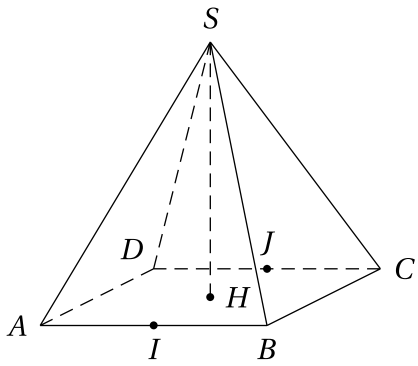
- $AD = 3,5$ cm ;
- $AC = 4$ cm ;
- $AB = 3$ cm.

1. De quel type de solide s'agit-il ?
2. Le dessiner en perspective cavalière, en mettant la face ABC en vraie grandeur.

EXERCICE 12.9.

Soit $SABCD$ une pyramide régulière dont la base est le carré de côté $2a$ et dont les faces latérales sont des triangles isocèles d'angles au sommet de mesure 30°. On désigne respectivement par I, J et H les milieux de $[AB]$, $[CD]$ et le centre du carré $ABCD$.

1. Déterminer, en fonction de a, la hauteur SH de cette pyramide.
2. Réaliser un patron de cette pyramide en prenant $a = 5$ cm.



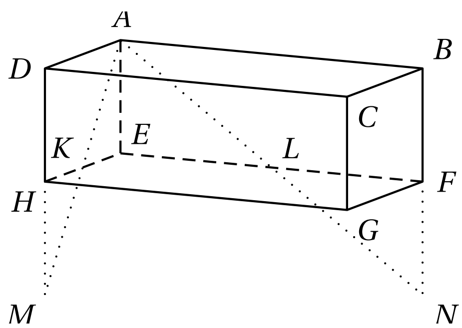
EXERCICE 12.10.

La grande pyramide de Kheops est à sa base un carré presque parfait de 5,3 hectares correctement orienté par rapport au Nord et dont les côtés Nord et Sud sont parallèles à 2,5 cm près. Sa hauteur, à l'origine, était de 146 mètres. En utilisant la hauteur et les renseignements fournis par le texte ci-dessus, desiner un patron de cette pyramide à l'échelle $1/2600^e$.
Calculer l'aire d'une des faces de la pyramide.
Comparer le résultat obtenu avec l'aire d'un carré de côté la hauteur de la pyramide.

EXERCICE 12.11.

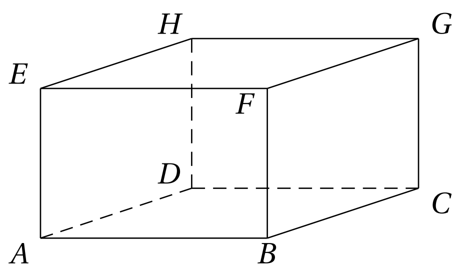
K et L sont les milieux des arêtes $[EH]$ et $[EF]$ du parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$. Les droites (AK) et (DH) se coupent en M. Les droites (AL) et (BF) se coupent en N.

1. Démontrer que K est le milieu de $[AM]$.
2. Démontrer que les droites (KL) et (MN) sont parallèles.



EXERCICE 12.12.

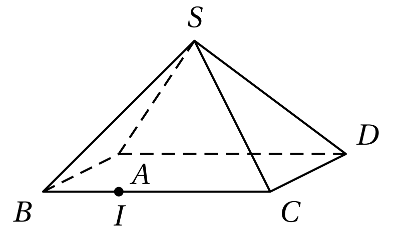
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle (un pavé) tel que $AB = 5$, $AE = 2$ et $BC = 3$.
Une fourmi se situe en E et se rend en C en cheminant sur les faces.
Déterminer le trajet le plus court.
Indication : on pourra s'aider du patron.



12.4.2 Incidence et parallélisme

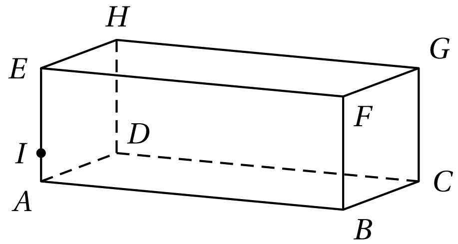
EXERCICE 12.13.
$SABCD$ est une pyramide à base carrée. I est un point du segment $[BC]$, distinct de B et C.

1. Montrer que les plans (SAI) et (SCD) sont sécants.
2. Construire leur intersubsection.



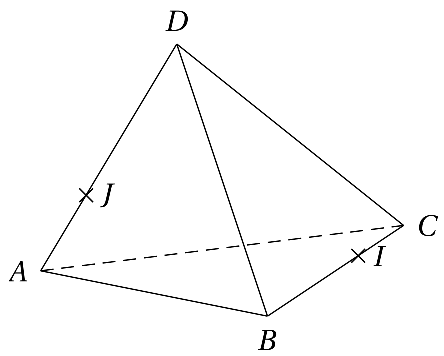
EXERCICE 12.14.
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle. I est un point de $[AE]$ distinct de A et de E.

1. Démontrer que A, C, G et I sont coplanaires.
2. Démontrer que la droite (GI) n'est pas contenue dans le plan $(ABCD)$.
3. Construire J, intersubsection de la droite (GI) et du plan $(ABCD)$.

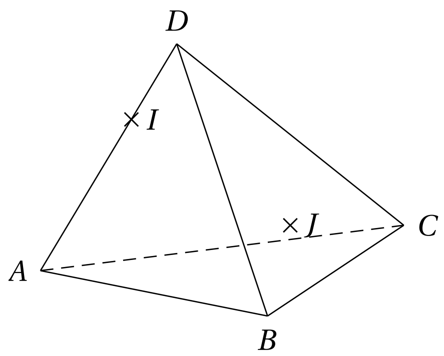


EXERCICE 12.15.
$ABCD$ est un tétraèdre. I est un point de $[BC]$ distinct de B et de C. J est un point de $[AD]$ distinct de A et de D.
Dans les cas suivants, démontrer que les plans sont sécants et déterminer leur intersubsection.

1. (DIJ) et (BCD).
2. (DIJ) et (ABD).
3. (DIJ) et (ABC).

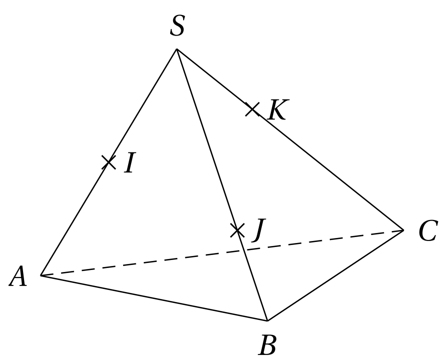


EXERCICE 12.16.
$ABCD$ est un tétraèdre. I est un point de $[DA]$ distinct de D et de A. J est un point de la face BCD tel que la droite (IJ) n'est pas parallèle au plan (ABC).
Construire l'intersubsection de la droite (IJ) et du plan (ABC).
Indication : on pourra commencer par construire l'intersubsection des plans (DIJ) et (ABC).

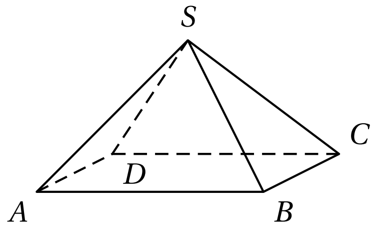


EXERCICE 12.17.
$SABC$ est un tétraèdre. I, J et K sont des points de, respectivement, $[SA]$, $[SB]$ et $[SC]$.

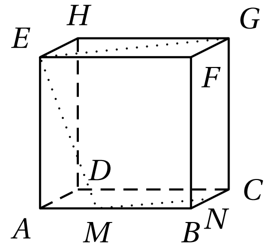
1. Construire E, intersubsection de (BC) et (JK), F, intersubsection de (AC) et (IK), G, intersubsection de (AB) et (IJ).
2. Démontrer que F est un point commun aux plans (ABC) et (IJK).
3. Prouver que les points E, F et G sont alignés.



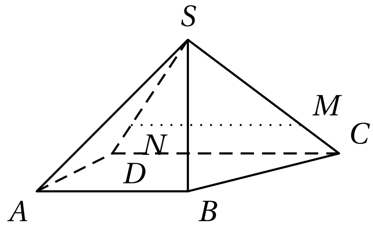
EXERCICE 12.18.
$SABCD$ est une pyramide à base carrée. I est le milieu de $[AS]$ et L est le milieu de $[BS]$.
Démontrer que les droites (IL) et (CD) sont parallèles.



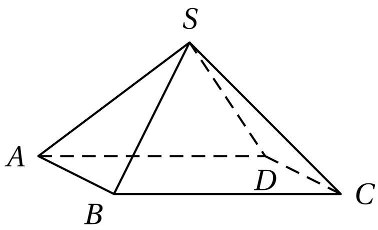
EXERCICE 12.19.
$ABCDEFGH$ est un cube. M est un point de l'arête $[AB]$. Le plan (GEM) coupe la droite (BC) en N.
Démontrer que les droites (MN) et (EG) sont parallèles.



EXERCICE 12.20.
$SABCD$ est une pyramide de sommet S à base trapézoïdale avec $(AB) \parallel (CD)$. M est un point de l'arête $[SC]$. Le plan (ABM) coupe la droite (SD) en N.
Démontrer que les droites (MN) et (DC) sont parallèles.

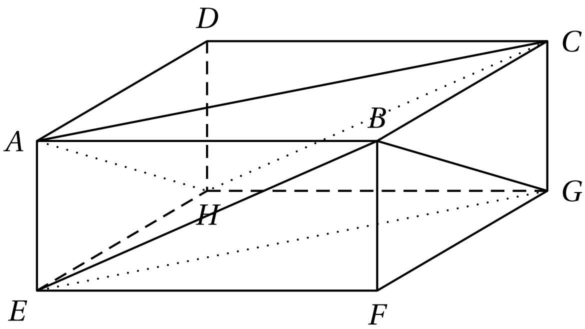


EXERCICE 12.21.
$SABCD$ est une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un parallélogramme.
Démontrer que les plans (SAB) et (SDC) se coupent selon la parallèle à (AB) passant par S.

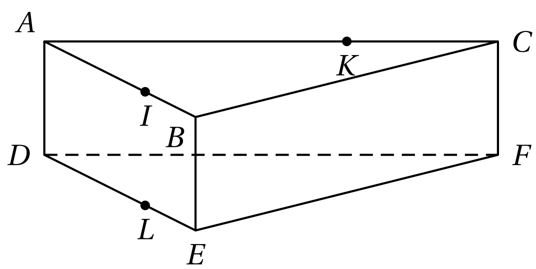


EXERCICE 12.22.
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle.

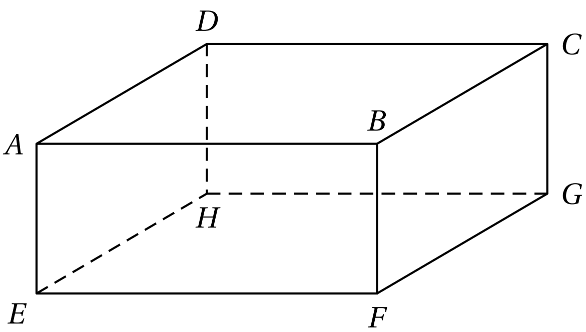
1. Le quadrilatère $BEHC$ est un rectangle. Que peut-on en déduire pour les droites (EB) et (HC) ?
2. De façon analogue, que peut-on dire des droites (AH) et (BG) ?
3. En déduire alors la position relative des plans (ACH) et (EBG) ?



EXERCICE 12.23.
$ABCDEF$ est un prisme droit à base triangulaire. I, L et K sont les points des arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[DE]$ tels que : $AI = \frac{2}{3}AB$; $AK = \frac{2}{3}AC$ et $EL = \frac{1}{3}ED$.
Démontrer que le plan (IKL) est parallèle au plan (BCF).



EXERCICE 12.24.
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle.
Démontrer que la droite (AC) est parallèle au plan (EFH).

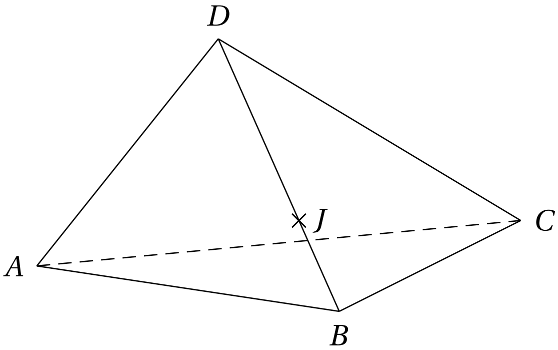


12.4.3 Sections

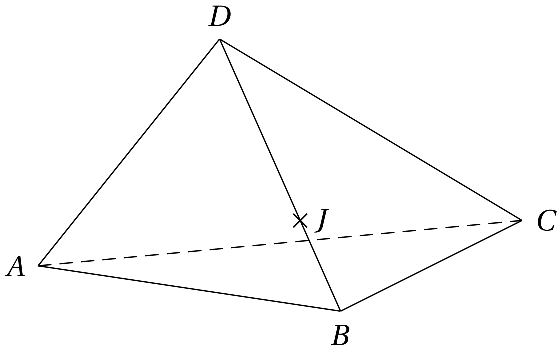
EXERCICE 12.25 (Sections planes d'un tétraèdre)**.**
Dans chacun des cas présentés sur la figure 12.1 de la présente page, placer les points I et K, puis, à l'aide des propriétés de géométrie dans l'espace vues en Seconde, construire sur le dessin en perspective la trace du plan (IJK) sur le tétraèdre $ABCD$. On donne $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$

FIGURE 12.1: Sections de l'exercice 12.25

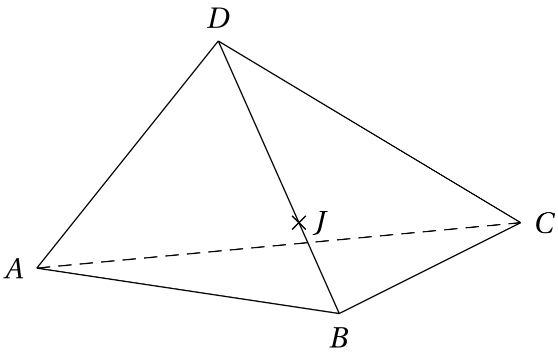
$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$



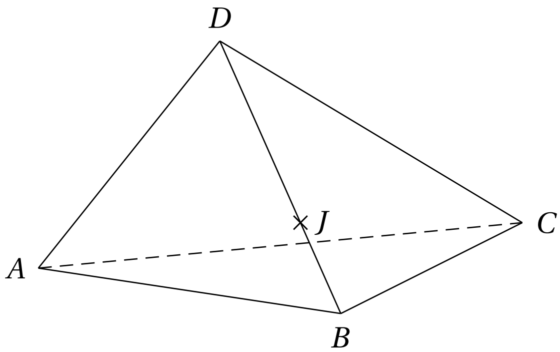
$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et K centre de gravité de ABC



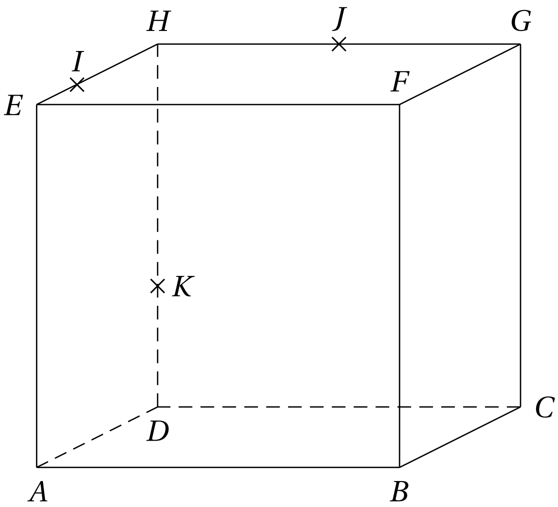
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$



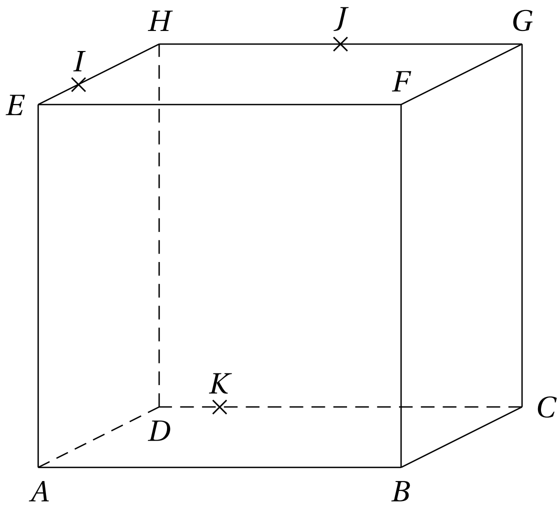
Exercice 12.26 (Sections planes d'un cube)**.**
Dans chacun des cas présentés sur la figure 12.2 de la présente page, à l'aide des propriétés de géométrie dans l'espace, construire sur le dessin en perspective la trace du plan (IJK) sur le cube $ABCDEFGH$. On donne : $AB = 6$ cm ; $EI = 2$ cm ; J milieu de $[HG]$.

Figure 12.2: Sections de l'exercice 12.26

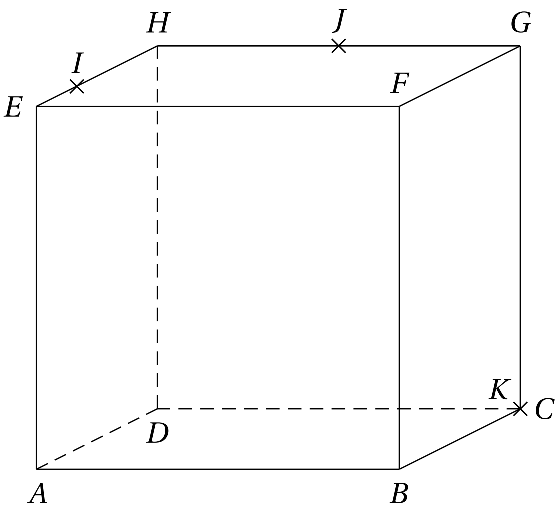
$DK = 2$ cm



$KD = 1$ cm



$K = C$



K milieu de $[BC]$