Devoir surveillé n°7

Variables aléatoires – Produit scalaire

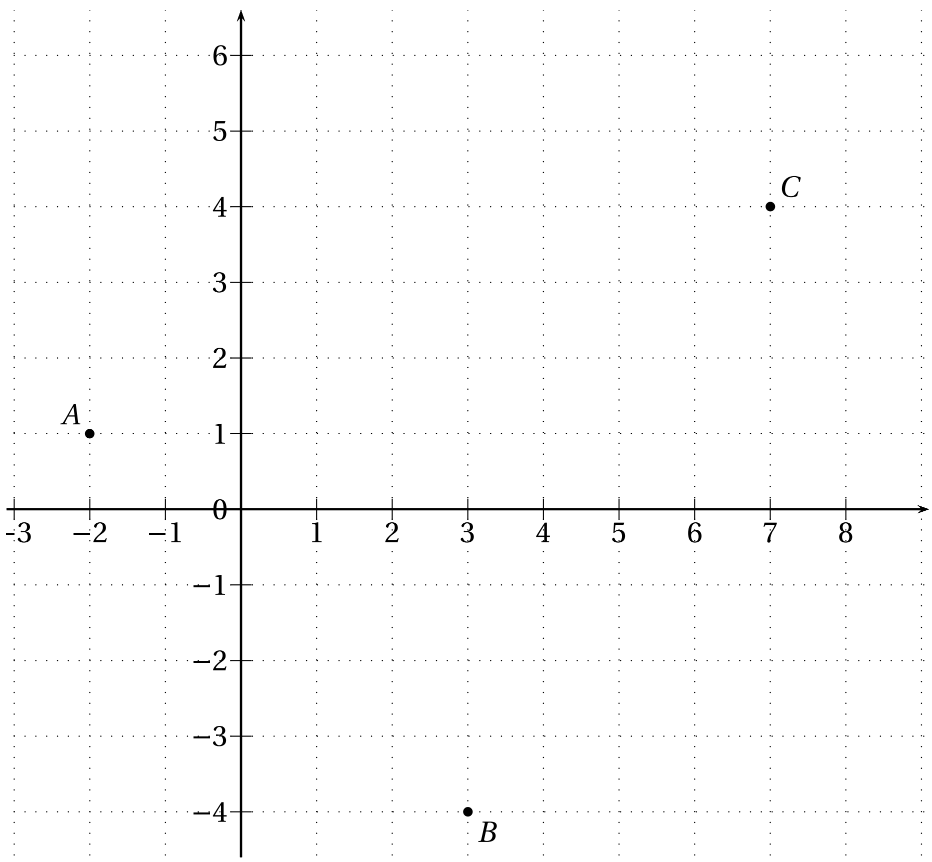
EXERCICE 7.1 (5 points).
$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 6$ cm, $AD = 4$ cm et $AC = 9$ cm.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{29}{2}$.
2. En déduire la longueur BD. *La valeur exacte est attendue.*
3. En déduire une mesure de $\widehat{BAD}$ à 0,01 °près.

EXERCICE 7.2 (3 points).
$ABCD$ est un carré. I est le milieu de $[AB]$. J est le milieu de $[BC]$.
À l'aide du produit scalaire, montrer que les droites (AJ) et (DI) sont perpendiculaires.

EXERCICE 7.3 (7 points).
Le plan est muni d'un repère orthonormé. *On pourra s'aider du repère proposé ci-dessous.*
Soit les points $A(-2\,;1)$, $B(3\,;-4)$ et $C(7\,;4)$.

1. Déterminer une équation de $\mathscr{D}_1$, médiatrice du segment $[AB]$.
2. Déterminer une équation de $\mathscr{D}_2$, médiatrice du segment $[BC]$.
3. Déterminer les coordonnées de E, intersection de $\mathscr{D}_1$ et de $\mathscr{D}_2$.
4. (a) Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre E et passant par A.
   (b) Montrer que B et C appartiennent à $\mathscr{C}$.
5. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}'$ de diamètre $[AC]$.
6. Déterminer une équation de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.



EXERCICE 7.4 (5 points).
Une roue de fête foraine est partagée en 8 secteurs de même mesure :

- un secteur de couleur rouge
- deux secteurs de couleur verte
- cinq secteurs de couleur bleue

On suppose qu'elle s'arrête aléatoirement et de façon équiprobable sur n'importe lequel de ces secteurs.
Pour avoir le droit de faire tourner la roue, un joueur doit payer 4 euros et, selon la couleur du secteur sur lequel la roue s'arrête, on lui verse :

- 0 euro si le secteur est de couleur bleue
- 3 euros s'il est de couleur verte
- 5 euros s'il est de couleur rouge

On appelle X la variable aléatoire qui à chaque partie associe le gain final (l'argent qu'on verse au joueur moins la somme payée pour jouer).

1. Calculer $E(X)$, l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat.
2. Calculer $V(X)$, la variance de X, puis $\sigma(X)$, l'écart-type de X. *On arrondira au centième.*
3. Le jeu est dit équitable si ni le joueur, ni l'organisateur du jeu ne sont avantagés. Proposer une (et une seule) modification d'un des paramètres du jeu qui permettrait de le rendre équitable. *Toute trace de recherche sera prise en compte dans la notation.*

EXERCICE 7.5 (4 points).
On propose deux jeux basés sur le lancer d'un dé à 6 faces.

Jeu 1 : Si le 6 sort le joueur gagne 1 000 euros, sinon il perd 500 euros.

Jeu 2 : Si le 6 sort le joueur perd 4 000 euros, sinon il gagne 600 euros.

Lequel des deux jeux est le plus avantageux pour le joueur ? On justifiera.