

# Chapitre 8

## Vecteurs et repérage

### Sommaire

<b>8.1 Repères et coordonnées</b> . . . . .	<b>85</b>
8.1.1 Repères . . . . .	85
8.1.2 Coordonnées de vecteur . . . . .	85
8.1.3 Coordonnées de point . . . . .	87
<b>8.2 Propriétés</b> . . . . .	<b>87</b>
<b>8.3 Exercices</b> . . . . .	<b>89</b>
8.3.1 Repère donné . . . . .	89
8.3.2 Repère à choisir . . . . .	89

Le notion de repérage a déjà été abordée lors du chapitre 1. Elle peut être revisitée au travers des vecteurs.

## 8.1 Repères et coordonnées

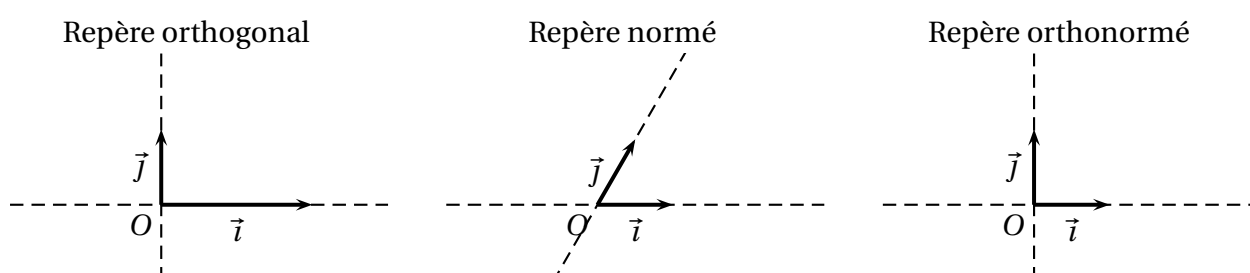
### 8.1.1 Repères

**Définition 8.1.** Soient  $O$  un point du plan et  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  deux vecteurs de ce plan de directions différentes (non colinéaires), alors  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  est appelé *repère* du plan.

*Remarque.*  $O$  est appelée *origine* du repère et le couple  $(\vec{i}, \vec{j})$  est appelé *base* du repère.

**Définition 8.2.** Soit un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

- Si les directions de  $\vec{i}$  et de  $\vec{j}$  sont orthogonales, le repère est dit *orthogonal*.
- Si les normes de  $\vec{i}$  et de  $\vec{j}$  sont égales à 1, le repère est dit *normé*.
- Si les directions de  $\vec{i}$  et de  $\vec{j}$  sont orthogonales et que les normes de  $\vec{i}$  et de  $\vec{j}$  sont égales à 1, le repère est dit *orthonormé*.
- Sinon, le repère est dit *quelconque*.



### 8.1.2 Coordonnées de vecteur

**Propriété 8.1** (admise). *Le plan est muni d'une base  $(\vec{i}, \vec{j})$ . Pour tout vecteur  $\vec{u}$  du plan, il existe un unique couple  $(x; y)$ , appelé coordonnées de  $\vec{u}$ , tel que  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ .*

On notera indifféremment  $\vec{u}(x; y)$ , ou  $\vec{u} = (x; y)$ , ou  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , ou  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  (même si l'égalité est un abus d'écriture).

La notation en colonne est particulièrement pratique dans les calculs que nous verrons plus tard.

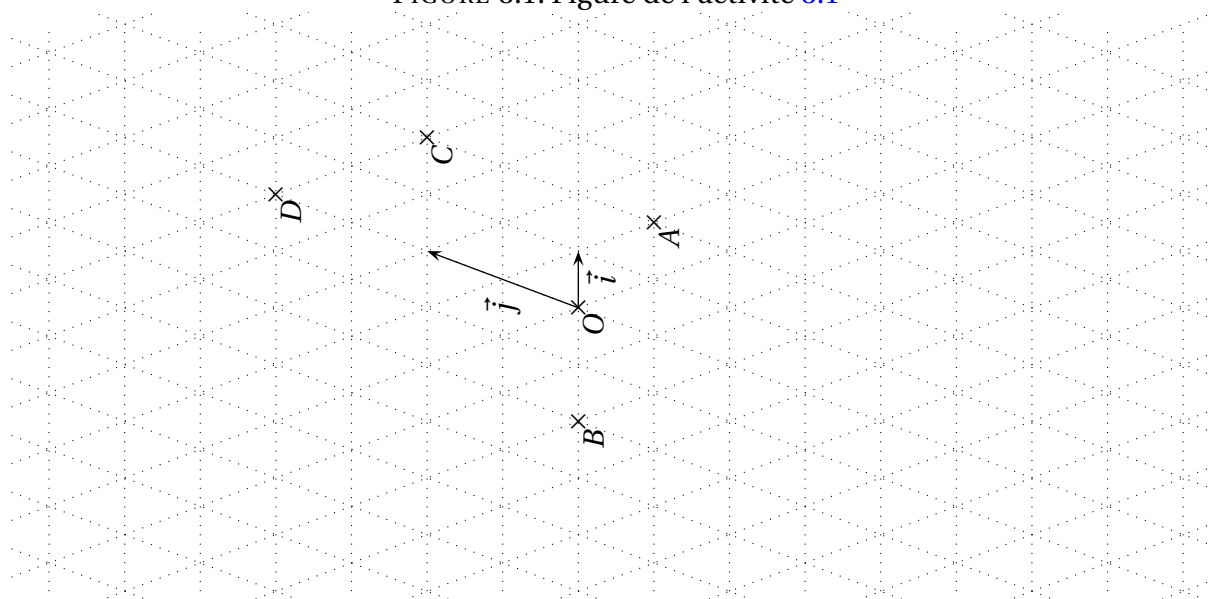
*Remarque.* On notera que l'origine du repère n'a pas d'importance dans les coordonnées d'un vecteur et que le vecteur nul a pour coordonnées  $(0; 0)$ .

#### ACTIVITÉ 8.1.

Sur la figure 8.1 de la présente page où le plan est muni du repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  :

- Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants :  $\overrightarrow{AB}$ ;  $\overrightarrow{AC}$ ;  $\overrightarrow{OA}$ ;  $\overrightarrow{OB}$ ;  $\overrightarrow{OC}$ ;  $\overrightarrow{OD}$ ;  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ .
- (a) Soit  $E$  tel que  $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$ . Construire  $E$  puis déterminer les coordonnées de  $\overrightarrow{CE}$ .  
(b) Soit  $F$  tel que  $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{OC}$ . Construire  $F$  puis déterminer les coordonnées de  $\overrightarrow{FD}$ .
- (a) Construire un représentant de  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ .  
(b) Donner les coordonnées de  $\overrightarrow{AB}$ , de  $\overrightarrow{CD}$  et de  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ .  
(c) Que remarque-t-on?
- (a) Déterminer les coordonnées de  $\overrightarrow{BD}$  et de  $\overrightarrow{DB}$ . Que remarque-t-on?  
(b) Construire un représentant du vecteur  $\vec{v} = 2\overrightarrow{OA}$ . Déterminer ses coordonnées et les comparer à celles de  $\overrightarrow{OA}$ .  
(c) Soit  $K$  le milieu de  $[AD]$ . Déterminer les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AK}$  et  $\overrightarrow{AD}$ . Que remarque-t-on?

FIGURE 8.1: Figure de l'activité 8.1



Plus généralement, on a les propriétés suivantes :

**Propriété 8.2.** Le plan est muni d'un repère. Soient  $\vec{u}(x; y)$  et  $\vec{v}(x'; y')$  deux vecteurs et  $k$  un nombre.

- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \dots = \dots$  et  $\dots = \dots$
- Le vecteur  $\vec{u} + \vec{v}$  a pour coordonnées  $(\dots; \dots)$ .
- Le vecteur  $k\vec{u}$  a pour coordonnées  $(\dots; \dots)$ .

Elles seront démontrées en classe.

### 8.1.3 Coordonnées de point

**Définition 8.3.** Le plan étant muni d'un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on appelle *coordonnées* du point  $M$  le couple  $(x; y)$  tel que  $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ,  $x$  étant appelé *abscisse* de  $M$  et  $y$  étant appelé *ordonnée* de  $M$ .

Les coordonnées du point  $M$  sont donc les coordonnées du vecteur  $\vec{OM}$ . Cela implique qu'elles dépendent de l'origine du repère.

## 8.2 Propriétés

### ACTIVITÉ 8.2.

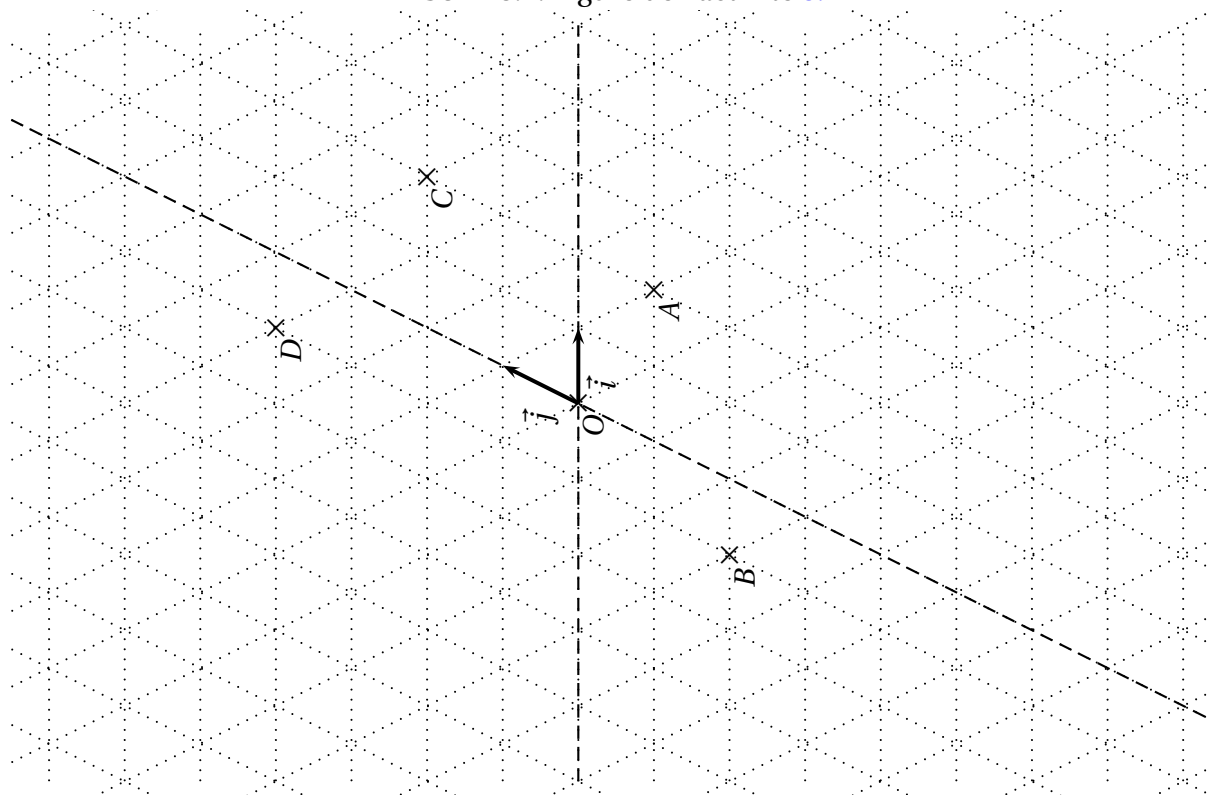
Sur la figure 8.2 page suivante ci-dessous, où le plan est muni du repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  :

1. Graduer les axes tracés de façon à permettre une lecture plus aisée des coordonnées. *L'axe ayant pour direction  $\vec{i}$  est appelé axe des abscisses, l'axe ayant pour direction  $\vec{j}$  est appelé axe des ordonnées. Les deux axes sont appelés les axes de coordonnées.*
2. Placer les points  $M(3; 1)$ ,  $N(-1; 1, 5)$ ,  $P(-2; -1)$  et  $Q(3; -1)$ .
3. Donner graphiquement les coordonnées des points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ .
4. Par lectures graphiques, compléter le tableau suivant :

Point $X$	Coordonnées de $X$	Point $Y$	Coordonnées de $Y$	Coordonnées de $\vec{XY}$
$A$		$B$		
$A$		$C$		
$A$		$D$		
$B$		$A$		
$B$		$C$		
$B$		$D$		

Quel lien peut-on conjecturer entre les coordonnées des points  $X$  et  $Y$  et celles du vecteur  $\vec{XY}$ ?

FIGURE 8.2: Figure de l'activité 8.2



### Bilan et compléments

Les propriétés suivantes seront démontrées en classe :

**Propriété 8.3.** Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points du plan.  
Alors les coordonnées du vecteur  $\vec{AB}$  sont (.....; .....

**Propriété 8.4.** Le plan est muni d'un repère. Soient  $\vec{u}(x; y)$  et  $\vec{v}(x'; y')$  deux vecteurs du plan. Alors :  
 $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  colinéaires  $\Leftrightarrow$  .....

Les propriétés suivantes ont déjà été vues lors du chapitre 1. Elles peuvent être démontrées à l'aide des vecteurs.

**Propriété.** Soit  $P$  un plan muni d'un repère quelconque.  
Soit  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  et  $I(x_I; y_I)$  milieu de  $[AB]$ .  
Alors  $x_I = \dots\dots\dots$  et  $y_I = \dots\dots\dots$

**Propriété.** Soit  $P$  un plan muni d'un repère orthonormé.  
Soient  $A$  et  $B$  deux points du plan  $P$  de coordonnées respectives  $(x_A; y_A)$  et  $(x_B; y_B)$ .  
Alors la distance  $AB$  est donnée par :  
 $AB = \dots\dots\dots$

## 8.3 Exercices

### 8.3.1 Repère donné

#### EXERCICE 8.1.

Le plan est muni du repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Soient les points  $A(2; -4)$ ,  $B(-1; 3)$ ,  $C(-3; -2)$ .

- Déterminer les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{CA}$ , du vecteur  $\overrightarrow{CB}$  et du vecteur  $\vec{u} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ .
- (a) Déterminer les coordonnées du point  $D$  tel que  $\overrightarrow{OD} = \vec{u}$ .  
(b) Déterminer les coordonnées du point  $E$  tel que  $\overrightarrow{AE} = \vec{u}$ .
- Quelles sont les coordonnées du point  $F$  tel que  $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ ?
- Montrer que  $F$  milieu de  $[OA]$ .

#### EXERCICE 8.2.

Sur le schéma ci-dessous où le plan est muni du repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  :

- Placer les points  $A(1; 2)$ ,  $B(3; 1,5)$ ,  $C(4; 0,5)$  et  $D(2; 1)$ ;
- Montrer que le quadrilatère  $ABCD$  est un parallélogramme.

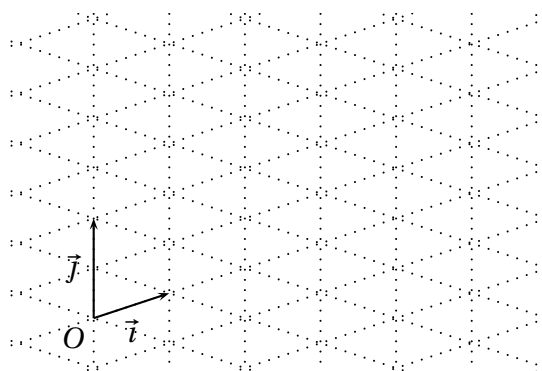
### 8.3.2 Repère à choisir

#### EXERCICE 8.5.

Le quadrilatère  $ABCD$  donné ci-dessous est un losange de centre  $O$ .

Dans chacun des cas ci-dessous, dire de quel type est le repère et donner les coordonnées de tous les points dans ce repère.

- $(A; \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$
- $(O; \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})$
- $(O; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$
- $(D; \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DO})$



#### EXERCICE 8.3.

Le plan est muni du repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Soient les points  $A(-9; -10)$ ,  $B(2; 9)$ ,  $C(5; 3)$ ,  $D(-1; -8)$  et  $E(3; 0)$ .

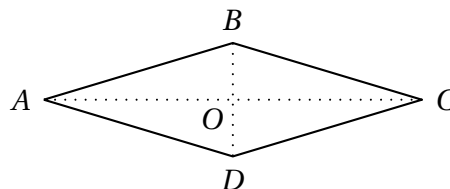
- Les points  $C$ ,  $D$  et  $E$  sont-ils alignés?
- Les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont-elles parallèles?

#### EXERCICE 8.4.

$ABCD$  est un parallélogramme.

$A'$  est le symétrique de  $A$  par rapport à  $B$  et  $E$  est le milieu de  $[BC]$ .

- Déterminer les coordonnées des points  $A'$ ,  $E$  et  $D$  dans le repère  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$
- Montrer que les points  $A'$ ,  $E$  et  $D$  sont alignés



#### EXERCICE 8.6.

$ABCD$  est un parallélogramme,  $I$  est le milieu de  $[AD]$ ,  $E$  est le symétrique de  $B$  par rapport à  $I$ .

- Faire une figure.
- Choisir un repère et montrer que  $D$  est le milieu de  $[EC]$