Chapitre 12

Incidence et parallélisme dans l'espace

Sommaire

12.1 Positions relatives de droites et de plans

12.1.1 Règles d'incidence

Règle 12.1. *Par deux points distincts de l'espace A et B, il passe une unique droite, notée (AB).*

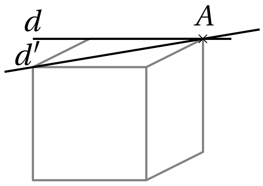
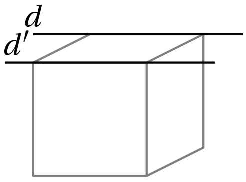
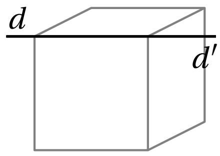
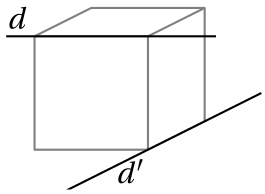
Règle 12.2. *Par trois points non alignés de l'espace A, B et C, il passe un unique plan, noté (ABC).*

Règle 12.3. *Si deux points distincts A et B de l'espace appartiennent à un plan $\mathscr{P}$, alors la droite (AB) est contenue dans le plan $\mathscr{P}$, c'est-à-dire que tout point M appartenant à la droite (AB) appartient aussi au plan $\mathscr{P}$.*

Règle 12.4. *Dans chaque plan de l'espace, on peut appliquer tous les théorèmes de géométrie plane (*Pythagore*,* Thalès*, etc.).*

12.1.2 Positions relatives de deux droites

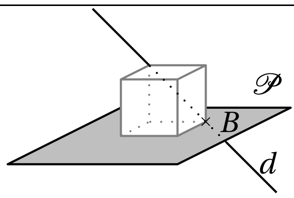
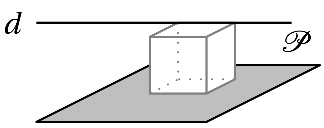
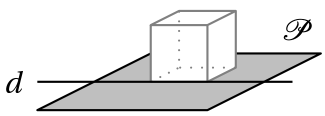
Règle 12.5. *Deux droites de l'espace sont soit coplanaires, soit non coplanaires.*

Coplanaires (dans un même plan)			**Non coplanaires**
d et d' sécantes	d et d' parallèles		
			
d et d' ont un point d'intersection A.	d et d' sont strictement parallèles.	d et d' sont confondues	Aucun plan ne contient à la fois d et d'.
$d \cap d' = \{A\}$	$d \cap d' = \varnothing$	$d \cap d' = d = d'$	$d \cap d' = \varnothing$

Remarques.
- Contrairement au plan, deux droites de l'espace n'ayant pas de point en commun ne sont pas forcément parallèles.
- Des droites strictement parallèles sont des droites **coplanaires et qui n'ont aucun point en commun**.
- On peut définir un plan de plusieurs manières :
  - par la donnée de trois points ;
  - par la donné de deux droites sécantes ;
  - par la donnée de deux droites strictement parallèles ;
  - par la donnée d'une droite et d'un point n'appartenant par à cette droite.

12.1.3 Positions relatives d'une droite et d'un plan

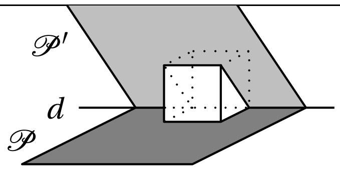
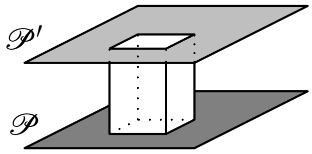
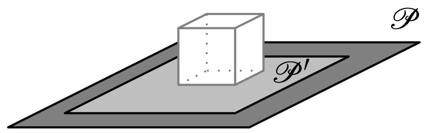
Règle 12.6. *Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.*

Sécants	**Parallèles**	
		
d et $\mathscr{P}$ ont un point d'intersection B.	d et $\mathscr{P}$ sont strictement parallèles.	d est contenue dans $\mathscr{P}$
$d \cap \mathscr{P} = \{B\}$	$d \cap \mathscr{P} = \varnothing$	$d \cap \mathscr{P} = d$

Remarque. Une droite d et un plan $\mathscr{P}$ sont parallèles s'ils ne sont pas sécants. On note alors $d \parallel \mathscr{P}$ ou $\mathscr{P} \parallel d$.

12.1.4 Positions relatives de deux plans

Règle 12.7. *Deux plans de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.*

<table>
<tr><th>Sécants</th><th colspan="2">Parallèles</th></tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ont une droite d'intersection d.
$\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = d$</td>
<td>$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont strictement parallèles.
$\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \varnothing$</td>
<td>$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont confondus
$\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \mathscr{P} = \mathscr{P}'$</td>
</tr>
</table>

Remarque. Deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles lorsqu'ils ne sont pas sécants. On note $\mathscr{P} \parallel \mathscr{P}'$.

Remarques.
- Pour démontrer que trois points sont alignés, il suffit de montrer que les trois points appartiennent à deux plans sécants : comme l'intersection de deux plans sécants est une droite, cela implique que les points sont tous les trois sur cette droite.
- Pour trouver la droite d'intersection de deux plans, il suffit de trouver deux points distincts qui appartiennent aux deux plans : la droite d'intersection est alors celle qui passe par ces deux points. Ces points sont en général des points d'intersection de droites sécantes, l'une contenue dans l'un des plans, l'autre dans l'autre plan.

12.2 Parallélisme dans l'espace

12.2.1 Parallélisme entre droites

Propriété 12.1. *Deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.*

$$\text{Si } d \parallel d' \text{ et } d' \parallel d'' \text{ alors } d \parallel d''$$

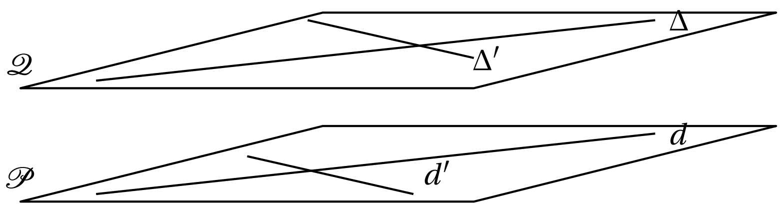
Propriété 12.2. *Si deux droites sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'une, coupe l'autre.*

12.2.2 Parallélisme entre plans

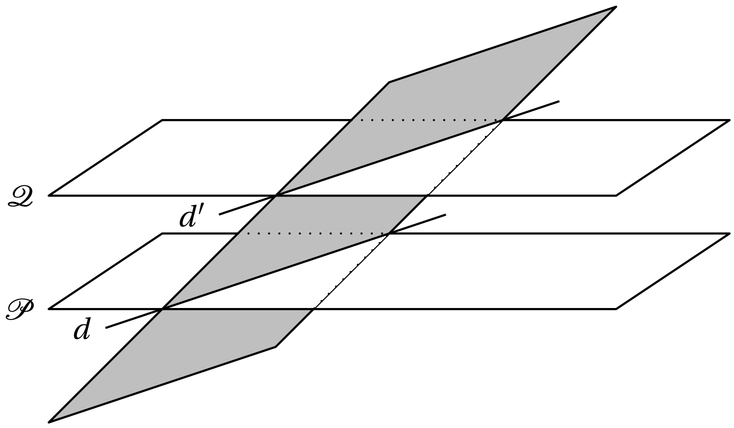
Propriété 12.3. *Deux plans parallèles à un même plan sont parallèles entre eux.*

$$\text{Si } \mathscr{P} \parallel \mathscr{P}' \text{ et } \mathscr{P}' \parallel \mathscr{P}'' \text{ alors } \mathscr{P} \parallel \mathscr{P}''$$

Propriété 12.4. *Si deux droites sécantes d et d' d'un plan $\mathscr{P}$ sont parallèles à deux droites sécantes Δ et Δ' d'un plan $\mathscr{Q}$, alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont parallèles.*



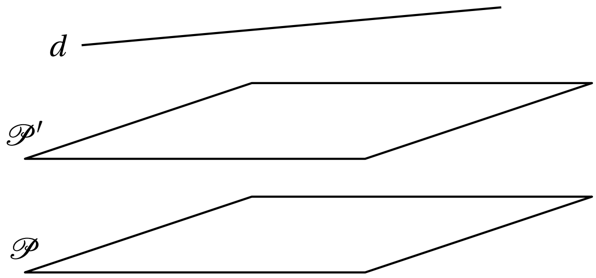
Propriété 12.5. *Si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles, alors tout plan sécant à $\mathscr{P}$ est aussi sécant à $\mathscr{P}'$ et leurs droites d'intersection d et d' sont parallèles.*



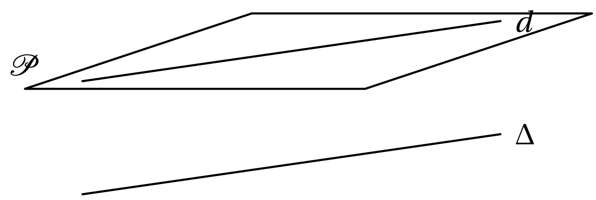
12.2.3 Parallélisme entre droite et plan

Propriété 12.6. *Si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles et si une droite d est parallèle à $\mathscr{P}$, alors d est parallèle à $\mathscr{P}'$.*

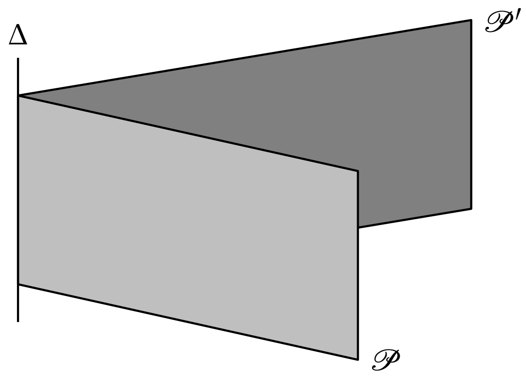
Si $d \parallel \mathscr{P}$ et $\mathscr{P} \parallel \mathscr{P}'$ alors $d \parallel \mathscr{P}'$



Propriété 12.7. *Si deux droites d et Δ sont parallèles, et si d est contenue dans un plan $\mathscr{P}$, alors Δ est parallèle à $\mathscr{P}$.*



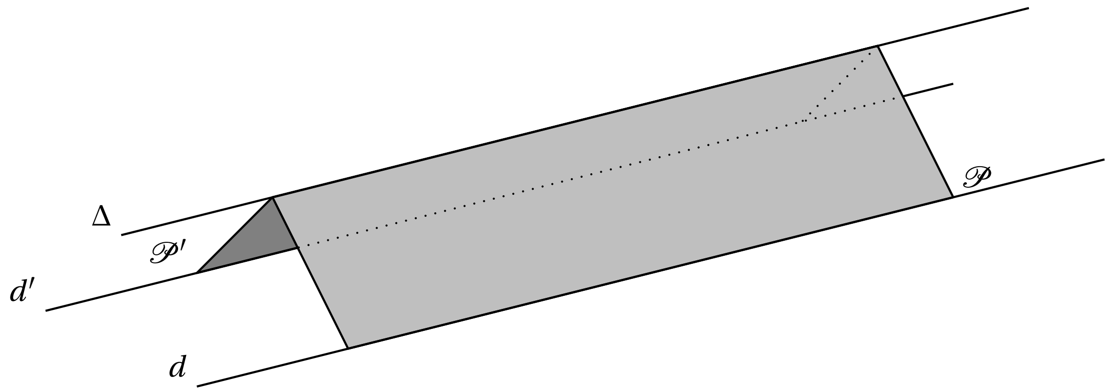
Propriété 12.8. *Si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants selon une droite Δ et si d est une droite parallèle à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ alors d et Δ sont parallèles.*



Théorème 12.9 (Théorème du toit)**.** *Si :*

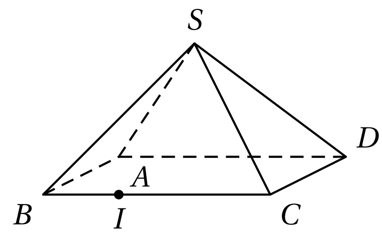
- *d et d' sont parallèles ;*
- *$\mathscr{P}$ est un plan qui contient d et $\mathscr{P}'$ est un plan qui contient d' ;*
- *$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants selon une droite Δ*

alors Δ est parallèle à d et à d'.



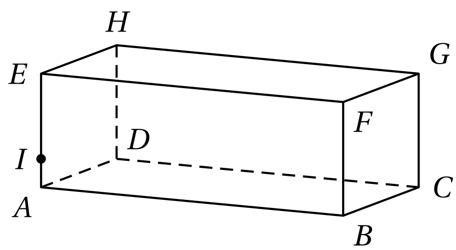
12.3 Exercices

12.3.1 Incidence



EXERCICE 12.1.
$SABCD$ est une pyramide à base carrée. I est un point du segment $[BC]$, distinct de B et C.

1. Montrer que les plans (SAI) et (SCD) sont sécants.
2. Construire leur intersection.

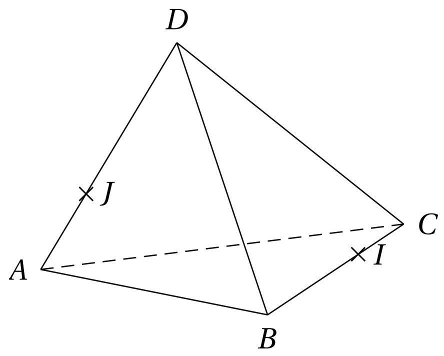


EXERCICE 12.2.
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle. I est un point de $[AE]$ distinct de A et de E.

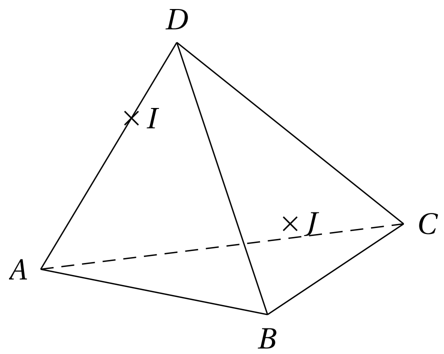
1. Démontrer que A, C, G et I sont coplanaires.
2. Démontrer que la droite (GI) n'est pas contenue dans le plan $(ABCD)$.
3. Construire J, intersection de la droite (GI) et du plan $(ABCD)$.

Exercice 12.3.
$ABCD$ est un tétraèdre. I est un point de $[BC]$ distinct de B et de C. J est un point de $[AD]$ distinct de A et de D.
Dans les cas suivants, démontrer que les plans sont sécants et déterminer leur intersection.

1. (DIJ) et (BCD).
2. (DIJ) et (ABD).
3. (DIJ) et (ABC).

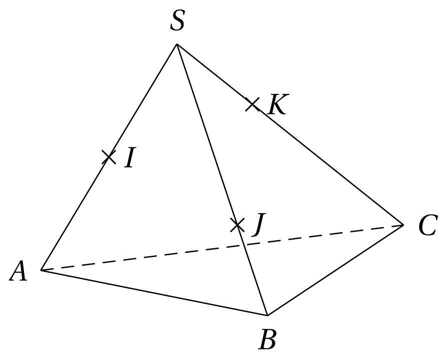


Exercice 12.4.
$ABCD$ est un tétraèdre. I est un point de $[DA]$ distinct de D et de A. J est un point de la face BCD tel que la droite (IJ) n'est pas parallèle au plan (ABC).
Construire l'intersection de la droite (IJ) et du plan (ABC).
Indication : on pourra commencer par construire l'intersection des plans (DIJ) et (ABC).



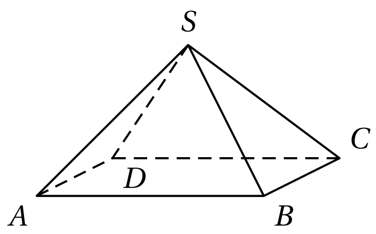
Exercice 12.5.
$SABC$ est un tétraèdre. I, J et K sont des points de, respectivement, $[SA]$, $[SB]$ et $[SC]$.

1. Construire E, intersection de (BC) et (JK), F, intersection de (AC) et (IK), G, intersection de (AB) et (IJ).
2. Démontrer que F est un point commun aux plans (ABC) et (IJK).
3. Prouver que les points E, F et G sont alignés.

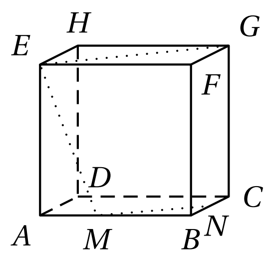


12.3.2 Parallélisme

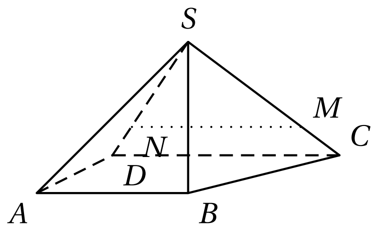
Exercice 12.6.
$SABCD$ est une pyramide à base carrée. I est le milieu de $[AS]$ et L est le milieu de $[BS]$.
Démontrer que les droites (IL) et (CD) sont parallèles.



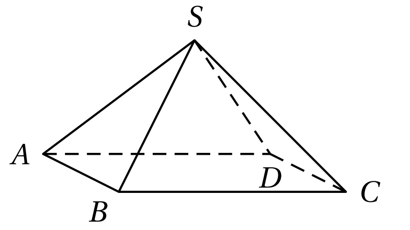
Exercice 12.7.
$ABCDEFGH$ est un cube. M est un point de l'arête $[AB]$. Le plan (GEM) coupe la droite (BC) en N.
Démontrer que les droites (MN) et (EG) sont parallèles.



Exercice 12.8.
$SABCD$ est une pyramide de sommet S à base trapézoïdale avec $(AB) \parallel (CD)$. M est un point de l'arête $[SC]$. Le plan (ABM) coupe la droite (SD) en N.
Démontrer que les droites (MN) et (DC) sont parallèles.

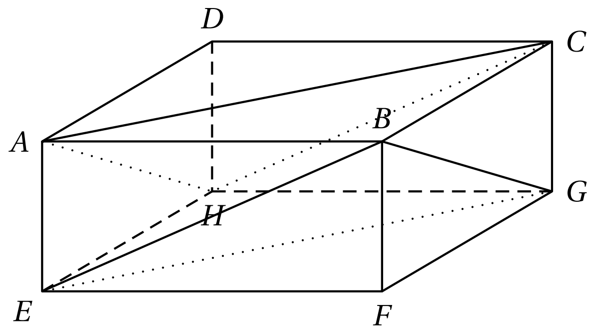


EXERCICE 12.9.
$SABCD$ est une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un parallélogramme.
Démontrer que les plans (SAB) et (SDC) se coupent selon la parallèle à (AB) passant par S.

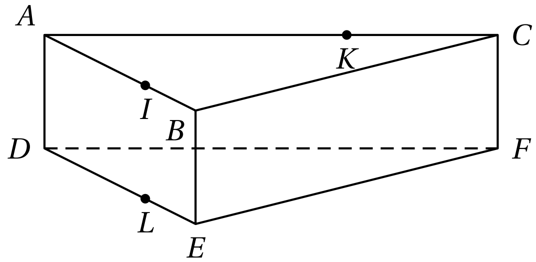


EXERCICE 12.10.
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle.

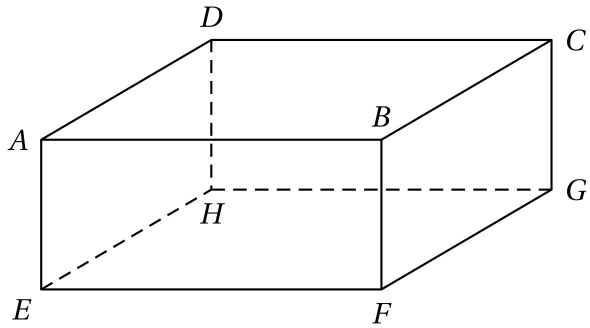
1. Le quadrilatère $BEHC$ est un rectangle. Que peut-on en déduire pour les droites (EB) et (HC) ?
2. De façon analogue, que peut-on dire des droites (AH) et (BG) ?
3. En déduire alors la position relative des plans (ACH) et (EBG) ?



EXERCICE 12.11.
$ABCDEF$ est un prisme droit à base triangulaire. I, L et K sont les points des arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[DE]$ tels que : $AI = \frac{2}{3}AB$; $AK = \frac{2}{3}AC$ et $EL = \frac{1}{3}ED$.
Démontrer que le plan (IKL) est parallèle au plan (BCF).



EXERCICE 12.12.
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle.
Démontrer que la droite (AC) est parallèle au plan (EFH).

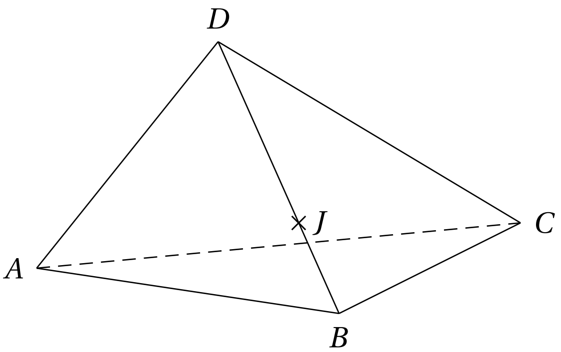


12.3.3 Sections

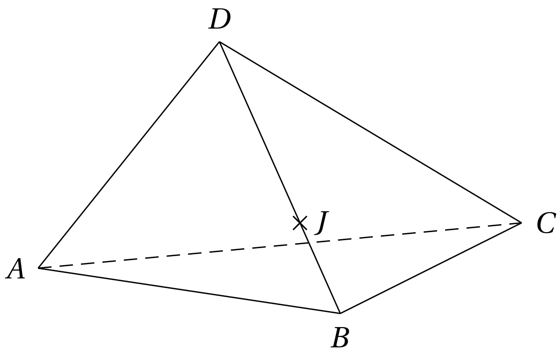
EXERCICE 12.13 (Sections planes d'un tétraèdre)**.**
Dans chacun des cas présentés sur la figure 12.1 de la présente page, placer les points I et K, puis, à l'aide des propriétés de géométrie dans l'espace vues en Seconde, construire sur le dessin en perspective la trace du plan (IJK) sur le tétraèdre $ABCD$. On donne $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$

FIGURE 12.1: Sections de l'exercice 12.13

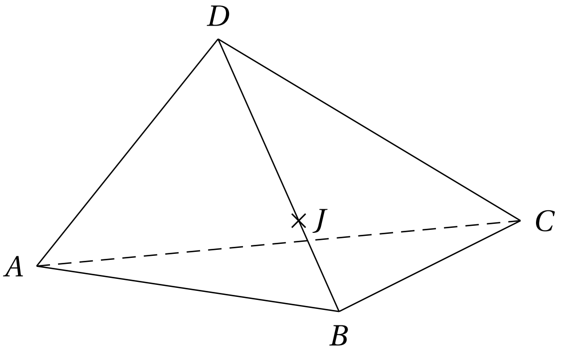
$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$



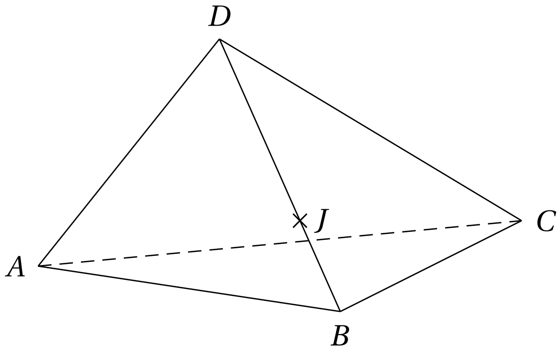
$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et K centre de gravité de ABC



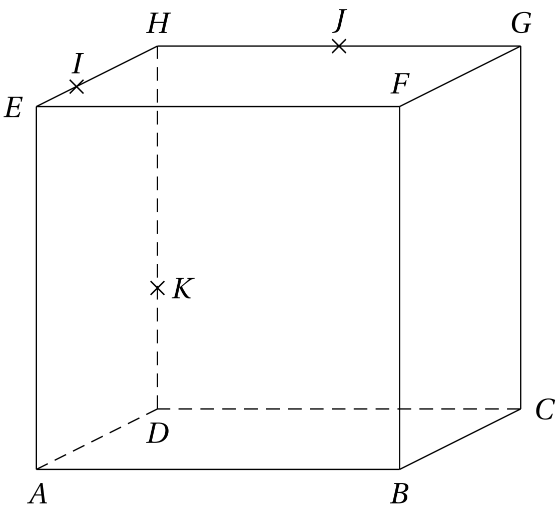
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$



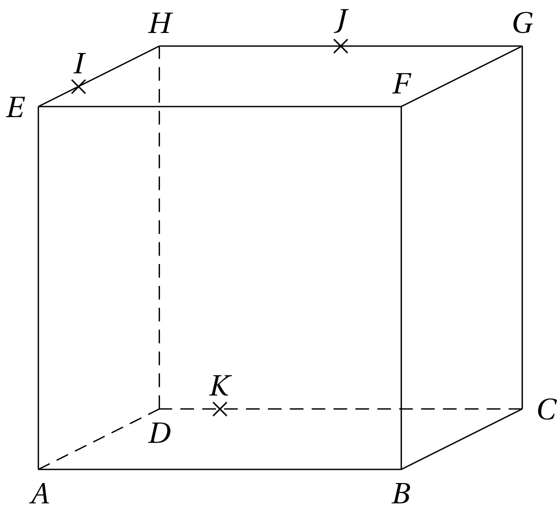
EXERCICE 12.14 (Sections planes d'un cube)**.**
Dans chacun des cas présentés sur la figure 12.2 de la présente page, à l'aide des propriétés de géométrie dans l'espace, construire sur le dessin en perspective la trace du plan (IJK) sur le cube $ABCDEFGH$. On donne : $AB = 6$ cm ; $EI = 2$ cm ; J milieu de $[HG]$.

FIGURE 12.2: Sections de l'exercice 12.14

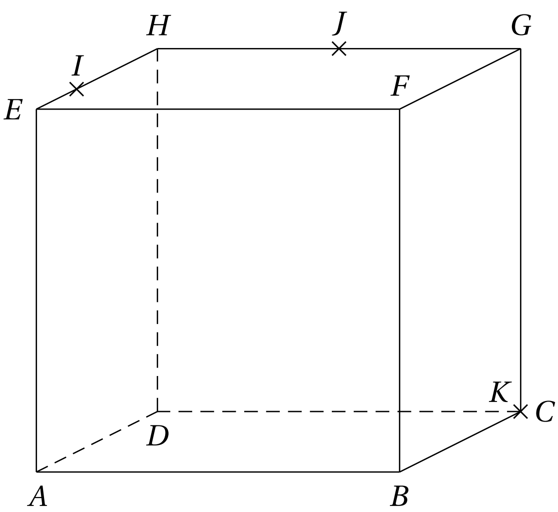
$DK = 2$ cm



$KD = 1$ cm



$K = C$



K milieu de $[BC]$