Chapitre 3

Suites : Premières notions
Suites arithmétiques
Suites géométriques

Sommaire

3.1 Activités

ACTIVITÉ 3.1.
On donne dans le tableau 3.1 de la présente page les effectifs, en million, de la population africaine depuis 1950.

1. Représenter cette évolution dans un repère.
2. Calculer les coefficients multiplicateurs permettant de passer de la population d'une décennie à celle de la suivante à partir de l'année 1950.

TABLE 3.1: Tableau de l'activité 3.1

Année	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Population	227,3	285	366,8	482,2	638,7	819,5	1011,2

3. Un statisticien propose de modéliser la population africaine de la manière suivante : « À partir de 1950, tous les dix ans, la population africaine est multipliée par 1,28 ».
   (a) Comment justifier sa démarche ?
   (b) Comparer le résultat obtenu par ce modèle en 2010 aux données réelles.
   Le modèle serait-il plus proche de la réalité avec un coefficient multiplicateur de 1,29 ?
4. (a) Que fait l'algorithme ci-contre ?
   (b) Le programmer sur sa calculatrice.
   (c) Le modifier afin qu'il n'affiche que le dernier terme calculé.
   (d) À l'aide de l'algorithme précédent, représenter cette évolution sur le même graphique.
   (e) À l'aide de l'algorithme précédent, estimer au cours de quelle décennie la population africaine dépassera 3 milliards.

Entrée(s)
    n
Initialisation
    $u \leftarrow 227{,}3$
Traitement
    Pour k allant de 1 à n
        $u \leftarrow u \times 1{,}28$
        Afficher k
        Afficher u
    Fin pour

ACTIVITÉ 3.2.
Pour chacune des suites de nombres suivantes :

1. Conjecturer, dans chaque cas, une manière d'obtenir le terme suivant.
2. Conjecturer, dans chaque cas, une manière d'obtenir le vingtième terme.

Rang n	a_n	b_n	c_n	d_n	e_n	f_n
0	0		1	$\frac{1}{1}$		100
1	1	-1	1,5	$\frac{3}{2}$	1	20
2	4	$\frac{1}{2}$	1,75	$\frac{7}{4}$	3	4
3	9	$-\frac{1}{3}$	1,875	$\frac{15}{8}$	5	0,8
4	16	$\frac{1}{4}$	1,9375	$\frac{31}{16}$	7	0,16
5	25	$-\frac{1}{5}$	1,96875	$\frac{63}{32}$	9	0,032

ACTIVITÉ 3.3.
Le Roi demande à l'inventeur du jeu d'échecs de choisir lui-même sa récompense.
Celui-ci répond (en ce temps là, on tutoyait les rois) :
« Place deux grains de blé sur la première case de l'échiquier, quatre grains sur la deuxième, huit sur la troisième, seize sur la quatrième et ainsi de suite. Je prendrai tous les grains qui se trouvent sur l'échiquier ».
Le Roi sourit de la modestie de cette demande.
En réalité, cette demande était-elle vraiment modeste ?

1. On numérote les soixante-quatre cases de l'échiquier de 1 à 64 et, pour chaque entier n ($1 \leqslant n \leqslant 64$), on note u_n le nombre de grains de blé que le Roi doit déposer dans la n-ième case.
   (a) Calculer $u_1, u_2, \ldots, u_{10}$.

(b) Comment passe-t-on d'un terme au suivant ?

(c) Exprimer u_n en fonction de n et calculer u_{64}.

2. On donne l'algorithme ci-contre.

   (a) Que fait cet algorithme ?

   (b) Entrer cet algorithme dans votre calculatrice.

   (c) Utiliser cet algorithme pour obtenir S, le nombre total de grains sur l'échiquier.

```
Entrée(s)
   n
Initialisation
   u ← 1
   s ← 0
Traitement
   Pour k allant de 1 à n
      u ← u × 2
      s ← s + u
   Fin pour
Sortie(s)
   Afficher s
```

3. Sachant qu'un grain de blé pèse, en moyenne, 5×10^{-2} gramme et qu'un mètre cube de blé pèse, en moyenne, une tonne, serait la hauteur d'un grenier parallélépipèdique de base carrée de côté 200 m qui contiendrait le blé gagné par l'inventeur ?
   Le Roi avait-il raison de sourire ?

3.2 Généralités sur les suites

3.2.1 Définition et notations

Définition 3.1. Une suite numérique u est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une fonction qui à tout entier naturel n associe un réel, noté $u(n)$ ou, plus généralement, u_n.
Ainsi $u : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n \end{cases}$

Exemples.

1. La suite des carrés des nombres entiers est 0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; etc. On peut écrire ces termes sous la forme $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 4$; $u_3 = 9$; etc. On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) de terme général $u_n = n^2$.
2. La suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ n'est définie que pour $n \geqslant 1$, on la note $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
3. La suite de terme général $u_n = \sqrt{n-5}$ n'est définie que pour $n \geqslant 5$, on la note $(u_n)_{n\geqslant 5}$.

Remarques (Vocabulaire, notations).

- n est l'indice (ou le rang) et u_n est le terme de rang n.
- *Attention :* (u_n) désigne la suite alors que u_n désigne le terme de rang n.

3.2.2 Modes de génération d'une suite

Relevés chronologiques

Dans la « vie courante », les principales suites rencontrées sont obtenues par des relevés, en général chronologiques, en économie, ou des mesures en physique.
En mathématiques, nous nous intéresserons essentiellement aux suites définies mathématiquement (par des formules) dont l'objet sera la modélisation des suites précédentes et à l'étude de leurs propriétés mathématiques.

Définition par une formule explicite

Une suite *explicite* est une suite dont le terme général s'exprime en fonction de n. Elle est du type $u_n = f(n)$ où f est une fonction. On a donc la définition suivante :

Définition 3.2. Soit f une fonction définie au moins sur $\mathbb{R}^+$. On peut alors définir une suite (u_n) de la façon suivante :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.

Remarques.

- On peut donc calculer directement n'importe quel terme de la suite à partir de l'indice n. C'est le côté agréable des suites explicites.
- Si f n'est définie que sur $[k; +\infty[$, avec $k > 0$, la suite n'est alors définie que pour $n \geqslant k$.

Exemples.

1. La suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 2n - 1$. On a $u_n = f(n)$ avec $f : x \mapsto 2x - 1$. Par exemple $u_4 = 2 \times 4 - 1 = 7$.
2. Les suites de l'exemple précédent sont toutes des suites explicites. Les deux dernières sont définies, respectivement, pour $n \geqslant 1$ et pour $n \geqslant 5$.

Définition par récurrence

Une suite *récurrente* est définie par la donnée des premiers termes et la relation liant les termes de la suite (en général consécutifs). Plus généralement, on peut définir une suite récurrente de la façon suivante :

Définition 3.3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$. On peut alors définir une suite (u_n) par la donnée de $u_0 \in I$ et de la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Exemple. $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$ donne $u_0 = 4$; $u_1 = 2u_0 - 5 = 3$; $u_2 = 2u_1 - 5 = 1$; etc.

Remarques.

- Contrairement aux suites explicites, on ne peut pas, *a priori*, calculer un terme quelconque de la suite, sans avoir obtenu, avant, tous les termes le précédant.

  De nombreux exercices seront consacrés à obtenir, malgré tout, des moyens de calculer directement un terme donné, c'est-à-dire à transformer, lorsque c'est possible, la suite récurrente en une suite explicite.

- Toutes les fonctions f ne conviennent pas. Par exemple si $u_0 = 3$ et $f(x) = \sqrt{x-2}$, c'est-à-dire $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 2}$, on a $u_1 = \sqrt{u_0 - 2} = \sqrt{1} = 1$. Par contre on ne peut pas calculer u_2, donc la suite n'est pas définie pour $n > 1$.

3.2.3 Représentation graphique d'une suite

Définition 3.4. Dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, la représentation graphique d'une suite (u_n) est l'ensemble des points M_n de coordonnées $(n;u_n)$.

Remarque. Contrairement à une fonction, la représentation graphique d'une suite n'est pas une courbe mais un nuage de points car la suite n'est définie que pour $n \in \mathbb{N}$. $u_{1,5}$ n'a, mathématiquement, pas de sens et donc le point $(1,5;u_{1,5})$ non plus.

3.2.4 Monotonie d'une suite

Une suite est une fonction particulière, on retrouve donc naturellement la notion de sens de variation pour une suite.

Définition 3.5. Soit (u_n) une suite. On dit que :

- la suite (u_n) est *croissante* si, pour tout entier n : $u_{n+1} \geqslant u_n$;
- la suite (u_n) est *décroissante* si, pour tout entier n : $u_{n+1} \leqslant u_n$;
- la suite (u_n) est *constante* si, pour tout entier n, $u_n = u_{n+1}$.

Définition 3.6. Soit (u_n) une suite. On dit que (u_n) est *monotone* si son sens de variation ne change pas (elle reste croissante ou décroissante)

Remarque. On obtient les définitions de *strictement* croissante, décroissante ou monotone en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

Étudier la monotonie d'une suite c'est donc étudier ses variations.

3.3 Deux suites particulières : arithmétiques et géométriques

3.3.1 Suites arithmétiques

Définition et premières propriétés

Définition 3.7 (par récurrence)**.** On appelle *suite arithmétique* toute suite (u_n) telle que

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = u_n + r \text{ où } r \in \mathbb{R}$$

r est appelé *la raison* de la suite arithmétique.

Remarque. Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, il suffit de montrer que, pour tout n, la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante. Cette constante sera alors la raison de la suite.

Exercice.

1. La suite formée par les nombres entiers naturels pairs est-elle une suite arithmétique ? Et celle formée par les nombres entiers naturels impairs ?
2. La suite définie par : pour tout n, $u_n = 3n - 2$ est-elle arithmétique ?
3. La suite définie par : pour tout n, $u_n = n^2$ est-elle arithmétique ?
4. Parmi les suites rencontrées dans les activités d'introduction, lesquelles sont arithmétiques ?

Propriété 3.1 (Formule explicite)**.** *Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et raison r. Alors, pour tout entier naturel n et tout entier naturel p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a :*
$u_n = u_p + (n-p)r$
Et en particulier, avec $p = 0$:
$u_n = u_0 + nr$

Nous l'admettrons.

Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Propriété 3.2. *Soit (u_n) une suite arithmétique et n et p deux entiers naturels tels que $0 \leqslant p \leqslant n$.*

Alors :

$$\sum_{i=p}^{n} u_i = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = \frac{(u_p + u_n)(n-p+1)}{2}$$

En particulier, en posant $p = 0$, on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$$

La preuve sera faite en classe.
Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

La somme S de termes consécutifs *d'une suite arithmétique est :*

$$S = \frac{(\textit{1}^{\textit{er}}\ \textit{terme} + \textit{dernier}) \times (\textit{nb de termes})}{2}$$

3.3.2 Suites géométriques

Définition et premières propriétés

Définition 3.8 (par récurrence)**.** On appelle *suite géométrique* toute suite (u_n) telle que

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = q \times u_n$ où $q \in \mathbb{R}$

q est appelé *la raison* de la suite géométrique.

Remarques.

1. Si $q = 0$, tous les termes de la suite, hormis peut-être u_0 sont nuls.

   Si $u_0 = 0$, tous les termes de la suite sont nuls.

   En dehors de ces deux cas triviaux, inintéressants, tous les termes de la suite sont différents de zéro.

2. Pour démontrer qu'une suite est géométrique (en dehors des deux cas triviaux), il suffit de montrer que, pour tout n, le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant. Cette constante sera alors la raison de la suite.

Exercice.
1. La suite définie par : pour tout n, $u_n = n^2$ est-elle géométrique ?
2. Parmi les suites rencontrées dans les activités d'introduction, lesquelles sont géométriques ?

Propriété 3.3 (Formule explicite)**.** *Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et raison q. Alors, pour tout entier naturel n et tout entier naturel p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a :*
$u_n = q^{n-p} u_p$
Et en particulier, avec $p = 0$:
$u_n = q^n u_0$

Nous l'admettrons.

Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Propriété 3.4. *Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et n et p deux entiers naturels tels que $0 \leqslant p \leqslant n$.*
Alors :

$$\sum_{i=p}^{n} u_i = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

En particulier, en posant $p = 0$, on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

La preuve sera faite en classe.
Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

La somme S de termes consécutifs *d'une suite géométrique est :*

$$S = \textit{1}^{\textit{er}}\ \textit{terme} \times \frac{1-q^{\textit{nb de termes}}}{1-q}$$

3.4 Exercices et problèmes

3.4.1 Exercices

EXERCICE 3.1.
Pour chacune des suites données ci-dessous :

- $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $v_n = 5 - 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $w_n = (n+1)^2 - n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $x_n = \frac{3^n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Calculer les trois premiers termes.
2. La suite est-elle géométrique ? arithmétique ?
3. Si elle est arithmétique ou géométrique :
   (a) calculer le terme de rang 100 ;
   (b) calculer la somme des termes jusqu'au rang 100.

EXERCICE 3.2.
Les suites (u_n) de cet exercice sont arithmétiques.

1. La suite (u_n) est de raison $r = 8$. On sait que $u_{100} = 650$.
   Que vaut u_0 ?
2. La suite (u_n) est de raison r. On sait que $u_{50} = 406$ et $u_{100} = 806$.
   (a) Déterminer r et u_0.
   (b) Calculer $S = u_{50} + u_{51} + \ldots + u_{100}$.

EXERCICE 3.3.
On considère une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $q = -2$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Calculer u_{20}.
3. Calculer la somme $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_{20}$.

EXERCICE 3.4.
Les suites (u_n) de cet exercice sont géométriques.

1. La suite (u_n) est de raison $q = \frac{1}{2}$. On sait que $u_8 = -1$.
   Que vaut u_0 ?
2. La suite (u_n) est de raison q. On sait que $u_4 = 10$ et $u_6 = 20$.
   (a) Déterminer q et u_0.
   (b) Calculer $S = u_{50} + u_{51} + \ldots + u_{100}$.

EXERCICE 3.5.
Après avoir mis en évidence la suite dont il s'agit et prouver qu'elle est, le cas échéant, arithmétique ou géométrique, calculer les sommes suivantes :

- $S_1 = 1+2+3+\ldots+998+999$
- $S_2 = 2\,006+2\,007+\ldots+9\,999$
- $S_3 = 1-2+4-8+16-32+\ldots+4\,096$
- $S_4 = 1+3+9+27+\ldots+59\,049$
- $S_5 = 1+3+5+7+\ldots+999$
- $A = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{28}}$
- $B = 3+6+9+\ldots+99$

3.4.2 Problèmes

PROBLÈME 3.1.
Un étudiant loue un chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bail :

- *Premier contrat* : un loyer de 200 € pour le premier mois, puis une augmentation de 5 € par mois jusqu'à la fin du bail ;
- *Second contrat* : un loyer de 200 € pour le premier mois, puis une augmentation de 2 % par mois jusqu'à la fin du bail.

Question : Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ?

Indications :

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois.
2. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois, c'est-à-dire celui du 36$^{\text{è}}$ mois.
3. Répondre à la question.

PROBLÈME 3.2.
Le nombre d'adhérents d'un club sportif augmente de 5 % chaque année. En 1990, il y avait 500 adhérents.
Question : le nombre d'adhérents peut-il doubler et, si oui, en quelle année ?

Indications :
Pour chaque année à partir de 1990 on note u_n le nombre d'adhérents l'année $1990+n$.

1. Quelle est la valeur de u_0 ? de u_1 ?
2. Préciser la nature de la suite (u_n) puis exprimer u_n en fonction de n.
3. Étudier la monotonie de (u_n).
4. Utiliser la calculatrice pour répondre à la question.

PROBLÈME 3.3.
Jean est en train de lire un livre. En additionnant les numéros de toutes les pages qu'il a déjà lues, il obtient 351. En additionnant les numéros de toutes les pages qu'il lui reste à lire, il obtient 469.

1. À quelle page en est Jean ?
2. Combien de pages comporte ce livre ?

On supposera que le livre commence à la page n°1.

PROBLÈME 3.4.
Lequel des deux nombres suivants est le plus grand ?

- $A = 2005(1+2+3+\ldots+2006)$
- $B = 2006(1+2+3+\ldots+2005)$

PROBLÈME 3.5.
Monsieur X désire financer un voyage dont le coût est de 6 000€.
Pour ce faire, il a placé 2 000 € le 31 décembre 2002 sur son livret bancaire, à intérêts composés au taux annuel de 3,5 % (ce qui signifie que, chaque année, les intérêts sont ajoutés au capital et produisent à leur tour des intérêts). À partir de l'année suivante, il prévoit de placer, chaque 31 décembre, 700 € supplémentaires sur ce livret.
Question : En quelle année aura-t-il assez d'argent pour financer son voyage ?

Indications :
On désigne par C_n le capital, exprimé en euros, disponible le 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année $(2003+n)$, où n est un entier naturel. Ainsi, on a $C_0 = 2000$.

1. (a) Calculer le capital disponible le 1$^{\text{er}}$ janvier 2004.
   (b) Établir, pour tout entier naturel n, une relation entre C_{n+1} et C_n.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = C_n + 20000$.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
   (b) Exprimer u_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $C_n = 22000 \times (1{,}035)^n - 20000$.
3. Étudier la monotonie de la suite (C_n) puis, à l'aide de la calculatrice, répondre à la question.

PROBLÈME 3.6.
Un fournisseur fait une étude sur la fidélité de sa clientèle depuis l'année $n = 0$, où il y a eu 200 clients. Chaque année, sa clientèle est composée de 50% des clients de l'année précédente auxquels s'ajoutent 400 nouveaux clients.
Question : En supposant que cette évolution se poursuive, comment va se comporter le nombre de clients sur le long terme ?

Indications :

1. Soit u_n le nombre de clients l'année n.
   Justifier que $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 400$, puis calculer u_1,u_2, u_3 et u_4.
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 800$.
   (a) Vérifier que $v_{n+1} = 0{,}5v_n$.
   (b) Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
   (c) En déduire l'expression de v_n, puis celle de u_n, en fonction de n.
   (d) Étudier la monotonie de (u_n). Interpréter le résultat.
   (e) Calculer u_{100}, u_{1000} et u_{10000}.
   Que peut-on alors conjecturer concernant le nombre de clients du fournisseur ?

PROBLÈME 3.7.
Le 1er janvier 2005, une grande entreprise compte 1500 employés.
Une étude montre que lors de chaque année à venir, 10% de l'effectif du 1er janvier partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 100 jeunes dans l'année.
Question : En supposant que cette évolution se poursuive, comment va se comporter le nombre d'employés sur le long terme ?

Indications :
Pour tout entier n on appelle u_n le nombre d'employés le 1er janvier de l'année $(2005+n)$.

1. Déterminer u_0, u_1, u_2 et u_3
2. (a) Montrer que $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 100$.
   (b) Cette suite est-elle arithmétique ? Cette suite est-elle géométrique ?
3. On pose $v_n = u_n - 1000$.
   (a) Déterminer v_0, v_1, v_2 et v_3.
   (b) Montrer que (v_n) est géométrique.
   (c) En déduire v_n en fonction de n.
   (d) En déduire u_n en fonction de n.
   (e) Étudier la monotonie de (u_n) et interpréter le résultat.
   (f) Conjecturer le comportement de (u_n) quand n devient grand et interpréter le résultat.

PROBLÈME 3.8.
Une ville comprenait 300 000 habitants au premier janvier 1950. On estime que, entre les nouveaux arrivants et les nouvelles naissances, la population augmente de 5% chaque année. On constate curieusement un nombre fixe de décès et de départ de 800 personnes par an. On veut déterminer à partir de quelle année la population de la ville sera supérieure au double de la population en 1950.
Question : À partir de quelle année la population de la ville sera supérieure au double de la population en 1950 ?

Indications :

1. Quelle était la population estimée de la ville le premier janvier 1951 ?
2. On note p_n la population de la ville à l'année $1950+n$.
   Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
3. On pose $q_n = p_n - 16000$.
   (a) Montrer que cette suite est une suite géométrique.
   (b) Exprimer q_n puis p_n en fonction de n.
4. Montrer que (p_n) est croissante.
5. En déduire, à l'aide de la calculatrice, la réponse à la question.