Chapitre 15

Compléments sur les suites

Sommaire

15.1 Activités

ACTIVITÉ 15.1.

On reprend ici l'énoncé de l'activité 3.1 du chapitre 3.

On donne ci-dessous le tableau d'effectifs, en million, de la population africaine depuis 1950.

Année	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Population	227,3	285	366,8	482,2	638,7	819,5	1011,2

On rappelle ce qu'on avait obtenu dans cette activité précédemment :

- Un statisticien avait proposé de modéliser la population africaine tous les dix ans par une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 227{,}3$ et de raison $q = 1{,}28$ et ce modèle nous avait paru acceptable.
- On avait programmé sur la calculatrice un algorithme du type de celui donné dans le tableau 15.1 page suivante pour obtenir différentes valeurs prises par la suite.
- En tatonnant, nous avions trouvé qu'il faudrait 10 décennies ($n \geqslant 10$) pour que la population africaine dépasse 3 milliards.

1. (a) Montrer que, pour tout n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.
   (b) Que peut-on en déduire quant à la monotonie de la suite (u_n) ?

2. On cherche dans la suite de cette activité à élaborer un algorithme qui éviterait d'avoir à tâtonner pour obtenir la décennie à partir de laquelle la population africaine dépasserait les 3 milliards ou une quelconque autre valeur.
   (a) Compléter l'algorithme de la table 15.3, de la présente page, qui, pour un seuil quelconque (par exemple 3 milliards), indique le nombre de décennies au bout duquel la population africaine dépasse ce seuil.
   (b) Programmer cet algorithme sur sa calculatrice.
   (c) À l'aide de cet algorithme, compléter le tableau de la table 15.2, de la présente page.
   (d) Compléter les phrases suivantes :
      - « On peut conjecturer que, selon le modèle du statisticien, on peut rendre la population africaine aussi .... que l'on veut : il suffit de prendre n suffisamment .... »
      - On dira que la suite tend vers ....

TABLE 15.1: Algorithme déjà utilisé

```
ENTREES
   n
INITIALISATION
   u PREND LA VALEUR 227.3
TRAITEMENT
   POUR k ALLANT DE 1 A n FAIRE
     u PREND LA VALEUR u*1.28
   FIN POUR
SORTIES
   u
```

TABLE 15.2: Algorithme à compléter

```
ENTREES
 seuil
INITIALISATION
 n PREND LA VALEUR 0
 u PREND LA VALEUR 227.3
TRAITEMENT
 .......................................
 .......................................
 .......................................
 .......................................
 .......................................
SORTIES
 AFFICHER n
```

TABLE 15.3: Tableau à compléter

Seuil (en milliards)	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
Nombre de décennies								

ACTIVITÉ 15.2.
Une usine fabrique de la peinture spéciale pour carrosserie.
À la fin du premier jour, la production est de 1 000 L. Ensuite, elle diminue chaque jour de 2 %.
On note u_n la production de peinture au jour n, avec n entier naturel.

1. (a) Montrer que, pour tout n, $u_{n+1} - u_n < 0$.
   (b) Que peut-on en déduire quant à la monotonie de la suite (u_n) ?
2. (a) À l'aide d'une calculatrice, conjecturer vers quelle valeur va tendre la production journalière de peinture.
   (b) En vous inspirant de l'algorithme de l'activité 15.1, page 155, écrire un algorithme permettant d'obtenir au bout de combien de jours la production sera inférieure à un seuil donné et l'utiliser pour déterminer au bout de combien de jours la production sera inférieure à 10 L.

15.2 Monotonie d'une suite : méthodes

15.2.1 Signe de la différence $u_{n+1} - u_n$

Pour étudier le sens de variation d'une suite, on peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

EXERCICE.
Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n^2 - n$.
À l'aide de l'étude du signe de la différence $u_{n+1} - u_n$, montrer que la suite (u_n) est croissante.

15.2.2 Comparaison de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1

Pour étudier le sens de variation d'une suite *à termes strictement positifs*, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1. *Cette méthode est particulièrement adaptée aux suites dont le terme général est une puissance ou un produit.*

EXERCICE.
Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \frac{2^n}{n}$. La suite (u_n) est à termes strictement positifs car $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n}{n+1}$.
2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{2n}{n+1} \geqslant 1$.
3. Conclure.

15.2.3 Variations de la fonction associée

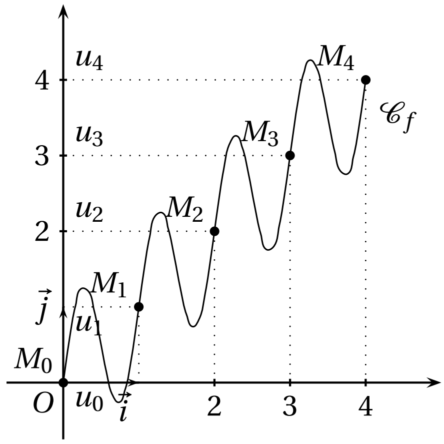
Pour étudier les variations d'une suite définie par une formule explicite, on peut étudier les variations de la fonction associée. On s'appuie alors sur le théorème suivant.

Théorème 15.1. *Soit (u_n) la suite définie par la relation $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie au moins sur $\mathbb{R}^+$. Si la fonction f est monotone sur $[0\,;+\infty[$, alors la suite (u_n) est monotone et a même sens de variation que f.*

La preuve sera faite en classe.
Cette méthode concerne donc uniquement les suites définies par une formule explicite, elle est intéressante lorsque les variations de la fonction associée sont simples à déterminer.

Remarque. La réciproque du théorème est fausse. En effet, considérons la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n + \sin(2\pi n)$. On a $u_n = f(n)$ où $f : x \mapsto x + \sin(2\pi x)$, définie sur $[0;+\infty[$.
Étudions les variations de la suite (u_n). En remarquant que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\sin(2\pi n) = 0$, il vient $u_{n+1} - u_n = 1 > 0$, la suite (u_n) est donc strictement croissante.
Qu'en est-il des variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$?

FIGURE 15.1: Illustration du contre exemple



Comme on peut le voir graphiquement sur la figure 15.1 de la présente page, la fonction f n'est pas monotone sur $[0;+\infty[$. Moralité, pour étudier les variations d'une fonction, on ne pourra pas introduire une suite et s'appuyer sur les variations de cette dernière.

15.3 Convergence d'une suite

15.3.1 Notion de convergence

Conformément au programme, on ne donnera pas de définition rigoureuse de la convergence d'une suite et les exercices sur le sujet ne seront que des exploitations de logiciels ou d'algorithmes. Notons toutefois cette approche intuitive :

- On dit qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) quand on peut rendre les valeurs de u_n aussi grandes (respectivement petites) que l'on veut : il suffit de prendre n suffisamment grand.
  On notera alors $\lim u_n = +\infty$ (respectivement $\lim u_n = -\infty$).

- On dit qu'une suite (u_n) tend vers un réel ℓ quand on peut rendre les valeurs de u_n aussi proche de ℓ que l'on veut : il suffit de prendre n suffisamment grand.
  On notera alors $\lim u_n = \ell$.

15.3.2 Convergence et représentation graphique

La représentation graphique d'une suite permet souvent de visualiser sa convergence. Rappelons d'abord comment on représente graphiquement une suite.

Cas général

Définition. Dans un repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ la représentation graphique d'une suite (u_n) est l'ensemble des points M_n de coordonnées $(n\,;u_n)$.

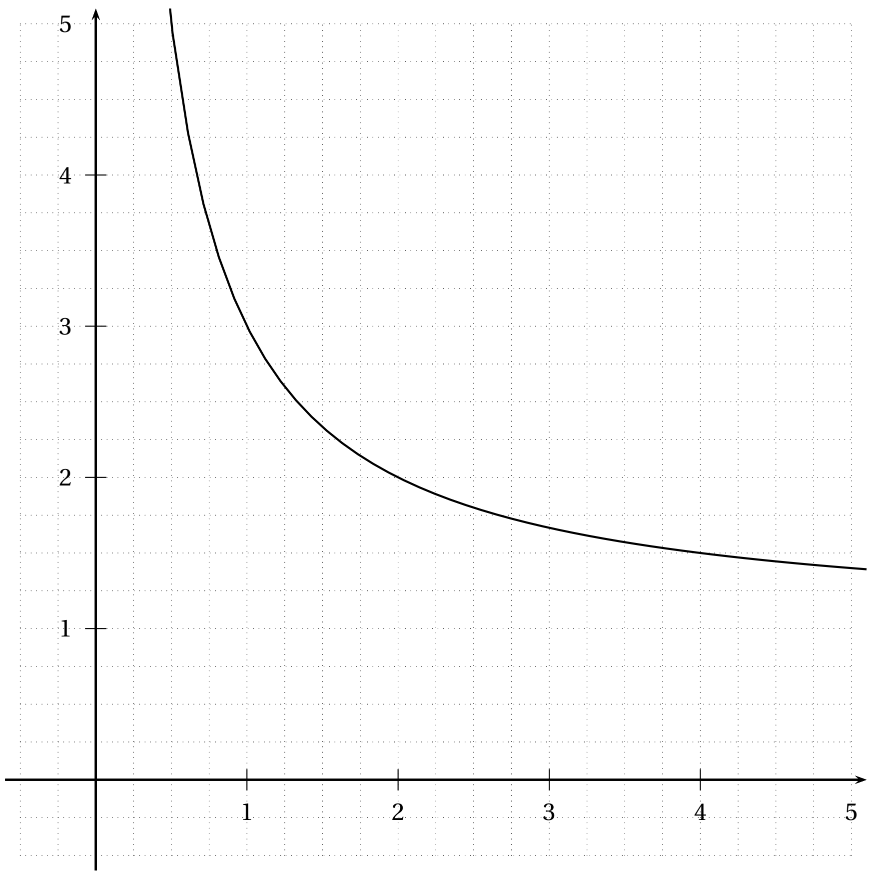
Cas d'une suite définie par récurrence

Dans le cas d'une suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$, une autre représentation graphique possible s'obtient en procédant de la façon suivante (qui n'est rien d'autre qu'un algorithme de construction) :

1. On trace la représentation graphique $\mathscr{C}$ de f et la première bissectrice d'équation $y = x$.
2. On place le premier terme u_0 sur l'axe des abscisses.
3. On utilise $\mathscr{C}$ pour construire $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées.
4. On reporte u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la première bissectrice.
5. On utilise $\mathscr{C}$ pour construire $u_2 = f(u_1)$ sur l'axe des ordonnées.
6. etc.

On obtient alors la *répresentation en chemin* de la suite.

EXERCICE.
Construire dans le repère ci-dessous la représentation en chemin de la suite (v_n) telle que $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \frac{2}{v_n} + 1$



15.4 Exercices

15.4.1 Monotonie

EXERCICE 15.1.
Étudier la monotonie de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$;
2. $v_n = n + \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$;
3. $w_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 15.2.
Étudier la monotonie de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{1}{n+2}$ pour $n \in \mathbb{N}$;
2. $v_n = \frac{2n+1}{n+3}$ pour $n \in \mathbb{N}$;
3. $u_n = n - n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$;
4. $w_n = 3^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 15.3.
(v_n) est la suite définie pour tout entier strictement positif par $v_n = \frac{2^n}{n^2}$

1. Calculer ses quatre premiers termes.
2. On cherche à montrer que la suite est croissante à partir du rang $n = 3$.
   (a) Résoudre l'inéquation $\frac{2x^2}{(x+1)^2} > 1$.
   (b) Montrer que $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2n^2}{(n+1)^2}$.
   (c) Conclure.

15.4.2 Convergence

Représentations en chemin

EXERCICE 15.4.
On a tracé dans le repère de la figure 15.2 page ci-contre la courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{2x+4}{2+x^2}$.

Construire la représentation graphique en chemin de la suite (u_n) définie par (u_n) : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+4}{2+u_n^2} \end{cases}$

EXERCICE 15.5.
On a tracé dans le repère de la figure 15.3 page suivante la courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$.

Construire la représentation graphique en chemin de la suite (u_n) définie par (u_n) : $\begin{cases} u_0 = 0{,}5 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 + 1 \end{cases}$

EXERCICE 15.6.
On a tracé dans le repère de la figure 15.4 page ci-contre la courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$.

Construire la représentation graphique en chemin de la suite (u_n) définie par (u_n) : $\begin{cases} u_0 = -1{,}5 \\ u_{n+1} = \frac{u_n+3}{u_n+1} \end{cases}$

FIGURE 15.2: Repère de l'exercice 15.4

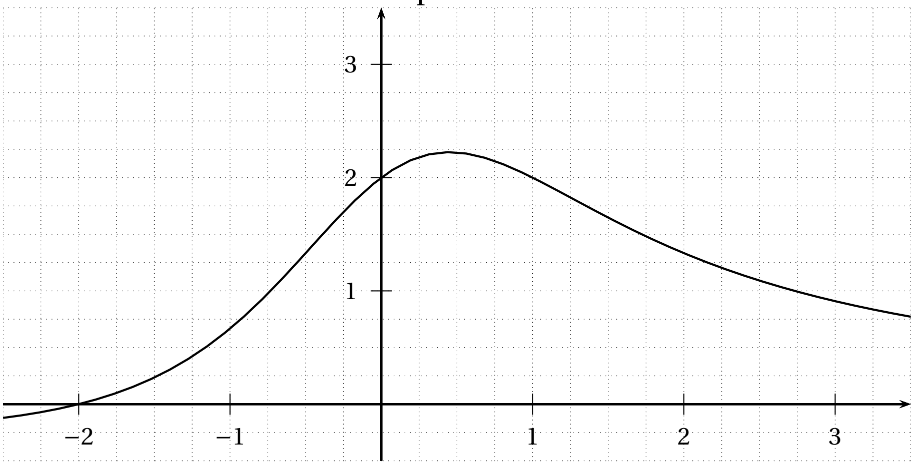


FIGURE 15.3: Repère de l'exercice 15.5

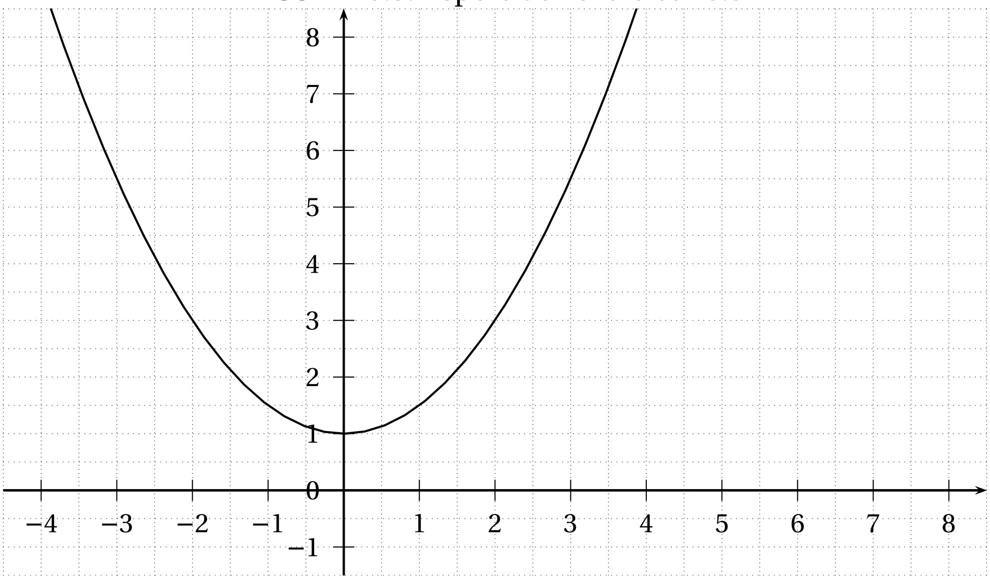
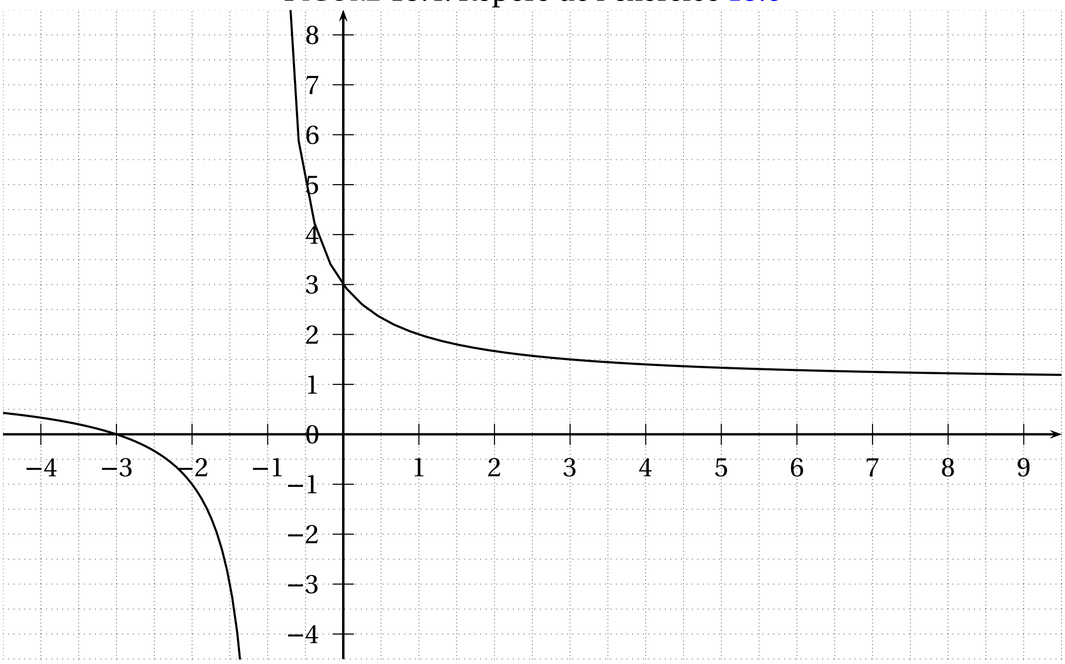


FIGURE 15.4: Repère de l'exercice 15.6



Convergence

Certains des exercices de ce paragraphe sont des reprises d'exercices ou problèmes du chapitre 3 mais abordés de manière différente.

EXERCICE 15.7.
Le nombre d'adhérents d'un club sportif augmente de 5 % chaque année. En 1990, il y avait 500 adhérents.
Question : comment va évoluer le nombre d'adhérents au cours du temps ?

Pour chaque année à partir de 1990 on note u_n le nombre d'adhérents l'année $1990+n$.

1. Préciser la nature de la suite (u_n) puis exprimer u_n en fonction de n.
2. À l'aide d'un algorithme de seuil, répondre à la question.

EXERCICE 15.8.
On se place dans la situation de l'activité 15.2, page 157.
En fait l'usine en question stocke sa production au fur et à mesure pour honorer une commande de peinture.
Question : L'usine pourra-t-elle honorer une commande de 15 000 L et, si oui, en combien de jours ? Et de 60 000 L ?

1. Que fait l'algorithme suivant ?

```
ENTREES
   n
INITIALISATION
   -
TRAITEMENT
   s PREND LA VALEUR 1000*(1-0,98^(n+1))/(1-0,98)
SORTIES
   AFFICHER s
```

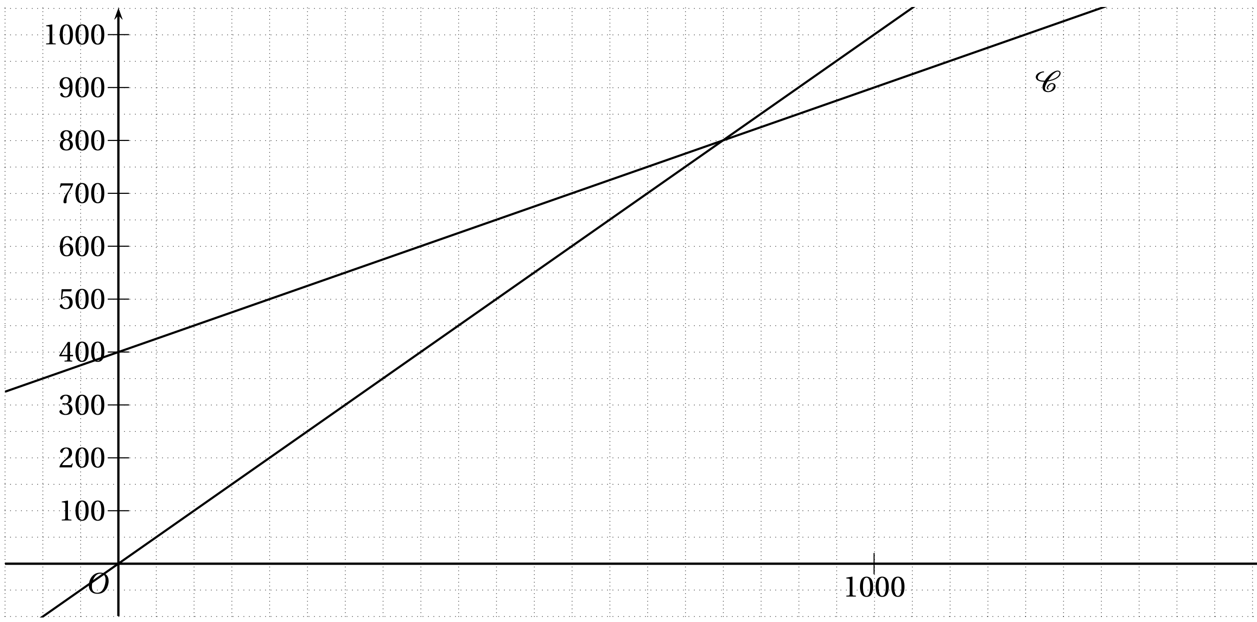
2. Modifier cet algorithme afin qu'il indique en combien de jours un seuil peut être atteint et le programmer sur sa calculatrice.
3. Répondre à la première partie de la question.
4. Que se passe-t-il quand on entre comme seuil 60 000 L ?
   Modifier l'algorithme pour qu'il s'arrête si jamais le nombre de jours est supérieur à un an.
   Que peut-on alors conseiller aux dirigeants de l'usine ?

EXERCICE 15.9.
Un fournisseur fait une étude sur la fidélité de sa clientèle depuis l'année $n = 0$, où il y a eu 200 clients. Chaque année, sa clientèle est composée de 50% des clients de l'année précédente auxquels s'ajoutent 400 nouveaux clients.

Soit u_n le nombre de clients l'année n. On a donc $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 400$.

On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 800$.

1. (a) La fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = 0{,}5x + 400$ est représentée par la courbe $\mathscr{C}$ de la présente page, ainsi que la première bissectrice d'équation $y = x$.



Construire la représentation en escalier de la suite (u_n).

   (b) Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection des deux droites. Que laisse supposer cette représentation sur la limite de la suite (u_n) ?

2. (a) Vérifier que $v_{n+1} = 0{,}5v_n$.

   (b) Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

   (c) En déduire l'expression de v_n, puis celle de u_n, en fonction de n.

   (d) Calculer u_{100}, u_{1000} et u_{10000}.
   Conjecturer alors la limite ℓ de la suite (u_n). Comment l'interpéter ?

   (e) Il est dit que dans ce cas on peut rendre u_n aussi proche de ℓ que l'on veut : il suffit de prendre n suffisamment grand.
   Concevoir un algorithme de seuil prenant comme argument un nombre ϵ (petit) et retournant la première valeur de n telle que $\ell - \epsilon < u_n < \ell + \epsilon$.
   À l'aide de cet algorithme, compléter le tableau suivant :

ϵ	10	5	2	1	0,1	0,01	0,001
n							

EXERCICE 15.10.
Le 1er janvier 2005, une grande entreprise compte 1500 employés.
Une étude montre que lors de chaque année à venir, 10 % de l'effectif du 1er janvier partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 100 jeunes dans l'année.
Question : Comment va évoluer sur le long terme le nombre d'employés dans cette entreprise ?

Pour tout entier n on appelle u_n le nombre d'employés le 1er janvier de l'année $(2005+n)$. On a donc $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 100$.

On pose $v_n = u_n - 1000$.

1. Déterminer v_0, v_1, v_2 et v_3.
2. Montrer que (v_n) est géométrique.
3. En déduire v_n en fonction de n.
4. En déduire u_n en fonction de n.
5. Conjecturer alors la limite ℓ de la suite (u_n). Comment l'interpréter ?
6. Il est dit que dans ce cas on peut rendre u_n aussi proche de ℓ que l'on veut : il suffit de prendre n suffisamment grand.
   (a) Concevoir un algorithme de seuil prenant comme argument un nombre ϵ (petit) et retournant la première valeur de n telle que $|u_n - \ell| < \epsilon$.
   (b) À l'aide de cet algorithme, compléter le tableau suivant :

ϵ	10	5	2	1	0,1	0,01	0,001
n							