Chapitre 4

Géométrie analytique

Sommaire

4.1 Rappels de Seconde **33**

4.2 Condition de colinéarité de deux vecteurs **34**

4.3 Équations cartésiennes d'une droite **35**

4.4 Équation cartésienne d'un cercle **35**

4.5 Exercices **35**

4.5.1 Vecteurs – Colinéarité 35

4.5.2 Équations de droites 37

4.5.3 Équations de cercle 37

4.5.4 Divers 38

Les preuves seront démontrées ou admises, selon le choix du professeur en fonction du temps imparti au chapitre.

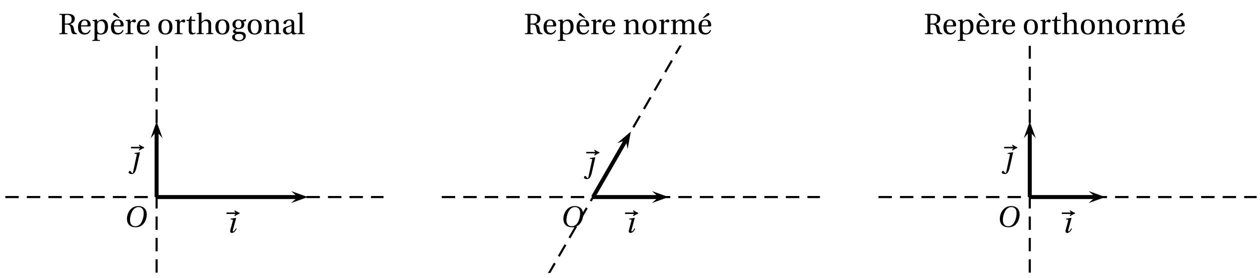
4.1 Rappels de Seconde

Ce paragraphe étant constitué de rappels, les exemples seront limités.

Définition 4.1. Soient O un point du plan et $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ deux vecteurs de ce plan de directions différentes (non colinéaires), alors $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ est appelé *repère* du plan. O est appelé *origine* du repère et le couple $\left(\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ est appelé *base* du repère.

Définition 4.2. Soit un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ du plan.

- Si les directions de $\vec{\imath}$ et de $\vec{\jmath}$ sont orthogonales, le repère est dit *orthogonal*.
- Si les normes de $\vec{\imath}$ et de $\vec{\jmath}$ sont égales à 1, le repère est dit *normé*.
- Si les directions de $\vec{\imath}$ et de $\vec{\jmath}$ sont orthogonales et que les normes de $\vec{\imath}$ et de $\vec{\jmath}$ sont égales à 1, le repère est dit *orthonormé*.
- Sinon, le repère est dit *quelconque*.



Propriété 4.1. *Le plan est muni d'une base* $\left(\vec{\imath},\vec{j}\right)$.
Pour tout vecteur $\vec{u}$ *du plan, il existe un unique couple* $(x;y)$, *appelé* coordonnées de $\vec{u}$, *tel que* $\vec{u}=x\vec{\imath}+y\vec{j}$.

Remarque. On notera que l'origine du repère n'a pas d'importance dans les coordonnées d'un vecteur et que le vecteur nul a pour coordonnées $(0;0)$.

Propriété 4.2. *Le plan est muni d'un repère.*
Soient $\vec{u}=\left(x;\,y\right)$ *et* $\vec{v}=\left(x';\,y'\right)$ *deux vecteurs et k un nombre.*

- $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow x=x'$ *et* $y=y'$.
- *Le vecteur* $\vec{u}+\vec{v}$ *a pour coordonnées* $\left(x+x';\,y+y'\right)$.
- *Le vecteur* $k\vec{u}$ *a pour coordonnées* $\left(kx;\,ky\right)$.

Définition 4.3. Le plan étant muni d'un repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{j}\right)$, on appelle *coordonnées* du point M le couple $(x;\,y)$ tel que $\overrightarrow{OM}=x\vec{\imath}+y\vec{j}$, x étant appelé *abscisse* de M et y étant appelé *ordonnée* de M.

Les coordonnées du point M sont donc les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Cela implique qu'elles dépendent de l'origine du repère.

Propriété 4.3. *Le plan est muni d'un repère. Soient* $A\,(x_A\,;\,y_A)$ *et* $B\,(x_B\,;\,y_B)$ *deux points du plan.*
Alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ *sont* $(x_B-x_A\,;\,y_B-y_A)$.

Propriété 4.4. *Le plan est muni d'un repère. Soit* $A(x_A;y_A)$ *et* $B(x_B;y_B)$ *et* $I(x_I;y_I)$ *milieu de* $[AB]$.
Alors $x_I=\frac{x_A+x_B}{2}$ *et* $y_I=\frac{y_A+y_B}{2}$.

Propriété 4.5. *Le plan est muni d'un repère* ***<u>orthonormé</u>***.
Soient A et B deux points du plan P de coordonnées respectives $(x_A\,;\,y_A)$ *et* $(x_B\,;\,y_B)$.
Alors la distance AB est donnée par $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

4.2 Condition de colinéarité de deux vecteurs

Propriété 4.6. *Le plan est muni d'un repère.*
Soient $\vec{u}\,(x;\,y)$ *et* $\vec{v}\,(x';\,y')$ *deux vecteurs du plan. Alors :* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *colinéaires* $\Leftrightarrow xy'-x'y=0$.

4.3 Équations cartésiennes d'une droite

Théorème 4.7. *Le plan est muni d'un repère.*

- *Toute droite du plan admet une équation de la forme* $ax+by+c=0$ *avec* $(a\,;\,b)\neq(0\,;\,0)$.
- *L'ensemble des points* M *du plan dont les coordonnées vérifient* $ax+by+c=0$ *avec* $(a\,;\,b)\neq(0\,;\,0)$ *est une droite*

Définition 4.4. Le plan est muni d'un repère.
Soit $\mathscr{D}$ une droite et A et B deux points de cette droite. On appelle *vecteur directeur* de $\mathscr{D}$ tout vecteur $\vec{u}\neq\vec{0}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Théorème 4.8. *Le plan est muni d'un repère.*
Toute droite admettant une équation de la forme $ax+by+c=0$ *admet* $\vec{v}=(-b\,;\,a)$ *comme vecteur directeur.*

Propriété 4.9. *Le plan est muni d'un repère.*
Soit $\mathscr{D}$ *une droite d'équation réduite* $y=mx+p$. *Alors* $\vec{v}\,(1\,;\,m)$ *est un vecteur directeur de* $\mathscr{D}$.

Propriété 4.10. *Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.*

4.4 Équation cartésienne d'un cercle

Théorème 4.11. *Le plan est muni d'un repère* ***orthonormal****.*
Soit $\mathscr{C}$ *le cercle de centre* $\Omega(x_0\,;\,y_0)$ *et de rayon* r.
Alors tout point de M *de* $\mathscr{C}$ *a ses coordonnées qui vérifient* $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.

4.5 Exercices

4.5.1 Vecteurs – Colinéarité

EXERCICE 4.1.
Le plan est muni d'un repère quelconque.
On donne les points $A\,(-5\,;\,3)$, $B\,(-4\,;\,1)$ et $C\,(1\,;\,-4)$.

1. Déterminer les coordonnées de I, milieu de $[AC]$.
2. Déterminer les coordonnées de D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

EXERCICE 4.2.
Le plan est muni du repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. Soient les points $A\,(-9\,;\,-10)$, $B\,(2\,;\,9)$, $C\,(5\,;\,3)$, $D\,(-1\,;\,-8)$ et $E\,(3\,;\,0)$.

1. Les points C, D et E sont-ils alignés ?
2. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

EXERCICE 4.3.
Le plan est muni du repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. On considère les points $A\,(-2\,;\,2)$, $B\,(-3\,;\,-3)$, $C\,(5\,;\,1)$ et $D\,(2\,;\,4)$. E est le milieu du segment $[BC]$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ABCD$?
2. Montrer que $ABED$ est un parallélogramme.
3. Déterminer si O appartient à la droite (AE).

EXERCICE 4.4.
$ABCD$ est un parallélogramme.
A' est le symétrique de A par rapport à B et E est le milieu de $[BC]$.

1. Déterminer les coordonnées des points A', E et D dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$
2. Montrer que les points A', E et D sont alignés

4.5.2 Équations de droites

Dans les exercices de ce paragraphe, le plan est muni d'un repère quelconque.

EXERCICE 4.5.
On considère les points $A(-1;2)$, $B(1;3)$ et $C(195;100)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
   À l'aide de cette équation déterminer si A, B et C sont alignés.
2. La droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$ est-elle parallèle à (AB) ?
3. Le point C appartient-il à la droite Δ passant par le point $J(0;1)$ et de coefficient directeur $\frac{3}{5}$?

EXERCICE 4.6.
On donne $A(1;2)$, $B(2;1)$ et $C(-3;0)$. Déterminer les équations des droites suivantes :

1. $\mathscr{D} = (BC)$;
2. $\mathscr{D}'$ passant par C et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$;
3. Δ parallèle à $\mathscr{D}$ passant par A ;
4. Δ' parallèle à $\mathscr{D}'$ passant par B.

EXERCICE 4.7.
Déterminer si les droites suivantes sont parallèles et, si elles ne le sont pas, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

- $\mathscr{D}_1 : x + 2y - 1 = 0$
- $\mathscr{D}_2 : y = -\frac{x}{2} + 3$
- $\mathscr{D}_3 : -2x + 3y + 5 = 0$

EXERCICE 4.8.
ABC est un triangle non aplati. I et J sont les point tels que $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

1. Dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$, déterminer les coordonnées des points I et J.
2. Déterminer une équation cartésienne des droites (BC) et (IJ).
3. Montrer que la droite (IJ) passe par le milieu O du segment $[BC]$.

4.5.3 Équations de cercle

Dans les exercices de ce paragraphe, le plan est muni d'un repère orthonormé.

EXERCICE 4.9.
Examiner si les équations suivantes sont des équations de cercle et, le cas échéant, préciser le centre et le rayon du cercle :

1. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$;
2. $x^2 + y^2 - x - 3y + 3 = 0$;
3. $x^2 + y^2 - x + 8y + 10 = 0$;
4. $x^2 + y^2 - 2y = 4$;
5. $x^2 + y^2 - 9 = 0$;
6. $(x-1)(x+2) + (y+1)(y-4) = 0$.

EXERCICE 4.10.
On donne $\Omega(2;-3)$.

1. Déterminer l'équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon $r = 5$.
2. Démontrer que le point $A(-2;0)$ est un point du cercle $\mathscr{C}$.

EXERCICE 4.11.
Trouver une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(1;2)$ et de rayon 3 et déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.

EXERCICE 4.12. 1. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ passant par $A(2;1)$ et $B(1;3)$ et dont le centre Ω est situé sur la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x+y+1=0$. *Indication : chercher d'abord les coordonnées de* Ω

2. Même question pour le cercle $\mathscr{C}'$ passant par $C(4;2)$ et $D(2;6)$ et dont le cercle Ω' est situé sur la droite d'équation $x+y+2=0$.

EXERCICE 4.13.
Les points A, B et C sont de coordonnées respectives $(8;2)$, $(4;-2)$ et $(0;2)$.
$\mathscr{C}$ est le cercle de centre A et passant par B.
P est le point de coordonnées $(p;0)$ où p est un réel quelconque et on appelle $\mathscr{D}_p$ la droite (CP).

Partie A : Questions préliminaires

1. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{C}$.
2. Déterminer l'ensemble des points d'intersection du cercle $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées, c'est-à-dire avec :
   (a) l'axe des abscisses;
   (b) l'axe des ordonnées.

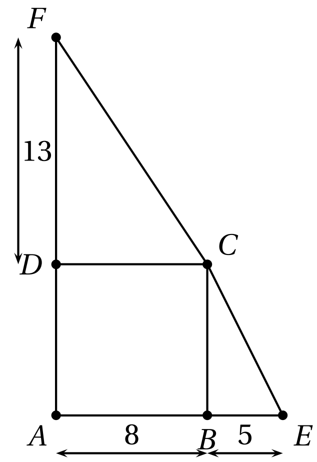
Partie B : Deux cas particuliers

1. On pose $p=-6$.
   (a) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}_{-6}$.
   (b) Déterminer l'ensemble des intersections de $\mathscr{D}_{-6}$ et de $\mathscr{C}$.
2. Mêmes questions avec $p=1$.

Partie C : Cas général
Déterminer, par le calcul, le nombre d'intersections entre $\mathscr{D}_p$ et de $\mathscr{C}$ selon les valeurs de p.

4.5.4 Divers

EXERCICE 4.14.
Sur le dessin ci-dessous fait) main levée, EAF est un triangle rectangle en A, $B\in[AE]$, $D\in[AF]$ et $ABCD$ est un carré.
Les points F, C et E sont-ils alignés ?



EXERCICE 4.15.
$ABCD$ est un parallélogramme. I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AD]$. K est l'intersection des droites (DI) et (BJ).
Que peut-on dire des points A, K et C ?