Chapitre 11

Produit scalaire : définitions, propriétés Première application : équations cartésiennes

Sommaire

Ce chapitre fait appel à la notion d'angle de vecteurs, traitée dans le chapitre 9.

On va s'intéresser dans ce chapitre à la quantité $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.
Que devient-elle lorsque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ? Et lorsqu'ils ne le sont pas ?
Peut-elle être positive ? Négative ?

Définition. On appelle *produit scalaire de deux vecteurs* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **le nombre réel**, noté $\vec{u}.\vec{v}$, défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

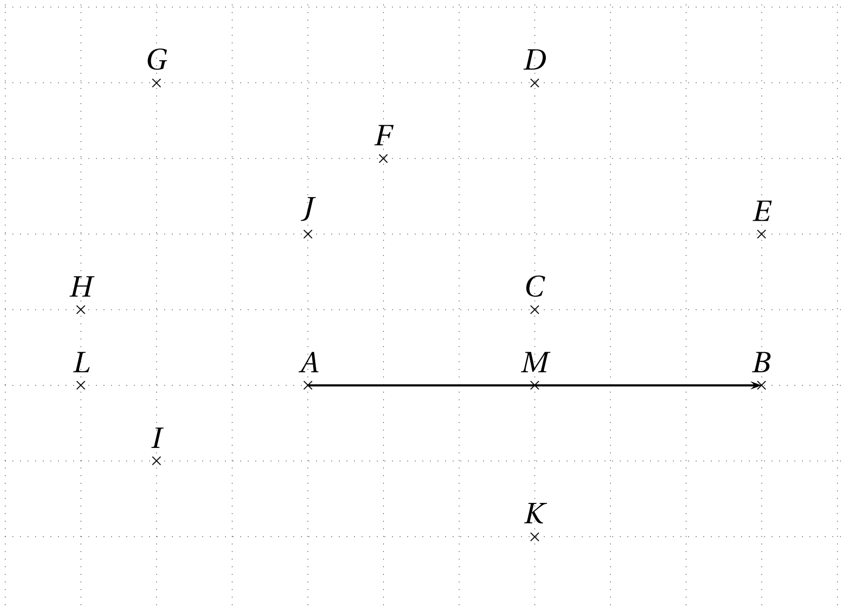
La présence du coefficient $\frac{1}{2}$ sera justifiée ultérieurement.

11.1 Activités

ACTIVITÉ 11.1.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et A, B, C et D quatre points tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD}$.
Prouver que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

ACTIVITÉ 11.2.

1. Compléter le tableau ci-dessous en utilisant la figure ci-dessous.



$\vec{u}$	$\|\vec{u}\|^2$	$\vec{v}$	$\|\vec{v}\|^2$	$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$	$\vec{u}.\vec{v}$
		$\overrightarrow{AA}$			
		$\overrightarrow{AC}$			
		$\overrightarrow{AD}$			
		$\overrightarrow{AB}$			
$\overrightarrow{AB}$		$\overrightarrow{AE}$			
		$\overrightarrow{AF}$			
		$\overrightarrow{AG}$			
		$\overrightarrow{AH}$			
		$\overrightarrow{AI}$			
		$\overrightarrow{AJ}$			
		$\overrightarrow{AK}$			
		$\overrightarrow{AL}$			

2. Conjecturer des réponses aux questions suivantes :

   (a) Dans quel(s) cas un produit scalaire est-il positif ? Négatif ?

   (b) Existe-t-il des points différents qui donnent le même produit scalaire ?
   À quelle configuration géométrique les points concernés semblent-ils appartenir ?

   (c) Que peut-on dire du produit scalaire de deux vecteurs colinéaires ?

ACTIVITÉ 11.3.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. Soit les vecteurs $\vec{u}(x\,;\,y)$, $\vec{v}(x'\,;\,y')$ et $\vec{w}(x''\,;\,y'')$.

1. Démontrer que $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.
2. Comparer $\vec{u}.\vec{v}$ et $\vec{v}.\vec{u}$.
3. Comparer $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})$ et $\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$.
4. Soit k un réel. Comparer $(k\vec{u}).\vec{v}$ et $k(\vec{u}.\vec{v})$.

ACTIVITÉ 11.4.
Soit A, B et C trois points distincts du plan orienté tels que $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right) = \alpha$.

On choisit le repère orthonormal direct $\left(A\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ tel que $\left(\vec{\imath}\,;\,\overrightarrow{AB}\right) = 0$.
H est le projeté orthogonal de C sur (AB), c'est-à-dire le pied de la perpendiculaire à (AB) passant par C.

1. Exprimer en fonction de AB, AC et α les coordonnées des points B, C et H.
2. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$.
3. Démontrer les conjectures de l'activité 11.2.

ACTIVITÉ 11.5.
Démontrer que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, alors $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$.
En déduire que si A, B et C sont trois points distincts, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$.

11.2 Bilan et compléments

11.2.1 Définitions

Rappelons la définition du produit scalaire.

Définition 11.1. On appelle *produit scalaire de deux vecteurs* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel, noté $\vec{u}.\vec{v}$, défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

Remarques.

- Le mot *scalaire* provient du latin *scala* qui signifie *échelle*. Il a plusieurs significations aussi bien en mathématiques qu'en physique. Il faut le comprendre ici comme un nombre et son nom souligne le fait que, **si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs, $\vec{u}.\vec{v}$ est lui un nombre**.
- On précisera systématiquement que c'est un produit *scalaire*, car vous verrez plus tard un autre type de produit de vecteurs qui ne donne pas un nombre mais un vecteur.

Théorème 11.1 (Autres expressions du produit scalaire)**.** *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.*

1. *Le plan étant muni d'un repère orthonormal où $\vec{u}(x\,;\,y)$ et $\vec{v}(x'\,;\,y')$ alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$*
2. *Si les deux vecteurs sont distincts du vecteur nul, $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\,\vec{v})$*
3. *Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v}'$ où $\vec{v}'$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur la direction donnée par $\vec{u}$.*

Remarques.

- Si l'un des vecteurs est égal au vecteur nul, l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ n'est pas défini.
- Si $\vec{u}=\vec{0}$, il n'a pas de direction.
- Dans tous les cas, si l'un des vecteurs est nul, $\vec{u}.\vec{v}=0$.

Théorème 11.2 (Cas de trois points)**.** *Soit A, B et C trois points du plan.*

- *Lorsque* $\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$ *et* $\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$.
- *Lorsque A et B distincts, soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) :*
  - $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AH$ *si* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AH}$ *sont de même sens.*
  - $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AB\times AH$ *si* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AH}$ *sont de sens opposé.*

Démonstrations des deux théorèmes. Voir les activités. ♢

11.2.2 Propriétés

Théorème 11.3. *Soit* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs du plan.*

- *Si* $\vec{u}=\vec{0}$ *ou* $\vec{v}=\vec{0}$, *alors* $\vec{u}.\vec{v}=0$.
- *Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si* $\vec{u}.\vec{v}=0$.
- $\vec{u}.\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$. *On notera alors* $\vec{u}.\vec{u}=\vec{u}^2$.

Les preuves seront faites en classe.

Remarque. Les deux derniers points de la propriété sont extrêmement importants. Le deuxième permet de démontrer bien des cas d'orthogonalité avec la souplesse des vecteurs. Le dernier permet de passer aisément des longueurs aux vecteurs et réciproquement, permettant ainsi de faire appel aux vecteurs, et à leur souplesse, dans bien des démonstrations concernant les longueurs.

Propriété 11.4 (Règles de calcul)**.** *Soit* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *des vecteurs et k un réel.*

- $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ *et* $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w}=\vec{u}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{w}$
- $(k\vec{u}).\vec{v}=k(\vec{u}.\vec{v})$ *et* $\vec{u}.(k\vec{v})=k(\vec{u}.\vec{v})$

Preuve. Voir activité 11.3. ♢

Propriété 11.5 (Identités remarquables)**.** *Soit* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs.*

- $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$
- $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

Preuve. En appliquant le deuxième point de la propriété précédente on obtient facilement ces résultats. ♢

Propriété 11.6 (Produit scalaire et coordonnées)**.** *Le plan est muni d'un repère* $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ *(orthonormal). Soit* $\vec{u}(x\,;\,y)$ *un vecteur.*

$$x=\vec{u}.\vec{\imath}\qquad\text{et}\qquad y=\vec{u}.\vec{\jmath}$$

Preuve. $\vec{u}.\vec{\imath}=x\times1+y\times0=x$ et $\vec{u}.\vec{\jmath}=x\times0+y\times1=y$ ♢

11.3 Une application : Équations cartésiennes de droites et de cercles

11.3.1 Équations cartésiennes de droites

Le produit scalaire nous permet d'obtenir d'une autre manière l'équation cartésienne d'une droite.

Définition 11.2. Le plan est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. On appelle vecteur normal à une droite $\mathscr{D}$ tout vecteur $\vec{n}$ non nul orthogonal à un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

Théorème 11.7. *Le plan est muni d'un répère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ **orthonormal**. Soit $\vec{n}(a\,;b)$ un vecteur non nul. Alors :*

- *Toute droite de vecteur normal $\vec{n}$ admet une équation de la forme $ax+by+c=0$.*
- *Toute droite admettant une équation de la forme $ax+by+c=0$ admet $\vec{n}=(a\,;b)$ comme vecteur normal.*

La preuve sera faite en classe.

Propriété 11.8 (Distance d'un point à une droite)**.** *Le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ **orthonormal**.*
Soit $\mathscr{D}$: $ax+by+c=0$ une droite et $M(\alpha\,;\beta)$ un point quelconque du plan.
La distance de M à $\mathscr{D}$, notée $d(M,\mathscr{D})$ est

$$d(M,\mathscr{D})=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

La preuve sera faite en classe.

11.3.2 Équations cartésiennes de cercle

Le produit scalaire nous permet d'obtenir un autre type d'équation cartésienne de cercle.

Théorème 11.9. *Le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ **orthonormal**.*
Soit $A(x_a\,;y_a)$ et $B(x_b\,;y_b)$ et $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$.
Alors tout point M de $\mathscr{C}$ a ses coordonnées qui vérifient $(x-x_a)(x-x_b)+(y-y_a)(y-y_b)=0$.

La preuve sera faite en classe.

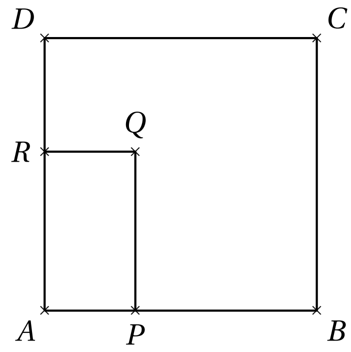
11.4 Exercices

11.4.1 Applications des définitions et propriétés

EXERCICE 11.1.
Soit $ABCD$ un carré de sens direct. On construit un rectangle $APQR$ de sens direct tel que :

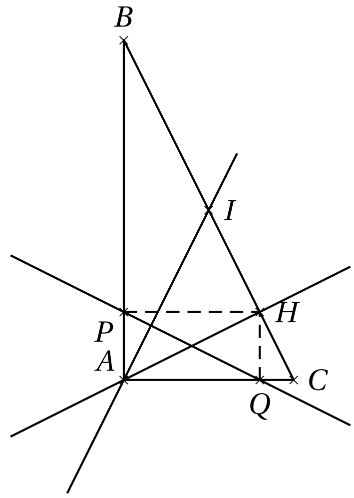
- $P \in [AB]$ et $R \in [AD]$;
- $AP = DR$.

1. Justifier que $\overrightarrow{CQ}.\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{CQ}.\left(\overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AP}\right)$
2. En déduire que les droites (CQ) et (PR) sont perpendiculaires.



EXERCICE 11.2.
ABC est un triangle rectangle en A. H est le pied de la hauteur issue de A ; I est le milieu de $[BC]$; P et Q sont les projetés orthogonaux de H respectivement sur (AB) et (AC).

1. Montrer que $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI}$.
2. Justifier que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HA}$ et que $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}$.
3. En déduire que $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{PQ} = 0$.
4. Que peut-on en déduire pour les droites (AI) et (PQ) ?

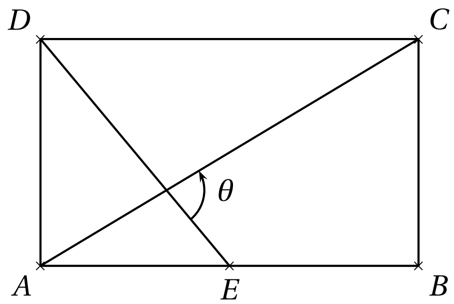


EXERCICE 11.3.
ABC est un triangle dans lequel $AB = 2$ et $AC = 3$. De plus $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4$. Ce triangle est-il rectangle ?

EXERCICE 11.4.
$ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = 4$, $AD = 5$ et $AC = 7$. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$. En déduire BD

EXERCICE 11.5.
$ABCD$ est un rectangle tel que $AD = 3$ et $AB = 5$. E est le milieu de $[AB]$.

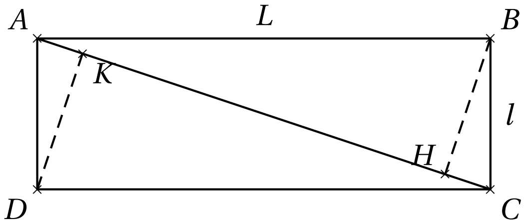
1. Calculer les longueurs AC et DE.
2. En exprimant chacun des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE}$.
3. En déduire la valeur de l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{AC}\right)$ en degrés à 0,01 près.



EXERCICE 11.6.
Le but de cet exercice est de démontrer, à l'aide du produit scalaire, que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.
Soit ABC un triangle. On note A', B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A, B et C sur (BC), (AC) et (AB). On note $H = (BB') \cap (CC')$.

1. Que valent les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}$?
2. Calculer $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}$.
3. Conclure.

EXERCICE 11.7.
$ABCD$ est un rectangle de longueur L et de largeur l. Soient H et K les projetés orthogonaux des sommets B et D sur la diagonale (AC).

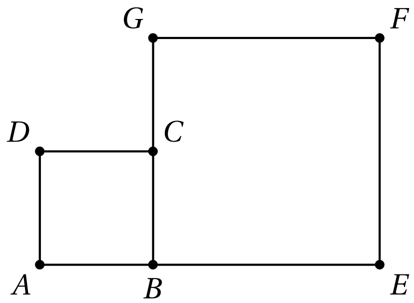


1. Calculer HK en fonction des longueurs des côtés L et l.
On pourra évaluer de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD}$.
2. Comment choisir L et l pour avoir $AC = 2HK$?
Exprimer alors l'aire du parallélogramme $BHDK$ en fonction de l'aire du rectangle $ABCD$.

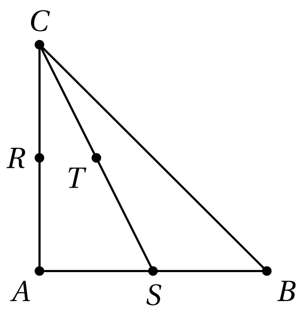
EXERCICE 11.8.
$ABCD$ est un losange de sens direct et de centre O On donne $AC = 10$ et $BD = 6$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.
2. On note P le projeté orthogonal de D sur la droite (AB). Calculer AP.
3. En déduire la hauteur du losange si l'on choisit comme base le côté $[AB]$

EXERCICE 11.9.
B est un point appartenant à $[AE]$. $ABCD$ et $BEFG$ sont des carrés situés dans le même demi-plan par rapport à (AE), comme sur la figure ci-contre.
Montrer que (EC) est la hauteur issue de E dans le triangle AEG.



EXERCICE 11.10.
ABC est un triangle rectangle et isocèle en A avec $AB = 4$. R, S et T sont les milieux respectifs de $[AC]$, $[AB]$ et $[CS]$.



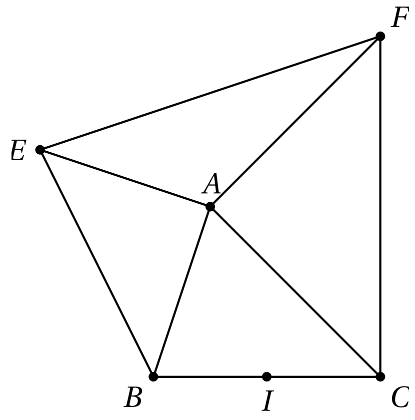
1. (a) Montrer que $(RT) \parallel (AB)$.
   (b) Montrer que $RT = 1$.
2. On se place dans le repère $\left(A; \vec{\imath}; \vec{\jmath}\right)$ où $\vec{\imath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{\jmath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
   (a) Déterminer la nature de ce repère.
   (b) Donner par lecture graphique et sans justifier les coordonnées des points de la figure dans ce repère.
   (c) Montrer que (AT) est une hauteur du triangle ARB.

EXERCICE 11.11.

ABC est un triangle tel que l'angle en A est aigu. BAE et CAF sont des triangles rectangles et isocèles en A à l'extérieur du triangle ABC (voir la figure ci-contre).

On note $\theta = \widehat{BAC}$, $b = AC$ et $c = AB$.

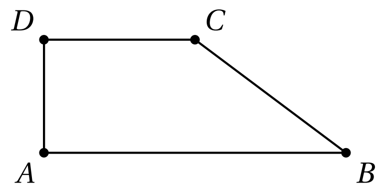
1. Exprimer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE}$ en fonction de b, c et θ.
2. Soit I le milieu de $[BC]$.
   Montrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.
3. Montrer que (AI) est la hauteur issue de A dans le triangle AEF.



EXERCICE 11.12.

$ABCD$ est un trapèze rectangle de base $AB = 2a$ et $CD = a$ et de hauteur $AD = h$.

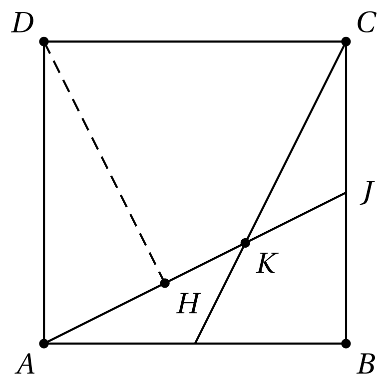
1. Exprimer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$ en fonction de a et de h.
2. Existe-t-il une valeur de h telle que les diagonales (AC) et (BD) soient perpendiculaires ?



EXERCICE 11.13.

$ABCD$ est un carré de côté a, I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$. H est le projeté orthogonal de D sur la droite (AJ) et K le point d'intersection des segments $[AJ]$ et $[CI]$.

1. En exprimant de deux façons le produit scalaire $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AD}$:
   (a) Calculer la longueur AH en fonction de a ;
   (b) En déduire la distance du point D à la droite (AJ) en fonction de a.
2. En exprimant de deux façons le produit scalaire $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AD}$, déterminer le cosinus de l'angle $\widehat{JKI}$ puis donner la valeur approchée à 0,1° près par défaut de la mesure de $\widehat{JKI}$.



11.4.2 Équations cartésiennes

Dans tous les exercices de ce paragraphe, le plan est muni d'un repère orthonormal.

EXERCICE 11.14.
On donne $A(1;2)$, $B(2;1)$ et $C(-3;0)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant par C et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 11.15.
Déterminer l'équation du cercle de centre $\Omega(5;1)$ et tangent à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x+y-4=0$.

EXERCICE 11.16.
On considère un triangle ABC avec $A(-1;2)$, $B(3;1)$ et $C(2;4)$.

1. Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[AB]$.
2. Déterminer une équation de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

EXERCICE 11.17.
On donne $\Omega(2;-3)$.

1. Déterminer l'équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon $r=5$.
2. Démontrer que le point $A(-2;0)$ est un point du cercle $\mathscr{C}$.
3. Déterminer une équation cartésienne de la tangente en A au cercle $\mathscr{C}$.

EXERCICE 11.18.
Soit $A(3;5)$. Chercher une équation de la tangente en A au cercle $\mathscr{C}$ de centre O, origine du repère, et passant par A.

EXERCICE 11.19.
Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan dont les coordonnées $(x;y)$ vérifient : $(x-3)(x+2)+(y-1)(y-4)=0$.