Chapitre 12

Loi binomiale

Sommaire

12.1 Activité **129**

12.2 Bilan et compléments **134**

12.2.1 Premières définitions 134

12.2.2 Coefficients binomiaux 134

12.2.3 Loi binomiale 134

12.2.4 Utilisation de la calculatrice 135

12.3 Exercices **135**

12.1 Activité

Partie A : Une expérience aléatoire élémentaire

On lance un dé équilibré. On gagne si on fait un 6. On note S, comme « succès », cette issue et E, comme « échec », l'autre issue. Déterminer $p(S)$ et $p(E)$.

Partie B : Trois répétitions

On répète trois fois de suite et de façon indépendante l'expérience élémentaire de la partie A.

1. (a) Représenter cette nouvelle expérience par un arbre.

   (b) Quelles sont les probabilités des issues SES, ESS et SSE ?
   Quelle est la probabilité de l'évènement « obtenir deux succès » ?

   (c) Quelles sont les probabilités des issues EES, ESE et SEE ?
   Quelle est la probabilité de l'évènement « obtenir un succès » ?

2. (a) Soit X la variable aléatoire qui associe, à chaque issue, le nombre de succès obtenus lors des trois répétitions. Déterminer la loi de probabilité de X.
   On présentera les résultats sous forme de tableau et on ne réduira pas les fractions.

   (b) Déterminer l'espérance de X. Interpéter le résultat.

Partie C : Quatre répétitions

On répète quatre fois l'expérience élémentaire de la partie A de façon indépendante et on note Y la variable aléatoire qui, à chaque issue, associe le nombre de succès obtenus lors de ces quatre répétitions.
On décide de ne pas construire l'arbre.

1. Déterminer la probabilité de chacun des évènements $\{Y = 0\}$ et $\{Y = 4\}$.
2. Soit l'évènement $\{Y = 2\}$.
   (a) Décrire une issue correspondant à cet évènement et déterminer sa probabilité.
   (b) Décrire une issue distincte de la précédente correspondant à cet évènement et déterminer sa probabilité.
   (c) Que constate-t-on ?
   (d) Que nous manque-t-il alors pour obtenir $p(Y = 2)$?
   (e) Quels sont les chemins de l'arbre de la partie B qui, après une quatrième répétition de l'expérience élémentaire, ne pourront pas mener à des issues correspondant à $\{Y = 2\}$?
   (f) À l'aide de l'arbre de la partie B, déterminer le nombre de chemins menant à des issues correspondant à $\{Y = 2\}$ lorsqu'on répète une quatrième fois l'expérience élémentaire.
   (g) En déduire $p(Y = 2)$.
3. Soit l'évènement $\{Y = 1\}$.
   (a) Décrire une issue correspondant à cet évènement et déterminer sa probabilité.
   (b) Décrire une issue distincte de la précédente correspondant à cet évènement et déterminer sa probabilité.
   (c) Que constate-t-on ?
   (d) Que nous manque-t-il alors pour obtenir $p(Y = 1)$?
   (e) À l'aide de l'arbre de la partie B, déterminer le nombre de chemins menant à des issues correspondant à $\{Y = 1\}$ lorsqu'on répète une quatrième fois l'expérience élémentaire.
   (f) En déduire $p(Y = 1)$.
4. Soit l'évènement $\{Y = 3\}$.
   (a) Décrire une issue correspondant à cet évènement et déterminer sa probabilité.
   (b) Décrire une issue distincte de la précédente correspondant à cet évènement et déterminer sa probabilité.
   (c) Que constate-t-on ?
   (d) Que nous manque-t-il alors pour obtenir $p(Y = 3)$?
   (e) À l'aide de l'arbre de la partie B, déterminer le nombre de chemins menant à des issues correspondant à $\{Y = 3\}$ lorsqu'on répète une quatrième fois l'expérience élémentaire.
   (f) En déduire $p(Y = 3)$.

Partie D : Sept répétitions

On répète sept fois l'expérience élémentaire de la partie A de façon indépendante et on note Z la variable aléatoire qui, à chaque issue, associe le nombre de succès obtenus au cours de ces sept répétitions.

1. Quelles valeurs peut prendre Z ?
2. Déterminer $p(Z=0)$ et $p(Z=7)$.
3. Soit l'évènement $\{Z=4\}$.
   (a) Décrire une issue correspondant à cet évènement et déterminer sa probabilité.
   (b) Décrire une issue distincte de la précédente correspondant à cet évènement et déterminer sa probabilité.
   (c) Que constate-t-on ?
   (d) Que nous manque-t-il alors pour obtenir $p(Z=4)$?
   (e) On note $\binom{7}{4}$ le nombre de chemins menant à des issues telles que $Z=4$ après sept répétitions.
   Exprimer $p(Z=4)$ à l'aide de cette notation.
   (f) Décrire, à l'aide de cette notation, la loi de probabilité de Z.

Partie E : Coefficients binomiaux

On note $\binom{n}{k}$ le nombre de chemins menant à des issues comportant k succès quand on répète n fois une expérience aléatoire élémentaire ne comportant que deux issues : un succès et un échec.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour k ?
2. À l'aide des activités précédentes, déterminer :
   (a) $\binom{1}{1}$ et $\binom{1}{0}$ (b) $\binom{3}{0}$, $\binom{3}{1}$, $\binom{3}{2}$ et $\binom{3}{3}$ (c) $\binom{4}{0}$, $\binom{4}{1}$, $\binom{4}{2}$, $\binom{4}{3}$ et $\binom{4}{4}$
3. (a) Exprimer, avec cette notation, la relation qui nous a permis d'obtenir $\binom{4}{1}$, $\binom{4}{2}$ et $\binom{4}{3}$.
   (b) En généralisant cette propriété, compléter le tableau 12.1, de la présente page, en indiquant dans chaque case les valeurs de $\binom{n}{k}$.

TABLE 12.1: Triangle de PASCAL

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

   (c) En déduire la loi de probabilité de Z de la partie D.

Partie F : Représentation graphique

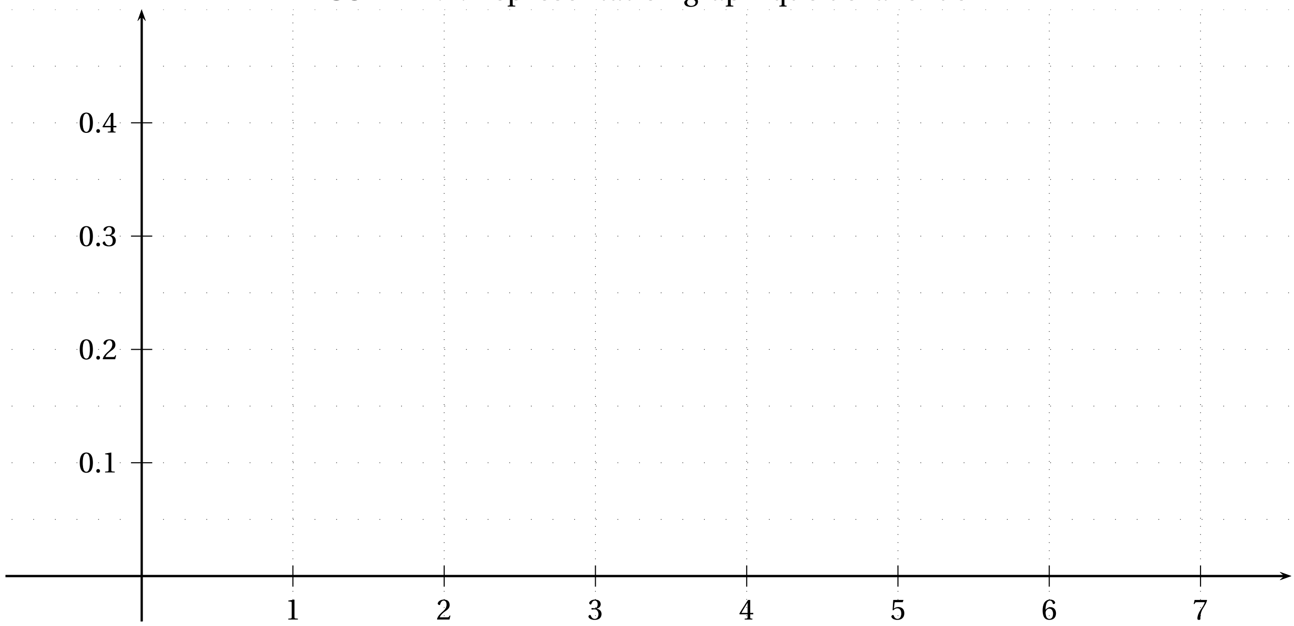
1. On a obtenu dans la partie précédente la loi suivante (les valeurs sont arrondies au millième) :

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(Z=k)$	0,279	0,391	0.234	0,078	0,016	0,002	0	0

La représenter dans le repère de la figure 12.1 de la présente page par un diagramme en bâtons tel que :

- k sera en abscisse
- la probabilité $p(X=k)$ sera la hauteur du bâton

FIGURE 12.1: Représentation graphique de la loi de Z



2. Rôle de n
On a représenté sur la figure 12.2 page suivante plusieurs lois de ce type, en faisant variant le nombre n de répétitions.
   (a) Qu'ont en commun ces représentations graphiques ?
   (b) Quel semble être le rôle de n sur ces lois de probabilité ?

3. Rôle de p
Dans notre expérience élémentaire, la probabilité d'obtenir un succès était $p=\frac{1}{6}$. On suppose pour la suite qu'on dispose de toutes sortes de dés truqués nous permettant d'obtenir la valeur que l'on souhaite pour p. On a répété l'expérience soixante fois ($n=60$) et on a représenté sur la figure 12.3 les différentes lois obtenues.
   (a) Qu'ont en commun ces représentations graphiques ?
   (b) Quel semble être le rôle de p sur ces lois de probabilité ?

FIGURE 12.2: Rôle de n

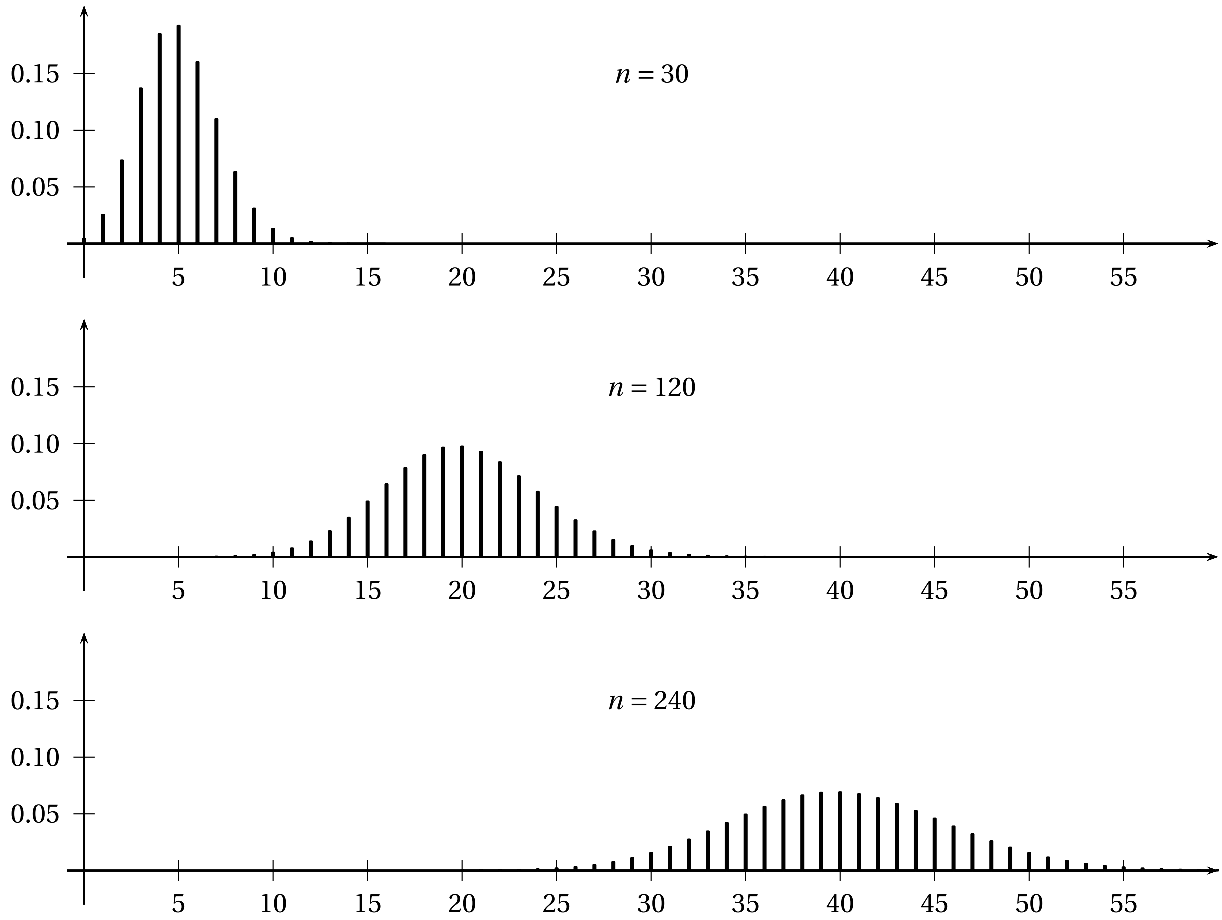
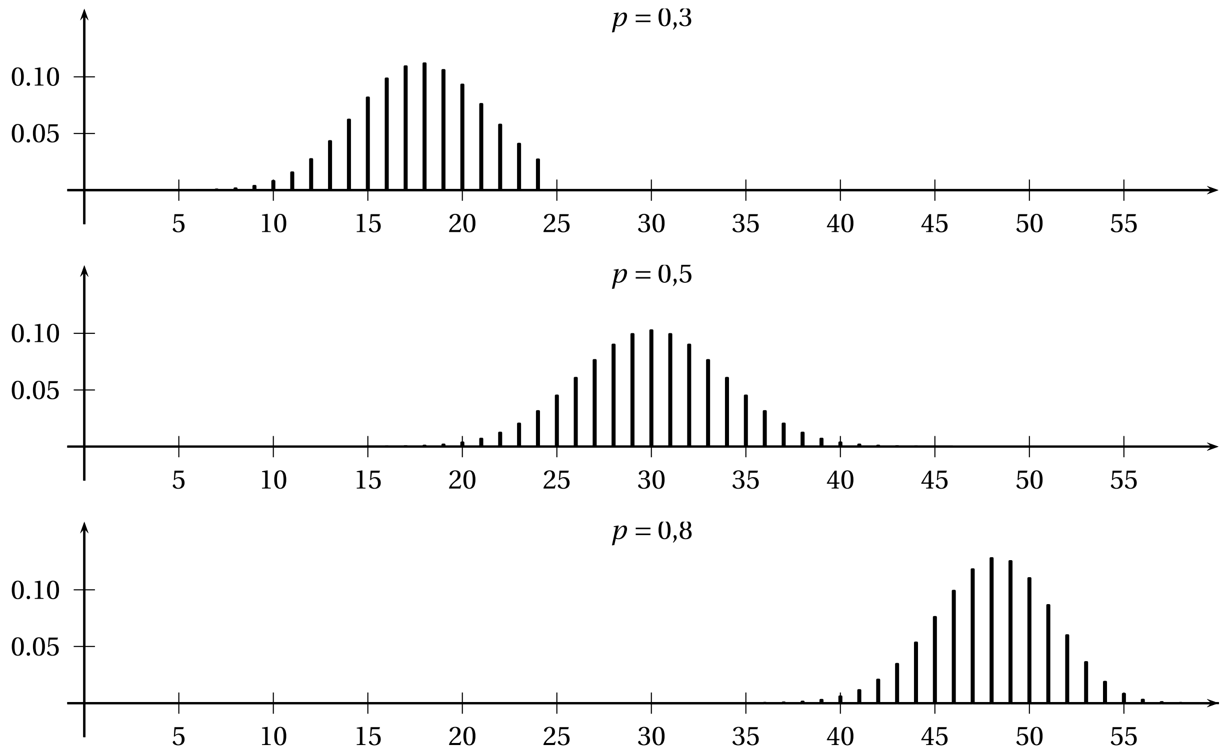


FIGURE 12.3: Rôle de p



12.2 Bilan et compléments

12.2.1 Premières définitions

Définition 12.1 (Épreuve de BERNOULLI)**.** On appelle *épreuve de* BERNOULLI de paramètre p toute expérience aléatoire ayant exactement deux issues possibles, qu'on appelle généralement, pour l'une, *succès*, notée S, et, pour l'autre, *échec*, notée $\overline{S}$, et telle que $p(S) = p$.

Définition 12.2 (Schéma de BERNOULLI)**.** On appelle *schéma de* BERNOULLI de paramètres n et p la répétition à n reprises, de façon indépendante, d'une même épreuve de BERNOULLI de paramètre p.

12.2.2 Coefficients binomiaux

Définition 12.3 (Coefficients binomiaux)**.** Soit un schéma de BERNOULLI de paramètres n et p. Pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$, on appelle coefficient binomial, noté $\binom{n}{k}$, le nombre de chemins du schéma de Bernoulli menant à k succès.

Par convention $\binom{0}{0} = 1$ et on a les propriétés suivantes qui seront démontrées en classe :

Propriété 12.1. *Pour tout entier* $0 \leqslant k \leqslant n$ *:*

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

12.2.3 Loi binomiale

Définition 12.4 (Loi binomiale)**.** Soit un schéma de BERNOULLI de paramètres n et p.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque issue, associe le nombre de succès.
On dit que X suit une *loi binomiale de paramètres n et p*, généralement notée $\mathscr{B}(n\,;p)$.

Propriété 12.2. *Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;p)$.*
Alors, pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$ *:*

- $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$;
- $p(X \geqslant k) = 1 - p(X < k)$.
- $p(X \leqslant k) = 1 - p(X > k)$;

Propriété 12.3. *Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;p)$. Alors :*

- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

On l'admettra.

12.2.4 Utilisation de la calculatrice

Les calculatrices permettent d'obtenir les valeurs exactes de $\binom{n}{k}$ et, dans le cas où la variable aléatoire suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,p)$, les valeurs approchées de $p(X=k)$ et de $p(X \leqslant k)$.

Pour l'exemple nous supposerons que la loi binomiale est de paramètres $n=10$ et $p=0{,}25$ et que $k=2$.

	Casio anciens modèles	Casio modèles récents	TI
$\binom{10}{2}$	Menu RUN 10 OPTION PROB nCr 2	Menu RUN 10 OPTION PROB nCr 2	10 MATH PRB Combinaison (ou nCr) 2
$p(X=2)$	Menu STAT DIST BINM Bpd Data : var x : 2 Numtrial : 10 p : 0,25 *Inutilisable dans les calculs (noter le résultat pour réutilisation)*	Menu RUN (OPTN STAT DIST BINM Bpd pour) BinomialPD(2, 10, 0.25)	DISTR binomFdp(10,0.25,2)
$p(X \leqslant 2)$	Menu STAT DIST BINM Bcd Data : var x : 2 Numtrial : 10 p : 0,25 *Inutilisable dans les calculs (noter le résultat pour réutilisation)*	Menu RUN (OPTN STAT DIST BINM Bcd pour) BinomialCD(2, 10, 0.25)	DISTR binomFRép(10,0.25,2)

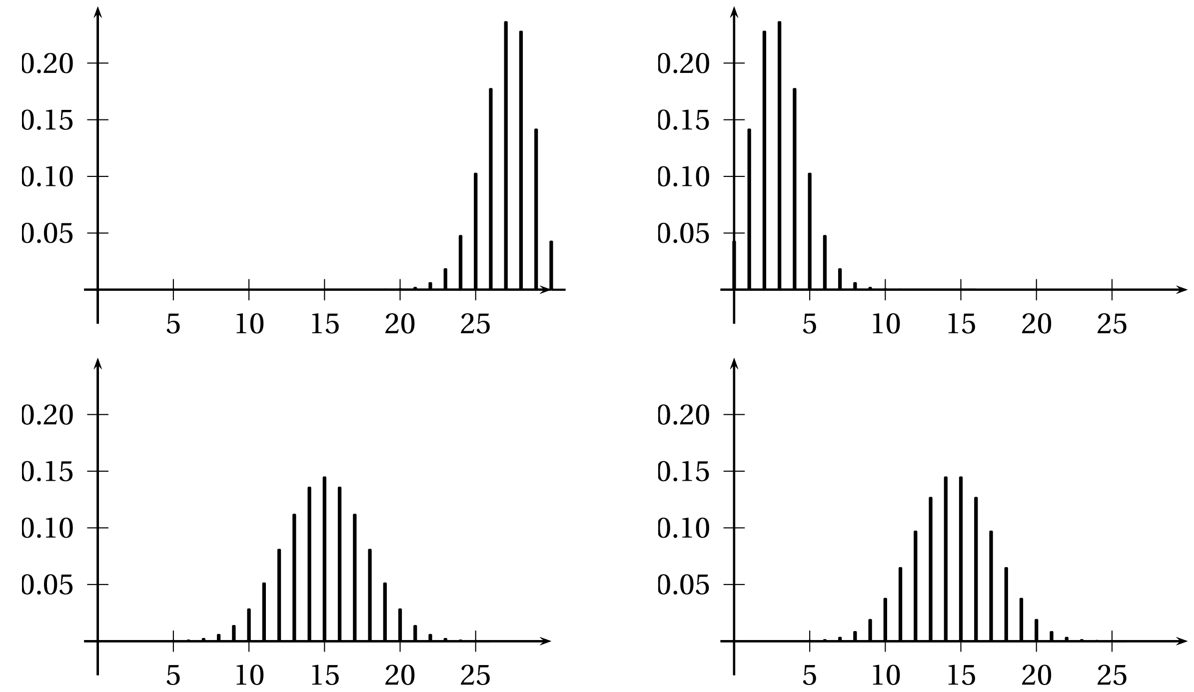
12.3 Exercices

EXERCICE 12.1.
Les expériences aléatoires suivantes sont-elles des épreuves de BERNOULLI ? Si oui préciser leur paramètre.

1. On lance un dé cubique équilibré et on gagne si on obtient 6.
2. On lance un dé tétraèdrique équilibré et on note le résultat obtenu.
3. Un automobiliste arrive à un feu et a une probabilité de 0,3 que le feu soit vert.
4. On tire une boule dans une urne contenant quatre boules rouges et six boules noires et on note la couleur de la boule obtenue.

EXERCICE 12.2.
On a représenté sur la figure 12.4 page suivante la distribution de probabilité de quatre variables aléatoires suivant les lois binomiales $\mathscr{B}(30\,;\,0{,}1)$, $\mathscr{B}(30\,;\,0{,}5)$, $\mathscr{B}(30\,;\,0{,}9)$ et $\mathscr{B}(29\,;\,0{,}5)$.
Associer chaque loi à son graphique.

FIGURE 12.4: Figure de l'exercice 12.2



EXERCICE 12.3.
Une association comprenant 30 adhérents organise chaque année une assemblée générale. Les statistiques montrent que chaque adhérent assiste à l'assemblée avec la probabilité de 80 %. Les décisions prises par l'assemblée n'ont de valeur légale que lorsque plus de la moitié des adhérents assiste à l'assemblée.
Quelle est la probabilité que, lors de la prochaine assemblée, le quorum soit atteint ?

EXERCICE 12.4.
Paul affirme : « Avec un dé régulier, on a autant de chance d'obtenir au moins un six en 4 lancers que d'obtenir au moins deux six avec 8 lancers ».
Sara objecte : « Pas du tout. Dans le premier cas, la probabilité est supérieure à 0,5, dans le deuxième cas, elle est inférieure à 0,5 ».
Qui a raison ?

EXERCICE 12.5.
À chaque tir, un archer atteint sa cible avec une probabilité égale à 0,7.
Combien de tirs doit-il effectuer pour que, avec une probabilité supérieure ou égale à 0,99, il atteigne la cible au moins deux fois ? Au moins trois fois ?

EXERCICE 12.6.
On lance une pièce équilibrée n fois. On s'intéresse à la probabilité d'obtenir « face » dans 60 % des cas ou plus.
Envisager les cas $n = 10$, puis $n = 100$, puis $n = 1000$.
Donner d'abord, sans calcul, une estimation spontanée du résultat, puis solliciter la calculatrice ($n = 10$) ou un algorithme de calcul $n = 100$ et $n = 1000$).

EXERCICE 12.7.
Une entreprise fabrique chaque jour 10 000 composants électroniques. Chaque composant présente un défaut avec la probabilité de 0,002. Si le composant est repéré comme étant défectueux, il est détruit par l'entreprise, et chaque composant détruit fait perdre 1 € à l'entreprise.

1. Les composants sont contrôlés un à un, et chaque contrôle coûte 0,1 €. Quel est le coût moyen journalier pour l'entreprise (contrôles et destruction des composants défectueux) ?

2. Les composants sont regroupés par lots de 10, et on effecture un unique contrôle automatique de chaque lot, qui coûte aussi 0,1 €. À l'issue de ce contrôle, le lot est accepté si tous les composants sont sains, et globalement détruit si l'un au moins des 10 composants présente un défaut. Quel est le coût moyen journalier pour l'entreprise de ce nouveau dispositif (contrôles et destruction des composants défectueux) ?

EXERCICE 12.8.
Un QCM comporte 20 questions. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées dont une seule est juste. Chaque réponse rapporte un point et il n'y a pas de pénalité pour une réponse fausse. Un candidat répond au hasard à chaque question.
Quel nombre total de points peut-il espérer ?
Quelle pénalité doit-on attribuer à une réponse fausse pour que le total espéré, en répondant entièrement au hasard, soit égal à 2 sur 20 ?

EXERCICE 12.9.
Un texte contient n erreurs. Lors d'une relecture, on considère que chaque erreur a 80 % de chances d'être corrigée.
Peut-on prévoir, en moyenne, le nombre d'erreurs restantes après une relecture, ..., après k relectures, k étant un entier supérieur à 1 ?