Devoir surveillé n°4

Suites – Généralités sur les fonctions – Statistiques

EXERCICE 4.1 (8 points)**.**
Le tableau suivant donne les résultats (arrondis au point supérieur) obtenus par une classe de Seconde lors d'un devoir, dit *devoir n° 1*, en mathématiques :

Notes x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectifs n_i	0	0	1	2	3	0	2	7	2	2	0	1	0	2	0	1	3	1	3	4	1

1. (a) Déterminer la note moyenne $\overline{x}$, arrondie au dixième, et l'écart-type s, arrondi au centième, de cette série en détaillant brièvement les calculs (les pointillés sont autorisés dans la rédaction).

   (b) Déterminer la médiane m et les premier et troisième quartiles Q_1 et Q_3 de cette série en précisant la façon dont ils ont été obtenus.

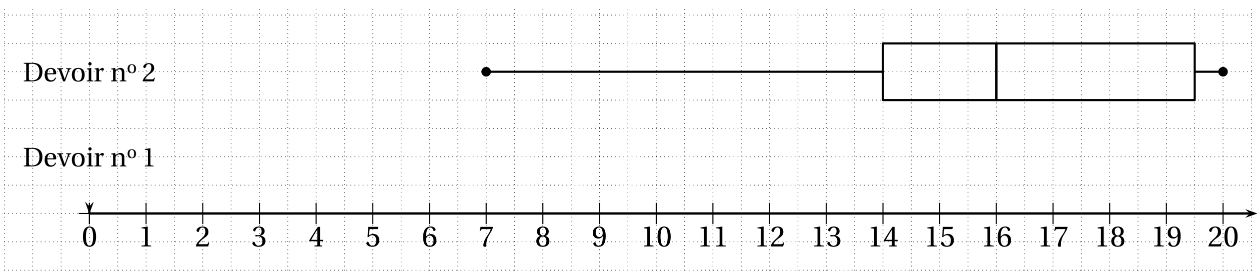
2. Le professeur considère que si l'écart entre la moyenne et la médiane est supérieur à 0,75, alors il est important. Est-ce le cas ? Comment l'expliquer ?

3. (a) Représenter, sur la figure 4.1 donnée ci-dessous, le diagramme en boite de la série statistique correspondant au devoir n° 1.
   Sur cette figure, on a déjà représenté le diagramme en boite d'une série constituée des résultats d'un autre devoir, dit *devoir n° 2*, de mathématiques de cette Seconde.
   En vous basant sur ces diagrammes, comparer les résultats de cette classe à ces deux devoirs.

   (b) Le devoir n° 2 a une moyenne et un écart-type respectivement de $\overline{x}' \approx 16{,}0$ et $s' \approx 3{,}95$.
   Comparer les résultats des deux devoirs à l'aide de ces paramètres statistiques.

4. Question bonus : Les résultats des deux devoirs sont très différents, pourtant il s'agit de la même classe ; comment pourrait-on expliquer cette différence ?

FIGURE 4.1: Figure de l'exercice 4.1



EXERCICE 4.2 (8 points)**.**
Aujourd'hui les chardons ont colonisé 300 m^2 d'un jardin de 1 200 m^2. Chaque semaine, la surface envahie augmente de 4 % par le développement des racines auquel s'ajoutent 13 m^2 dus à la dissémination.
On note u_n l'aire du jardin envahie par les chardons, en m^2, après n semaines; on a donc $u_0 = 300\,\text{m}^2$.

1. (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) La suite (u_n) est-elle arithmétique? La suite (u_n) est-elle géométique? Justifier.
2. Justifier que $u_{n+1} = 1{,}04u_n + 13$.
3. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + 325$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}04$ et en préciser le premier terme.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   (c) En déduire que $u_n = 625 \times 1{,}04^n - 325$ pour tout entier naturel n.
4. Étudier la monotonie de la suite (u_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
5. À l'aide de l'algorithme ci-dessous, on se propose de déterminer nombre de semaines à partir duquel les chardons auront colonisé la moitié de la surface du jardin.

```
Initialisation
   u ← 300
   n ← 0
Traitement
   Tant que ...  faire
      n ← n+1
      u ← ...
   Fin Tant que
Sortie
   n
```

   (a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessus.
   (b) Qu'affiche cet algorithme? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 4.3 (6 points).
On donne le tableau de variations de la fonction u définie sur l'intervalle $[-1\,;7]$:

x	-1		2		5		7
u	-1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	16	$\searrow$	9

On sait de plus que $u(3) = 0$.

1. Déduire pour chacune des fonctions suivantes :
   - son ensemble de définition $\mathscr{D}$ *(on justifiera si ce n'est pas le même que celui de u)*;
   - son tableau de variations *(on justifiera systématiquement)*.

   (a) $f : x \longmapsto u(x) - 5$
   (b) $g : x \longmapsto -2u(x)$
   (c) $h : x \longmapsto \sqrt{u(x)}$
   (d) $j : x \longmapsto \frac{1}{u(x)}$
   (e) $k : x \longmapsto |u(x)|$

2. Question bonus (hors barème) : Donner, sans justifier, le tableau des variations de la fonction $\ell : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{|u(x)|}}$.

EXERCICE 4.4 (8 points).
L'objectif de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ par :

$$f : x \longmapsto \frac{2x^2 + 2x - 7}{x + 2}$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec chacun des axes de coordonnées.
   Les valeurs exactes des coordonnées sont attendues.

2. (a) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ par : $g(x) = \frac{-3}{x+2}$.
   Étudier les variations de g en justifiant soigneusement.
   (b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$, $f(x) = 2x - 2 + \frac{-3}{x+2}$.
   (c) Déduire des questions 2a et 2b les variations de f sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

3. La droite $\mathscr{D}$ est d'équation $y = x - 2$.
   (a) Montrer que, pour $x \neq -2$, $f(x) - (x-2) = \frac{x^2+2x-3}{x+2}$.
   (b) Étudier le signe de $\frac{x^2+2x-3}{x+2}$ selon les valeurs de x.
   (c) En déduire les positions relatives de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.
