Chapitre 6

Fonction dérivée
Fonction dérivée d'une fonction trinôme

Sommaire

6.1 Activités d'introduction

6.1.1 Équations de droites (rappels)

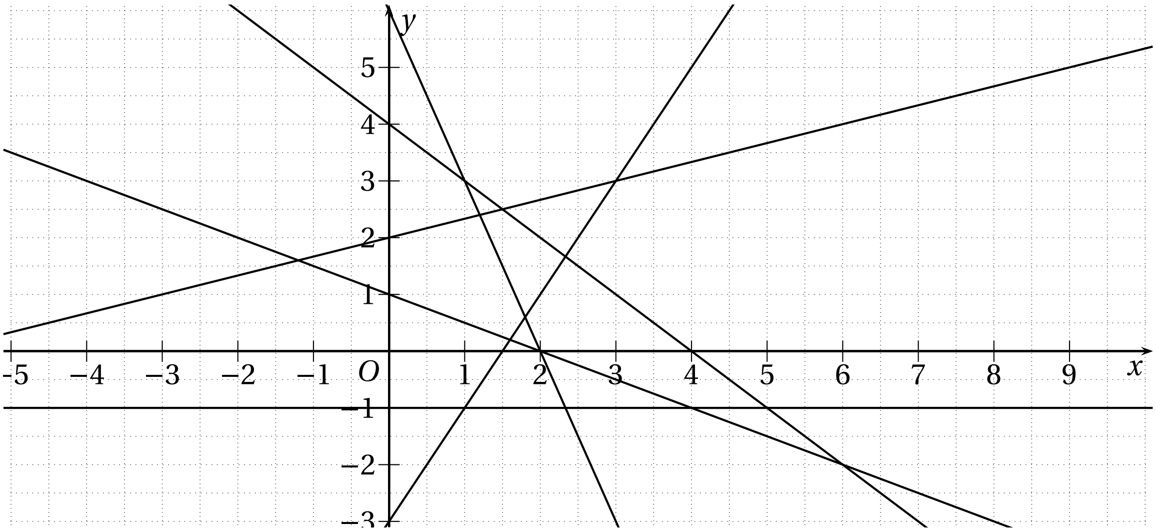
Activité 6.1.
Soient $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$, $\mathscr{D}_4$, $\mathscr{D}_5$ et $\mathscr{D}_6$ les droites d'équation :

- $\mathscr{D}_1 : y = 3x + 1$;
- $\mathscr{D}_2 : y = 1x + 1$;
- $\mathscr{D}_3 : y = 0,25x + 1$;
- $\mathscr{D}_4 : y = 0x + 1$;
- $\mathscr{D}_5 : y = -x + 1$;
- $\mathscr{D}_6 : y = -2x + 1$;

1. Pour chacune de ces droites :
   (a) Montrer que le point $(0 ; 1)$ appartient à la droite.
   (b) Déterminer un autre point lui appartenant.
   (c) Placer ces deux points dans un repère orthogonal puis tracer la droite.
2. Soit une équation de droite de la forme $y = mx + p$.
   Rappeler le nom et le « rôle » de p et de m.

Activité 6.2.
Déterminer graphiquement les coefficients directeurs m des droites de la figure 6.1 page suivante et leurs ordonnées à l'origine p.
En déduire leur équation réduite.

FIGURE 6.1: Figure de l'exercice 6.2



ACTIVITÉ 6.3.
Dans un repère représenter les droites suivantes passant par le point et ayant le coefficient directeur indiqués. Déterminer ensuite leur équation réduite.

- $\mathscr{D}_1$: $A(0;1)$ et $m=2$;
- $\mathscr{D}_2$: $B(1;0)$ et $m=-1$;
- $\mathscr{D}_3$: $C(-1;-1)$ et $m=\frac{1}{4}$;
- $\mathscr{D}_4$: $D(1;2)$ et $m=-\frac{2}{3}$;
- $\mathscr{D}_5$: $E(2;-3)$ et $m=\frac{3}{5}$;
- $\mathscr{D}_6$: $F(0;3)$ et $m=0$.

ACTIVITÉ 6.4.
Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la droite (AB) :

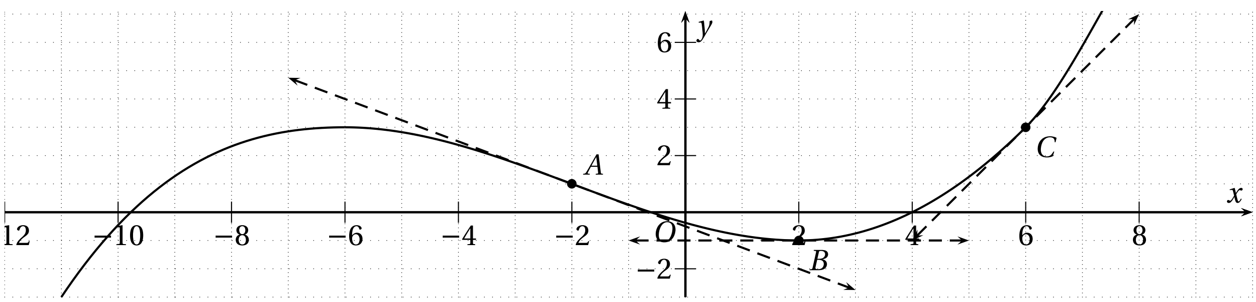
1. $A(1;2)$ et $B(3;-1)$;
2. $A(4;4)$ et $B(-1;2)$;
3. $A(0;-1)$ et $B(2;3)$;
4. $A(-2;2)$ et $B(3;2)$;
5. $A(1;3)$ et $B(1;4)$.

6.1.2 Coefficients directeurs de tangentes

Cas d'une fonction quelconque

ACTIVITÉ 6.5.
On donne sur la figure ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f en y indiquant les droites tangentes aux points A, B et C.

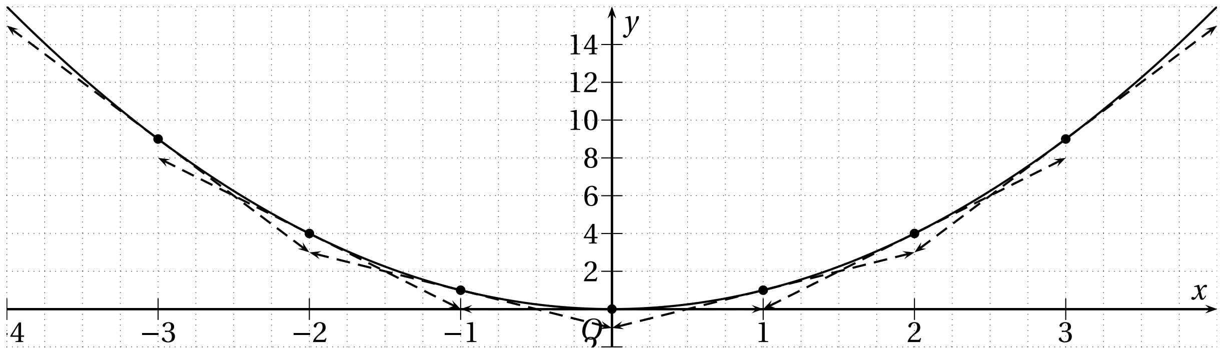
1. Donner par lecture graphique $f(-2)$ et $f(6)$.
2. Déterminer les équations des tangentes à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2, au point d'abscisse 6 et au point d'abscisse 2.
3. On appelle « nombre dérivé en α » le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse α et on le note $f'(\alpha)$. Donner $f'(-2)$, $f'(6)$ et $f'(2)$.



Cas des fonctions trinômes

ACTIVITÉ 6.6.
L'objectif de cette activité est d'obtenir l'expression du nombre dérivé $f'(\alpha)$ en fonction de α dans le cas d'une fonction trinôme. Pour ce faire nous allons observer des fonctions trinômes de plus en plus complexes.

1. **Fonction carrée :** On a représenté sur la figure ci-dessous la courbe de la fonction carré : $x \longmapsto x^2$ ainsi que plusieurs de ses tangentes.



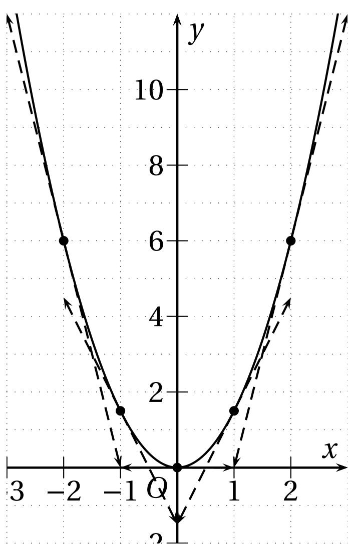
   (a) Compléter le tableau ci-dessous par lecture graphique

α	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(\alpha)$							

   (b) Conjecturer la formule qui permet d'obtenir $f'(\alpha)$.

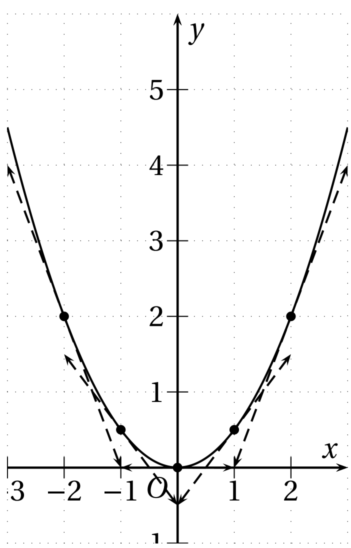
2. **Fonction $x \longmapsto ax^2$:** Pour chacun des cas proposés sur la figure ci-dessous compléter le tableau fourni. Conjecturer alors la formule qui permet d'obtenir $f'(\alpha)$ dans chacun des cas puis dans le cas général.

$x \longmapsto 1{,}5x^2$



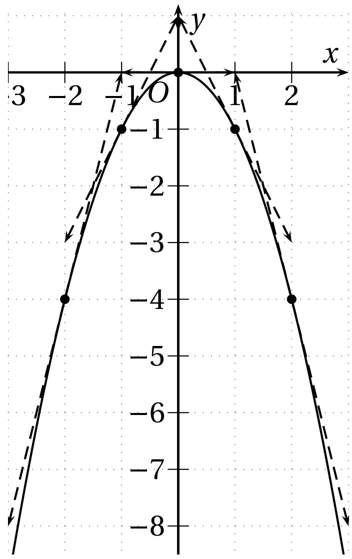
α	-2	-1	0	1	2
$f'(\alpha)$					

$x \longmapsto 0{,}5x^2$



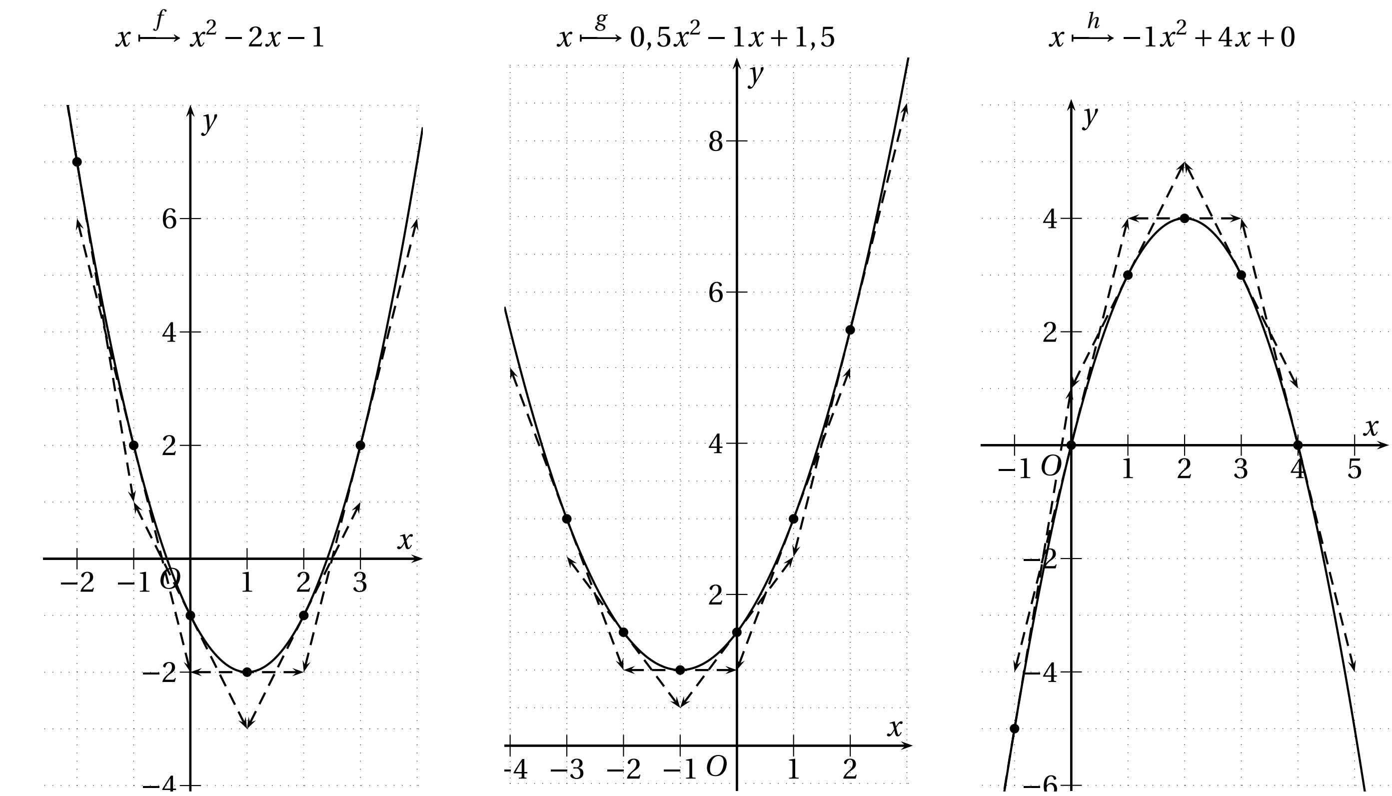
α	-2	-1	0	1	2
$f'(\alpha)$					

$x \longmapsto -1x^2$



α	-2	-1	0	1	2
$f'(\alpha)$					

3. **Fonction $x \longmapsto ax^2 + bx + c$.**
On donne dans la figure ci-dessous trois courbes de fonctions trinôme ainsi que quelques tangentes en certains points.



α	-2	-1	0	1	2	3
$f'(\alpha)$						

α	-3	-2	-1	0	1	2
$g'(\alpha)$						

α	-1	0	1	2	3	4
$h'(\alpha)$						

Pour chacune d'entre elles :

(a) Compléter le tableau fourni sous la courbe.

(b) On donne les trois fonctions suivantes :
- $x \longmapsto d_1(x) = -2x + 4$
- $x \longmapsto d_2(x) = 2x - 2$
- $x \longmapsto d_1(x) = x - 1$

Chacune d'elles est la fonction qui permet d'obtenir les coefficients directeurs d'une des fonctions trinômes proposées sur la figure.

i. Déterminer quelle fonction est associée à chaque fonction trinôme.

ii. Conjecturer quelle fonction permet d'obtenir les coefficients directeurs des tangentes d'une fonction trinôme du type $x \longmapsto ax^2 + bx + c$.

iii. Étudier les signes de $d_1(x)$, de $d_2(x)$ et de $d_3(x)$ selon les valeurs de x.

iv. Dresser les tableaux de variations de f, g et h.

v. Quel lien peut-on conjecturer à partir des deux questions précédentes ?

6.2 Bilan et compléments

6.2.1 Cas général

Définition 6.1. Soit f une fonction, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
Si la courbe $\mathscr{C}$ admet au point d'abscisse α une tangente, on appelle *nombre dérivé de f en α* le coefficient directeur de cette tangente.
On le note $f'(\alpha)$.

Définition 6.2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dont la courbe admet des tangentes en tout point d'abscisse x, x étant un nombre de l'intervalle I.
On dit alors que f est *dérivable sur I* et on appelle *fonction dérivée de f sur I* la fonction qui à tout nombre x de I associe le nombre dérivé de f en I, c'est-à-dire le coefficient directeur de la tangente en x.
On la note $f'(x)$.

On admettra la propriété suivante :

Propriété 6.1. *Soit f une fonction définie et dérivable sur I.*
- *Si pour tout réel $x \in I$, $f'(x) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I ;*
- *Si pour tout réel $x \in I$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.*

6.2.2 Cas des fonctions trinômes

On admettra les propriétés suivantes :

Propriété 6.2. *Soit f une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une fonction qui à tout nombre x associe le nombre $ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des nombres fixés.*
Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = 2ax + b$$