Nom : *Jeudi 22 mars 2018 – 2h*

Devoir surveillé n°7

Dérivation – Statistiques – Variables aléatoires

Le devoir est noté sur 30 points. Le barème est indicatif.

EXERCICE 7.1 (5 points)**.**

On a représenté sur la figure 7.2 donnée en annexe la courbe Γ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La courbe Γ passe par les points $A(0\,;4)$ et $B(2\,;0)$. La droite (AC), où $C(1\,;-2)$ est la tangente en A à la courbe Γ. La tangente à Γ au point D d'abscisse 3 (et d'ordonnée environ $-0{,}1$) est parallèle à l'axe des abscisses. La courbe est en-dessous de l'axe des abscisses à partir du point B. La fonction f est croissante à partir de 3.

1. Donner sans justifier $f(0)$ et $f(2)$.
2. Donner en justifiant $f'(0)$ et $f'(3)$.
3. Une des représentations graphiques de la figure 7.3 donnée en annexe, représente la fonction dérivée f' de f. Déterminer laquelle en justifiant son choix à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques.
4. Une des représentations graphiques de la figure 7.3 donnée en annexe, représente une fonction g telle que $g' = f$. Déterminer laquelle en justifiant son choix à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques.

EXERCICE 7.2 (7 points)**.**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$ par :

$$f : x \longmapsto \frac{-2x^2+6x-5}{2x-3}$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

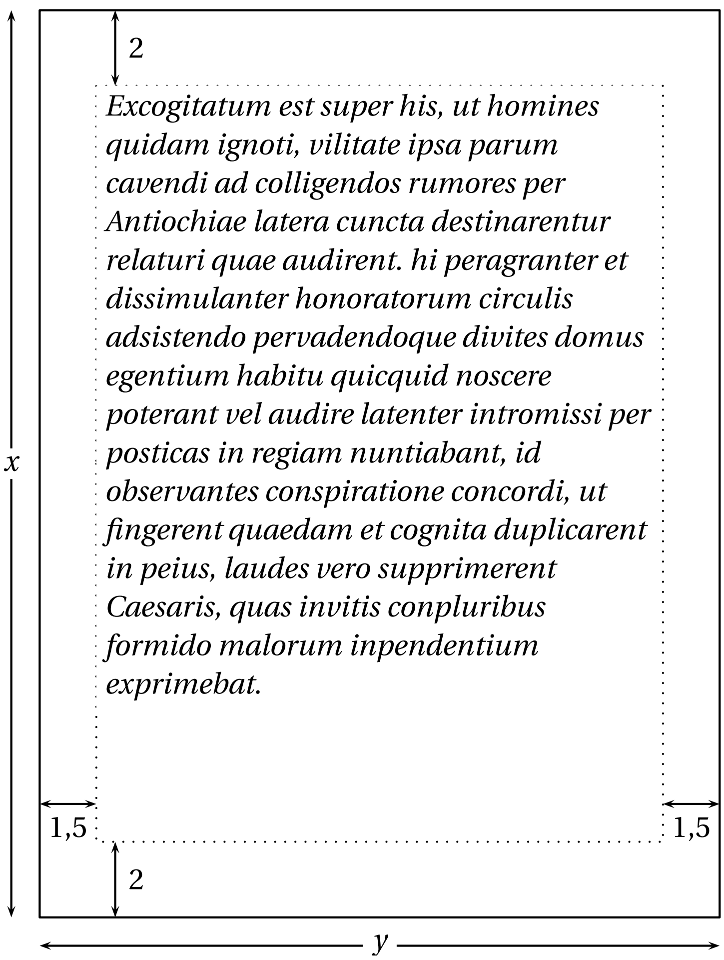
1. Déterminer les éventuels points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec :
   (a) l'axe des ordonnées $(0y)$;
   (b) l'axe des abscisses $(0x)$.
2. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$ et on nomme f' sa fonction dérivée.
   (a) Montrer que
   $$f' : x \longmapsto \frac{-4(x^2-3x+2)}{(2x-3)^2}$$
   (b) Déterminer le tableau des variations de f en justifiant.
   On indiquera les valeurs des extremums.
3. Déterminer les coordonnées des éventuels points de la courbe où la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses.
4. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

EXERCICE 7.3 (4 points).
Un éditeur doit produire un livre avec les contraintes suivantes :

- sur chaque page, le texte imprimé doit être contenu dans un rectangle de $300\,\text{cm}^2$;
- les marges gauche et droite doivent mesurer 1,5 cm alors que les marges haut et bas doivent mesurer 2 cm.

Un exemple à l’´echelle un demi est donné ci-dessous.

Le rectangle contenant le texte, en pointillés, est, dans cet exemple, de dimension
$15\,cm \times 20\,cm = 300\,cm^2$.



Le but de l’exercice est de déterminer quelles doivent être les dimensions de la page pour que la consommation de papier soit minimale.

On note x et y les dimensions de la page et $\mathscr{S}(x) = xy$ la surface de la page.

1. À l’aide des données de l’énoncé, démontrer que :
$$y = \frac{288+3x}{x-4}$$
2. En déduire une expression de $\mathscr{S}(x)$ uniquement en fonction de x et préciser son ensemble de définition.
3. Après avoir étudié $\mathscr{S}$, répondre au problème posé.

EXERCICE 7.4 (6 points)**.**
Le tableau suivant donne les résultats (arrondis au point supérieur) obtenus par une classe de Seconde lors d'un devoir, dit *devoir n° 1*, en mathématiques :

Notes x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectifs n_i	0	0	1	2	3	0	2	7	2	2	0	1	0	2	0	1	3	1	3	4	1

1. (a) Déterminer la note moyenne $\overline{x}$, arrondie au dixième, et l'écart-type s, arrondi au centième, de cette série en détaillant brièvement les calculs (les pointillés sont autorisés dans la rédaction).

   (b) Déterminer la médiane m et les premier et troisième quartiles Q_1 et Q_3 de cette série en précisant la façon dont ils ont été obtenus.

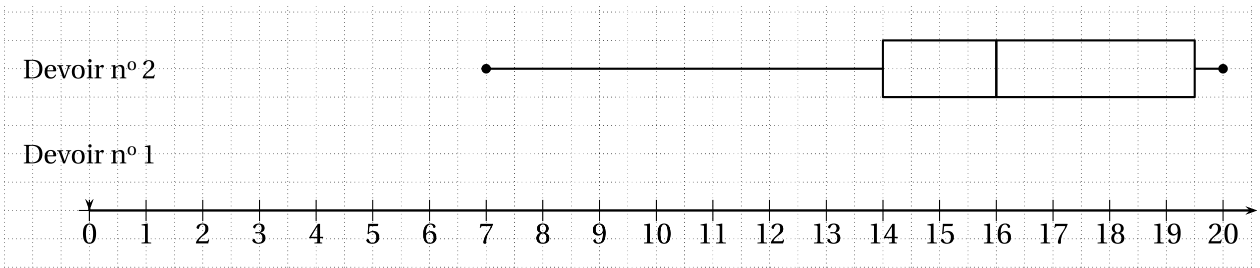
2. Le professeur considère que si l'écart entre la moyenne et la médiane est supérieur à 0,75, alors il est important. Est-ce le cas ? Comment l'expliquer ?

3. (a) Représenter, sur la figure 7.1 donnée ci-dessous, le diagramme en boite de la série statistique correspondant au devoir n° 1.
   Sur cette figure, on a déjà représenté le diagramme en boite d'une série constituée des résultats d'un autre devoir, dit *devoir n° 2*, de mathématiques de cette Seconde.
   En vous basant sur ces diagrammes, comparer les résultats de cette classe à ces deux devoirs.

   (b) Le devoir n° 2 a une moyenne et un écart-type respectivement de $\overline{x}' \approx 16{,}0$ et $s' \approx 3{,}95$.
   Comparer les résultats des deux devoirs à l'aide de ces paramètres statistiques.

4. Question bonus : Les résultats des deux devoirs sont très différents, pourtant il s'agit de la même classe ; comment pourrait-on expliquer cette différence ?

FIGURE 7.1: Figure de l'exercice 7.4



EXERCICE 7.5 (5 points)**.**
On considère une roue de fête foraine circulaire partagée en 8 secteurs de même mesure telle qu'il y a :

- 1 secteur de couleur rouge (R) ;
- 2 secteurs de couleur bleue (B) ;
- 5 secteurs de couleur verte (V).

Pour participer à ce jeu, chaque joueur doit payer 2 euros et faire tourner la roue sur son axe central suffisamment fort pour qu'on puisse considérer que la roue a la même probabilité de s'arrêter sur chaque secteur et, selon la couleur du secteur sur laquelle la roue s'arrête, le joueur gagne :

- 0 euro si c'est le vert ;
- 3 euros si c'est le bleu ;
- 5 euros si c'est le rouge.

On appelle X la variable aléatoire qui à chaque couleur associe le gain final (gain − mise de départ) correspondant.

1. Décrire la loi de probabilité associée à la variable aléatoire X *(on la présentera sous forme de tableau).*
2. (a) Calculer l'espérance de la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   (b) Interpréter le résultat en terme de partie et de gain.
   (c) Qui est le plus avantagé : l'organisateur ou le joueur ?
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   On dit que le jeu est équitable lorsque l'éspérance de gain est égale à 0, car, alors, ni l'organisateur, ni le joueur ne sont avantagés. Comment modifier les gains pour que le jeu soit équitable ?

EXERCICE 7.6 (3 points)**.**
On propose deux types de jeu basés sur le lancer d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6.

Jeu 1 : Si le 6 sort, on gagne 36 €, sinon on ne gagne rien ;

Jeu 2 : Si le 6 sort, on ne gagne rien, sinon on gagne 6 €.

Quel est le jeu le plus avantageux pour le joueur ? *On justifiera à l'aide d'arguments mathématiques.*

FIGURE 7.2: Annexe : Courbe Γ de la fonction f de l'exercice 7.1

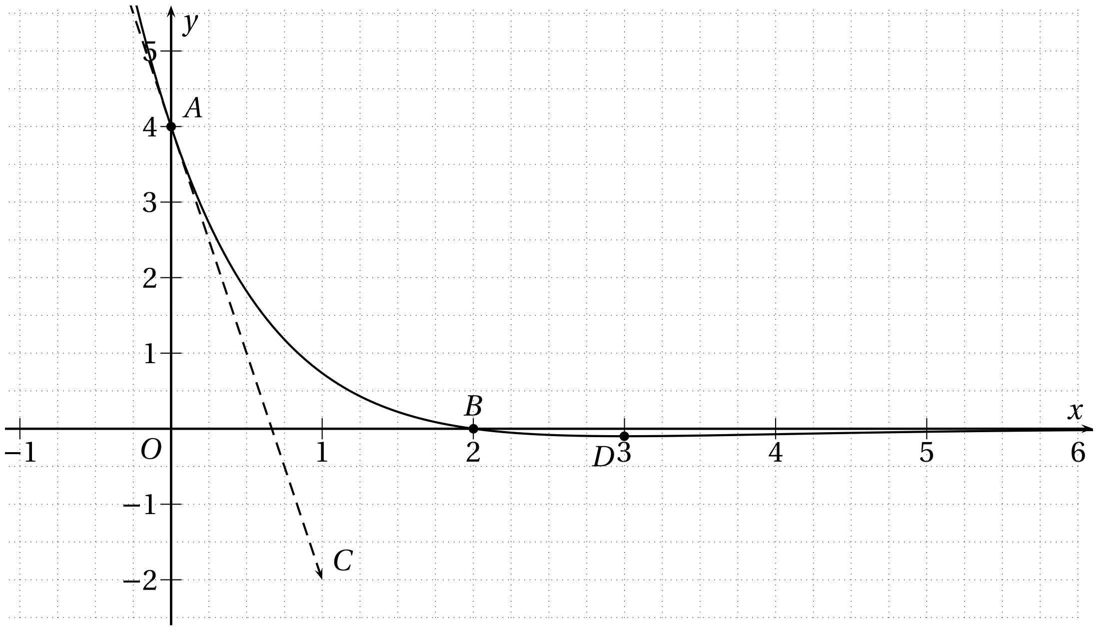


FIGURE 7.3: Annexe : Courbes proposées pour f' ou g de l'exercice 7.1