Chapitre 7

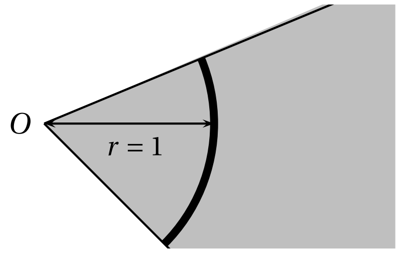
Angles orientés
Trigonométrie : premières notions

Sommaire

7.1 Notion d'angle

7.1.1 Une nouvelle mesure d'angle : le radian

Définition 7.1 (Angle, mesure de l'angle en radian)**.** Dans un plan, un *angle* de sommet O est l'ensemble des points du plan délimité par deux demi-droites de même sommet O.
La *mesure* de cet angle, en radian, est la longueur de l'arc de cercle de centre O et de rayon 1 intercepté par cet angle.



EXERCICE 7.1. 1. Quel est le périmètre d'un cercle de rayon 1 ?

2. En déduire la mesure en radian d'un angle de 360°.

3. On rappelle que la longueur de l'arc intercepté par un secteur angulaire est proportionnelle à la mesure de l'angle. Compléter alors le tableau suivant (les valeurs exactes sont attendues) :

Mesure de l'angle en degré	0	30	45	60	90	180	360
Mesure de l'angle en radian							

7.1.2 Angles orientés géométriques

Orientation du plan

Définition 7.2 (Orientation du plan)**.** On utilisera le vocabulaire suivant :

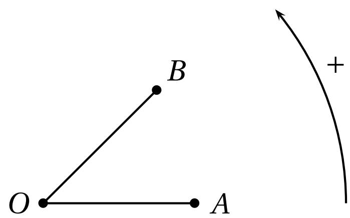
- *Orienter un cercle*, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle appelé *sens direct* (ou positif). L'autre sens est appelé *sens indirect* (négatif ou rétrograde).
- *Orienter le plan*, c'est orienter tous les cercles du plan dans le même sens. L'usage est de choisir pour sens direct le sens contraire des aiguilles d'une montre (appelé aussi *sens trigonométrique*).

Dans la suite du chapitre, on suppose que le plan est orienté dans le sens trigonométrique.

Définition 7.3 (Cercle trigonométrique)**.** *Un cercle trigonométrique* est un cercle orienté dans le sens direct et de rayon 1. Lorsque le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ orthonormé, le cercle trigonométrique est le cercle orienté dans le sens direct, de centre O et de rayon 1.

Angles orientés géométriques

Quand le plan est orienté les mesures des angles, qu'elles soient en degré ou en radian, sont positives quand l'angle est dans le sens direct, négatives quand l'angle est dans le sens indirect.
Ainsi, sur le schéma ci-contre, $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{4}$ alors que $\widehat{BOA} = -\frac{\pi}{4}$.



7.1.3 Angle orienté de vecteurs

Angle orienté de vecteurs

Définition 7.4 (Angle orienté de vecteurs)**.** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté. On appelle *angle orienté*, noté $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$, le couple de ces deux vecteurs.

Mesures des angles orientés

Définition 7.5 (Mesure d'un angle orienté de vecteurs)**.** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté et O, A et B tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.
Une mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ est une mesure de l'angle géométrique orienté $\widehat{AOB}$.

Définition 7.6 (Mesure principale)**.** La *mesure principale* d'un angle orienté est l'unique mesure de cet angle orienté qui appartient à $]-\pi\,;\,\pi]$.

On admettra que cette mesure est unique.

Remarques.

- Si une des mesures de $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ est α, alors toutes les mesures sont de la forme $\alpha+k\times 2\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
- Par abus de langage, on confond un angle et ses mesures. On écrit par exemple $(\vec{u}\,;\,\vec{v})=\frac{\pi}{2}+k\times 2\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
- $(\vec{u}\,;\,\vec{v})=\frac{\pi}{2}+k\times 2\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ peut aussi s'écrire :
  $(\vec{u}\,;\,\vec{v})\equiv\frac{\pi}{2}\pmod{2\pi}\equiv\frac{\pi}{2}\ (2\pi)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ qui se lit « $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ est *congru* à $\frac{\pi}{2}$ *modulo* 2π ».

Propriété 7.1. *Soient un vecteur non nul $\vec{u}$ du plan orienté et $k\in\mathbb{R}^*$.*

- $(\vec{u}\,;\,\vec{u})\equiv 0[2\pi]$.
- $(\vec{u}\,;\,-\vec{u})\equiv\pi[2\pi]$.
- *Si $k>0$ alors* $(\vec{u}\,;\,k\vec{u})\equiv 0[2\pi]$.
- *Si $k<0$ alors* $(\vec{u}\,;\,k\vec{u})\equiv\pi[2\pi]$.

Propriété 7.2 (Relation de Chasles (admise))**.** *Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté.*

$$(\vec{u}\,;\,\vec{v})+(\vec{v}\,;\,\vec{w})=(\vec{u}\,;\,\vec{w})$$

On en déduit :

Propriété 7.3. *Soit $\vec{u}$ et $\vec{u}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté, k et k' deux réels non nuls.*

- $(\vec{u}\,;\,\vec{v})=-(\vec{v}\,;\,\vec{u})$.
- $(-\vec{u}\,;\,\vec{v})=(\vec{u}\,;\,\vec{v})+\pi$.
- $(\vec{u}\,;\,-\vec{v})=(\vec{u}\,;\,\vec{v})+\pi$.
- $(-\vec{u}\,;\,-\vec{v})=(\vec{u}\,;\,\vec{v})$.
- *Si k et k' sont de même signe,* $(k\vec{u}\,;\,k'\vec{v})=(\vec{u}\,;\,\vec{v})$.
- *Si k et k' sont de signes opposés,* $(k\vec{u}\,;\,k'\vec{v})=(\vec{u}\,;\,\vec{v})+\pi$.

Les preuves seront faites en classe.

7.2 Trigonométrie, premières notions

7.2.1 Cosinus et sinus d'un angle orienté

Sauf indication contraire, l'unité utilisée est le radian. Le plan orienté est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$; on considère le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O.

Définition 7.7 (Cosinus et sinus d'un réel)**.** Pour tout réel x, il existe un point M unique du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ tel que x soit une mesure de $\left(\overrightarrow{\imath}\,;\overrightarrow{OM}\right)$.

- L'abscisse du point M est le cosinus de x (noté $\cos x$).
- L'ordonnée du point M est le sinus de x (noté $\sin x$)

Définition 7.8 (Cosinus et sinus d'un angle orienté)**.** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Le cosinus (resp. le sinus) de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u};\vec{v})$ est le cosinus (resp. le sinus) de l'une quelconque de ses mesures. On note $\cos(\vec{u};\vec{v})$ et $\sin(\vec{u};\vec{v})$.

Lien entre cosinus de l'angle orienté et cosinus de l'angle géométrique

Notons α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et notons x la mesure principale de $(\vec{u};\vec{v})$. On a $\alpha = |x|$. Deux cas se présentent :

- si $x \geqslant 0$, $|x| = x$ et par suite $\cos\alpha = \cos x$;
- si $x \leqslant 0$, $|x| = -x$ et par suite $\cos\alpha = \cos(-x) = \cos x$

On a donc $\cos(\vec{u};\vec{v}) = \cos(\widehat{AOB})$.
Ce n'est pas vrai pour le sinus : $\sin(\widehat{AOB}) = |\sin(\vec{u};\vec{v})|$

7.2.2 Rappels

Propriété 7.4 (fondamentale)**.**

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Propriété 7.5 (Sinus et cosinus des angles usuels)**.**

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

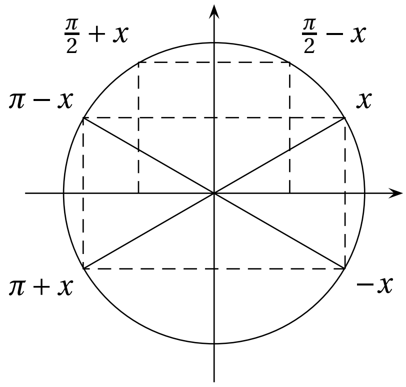
7.2.3 Lignes trigonométriques

Les formules ci-dessous sont vraies pour tout réel x, mais pour faciliter la mémorisation, on se place dans le premier cadran. Elles seront démontrées plus tard dans l'année.

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\sin(\pi - x) = \sin x$



$\cos(\pi + x) = -\cos x$
$\sin(\pi + x) = -\sin x$

$\cos(-x) = \cos x$
$\sin(-x) = -\sin x$

7.2.4 Équations trigonométriques

Il s'agit dans ce chapitre d'apprendre à résoudre dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ des équations en x comportant un cosinus ou un sinus, c'est-à-dire à trouver tous les x de l'intervalle I vérifiant ce type d'équations.

Équations se ramenant à $\cos x = \alpha$ **ou** $\sin x = \beta$

$\cos x = \alpha$

Propriété 7.6. *Soit une équation de la forme* $\cos x = \alpha$.
Si on trouve un a tel que $\cos a = \alpha$ *alors l'équation est équivalente à l'équation* $\cos x = \cos a$ *et les solutions de l'équation sont les réels* $a + k \times 2\pi$ *et les réels* $-a + k \times 2\pi$, *où k entier quelconque.*

On l'admettra (des éléments de preuve seront donnés en classe).

On ne peut donc résoudre ce type d'équation que si l'on connait un réel a particulier tel que $\cos a = \alpha$.

$\sin x = \beta$

Propriété 7.7. *Soit une équation de la forme* $\sin x = \beta$.
Si on trouve un b tel que $\sin b = \beta$ *alors l'équation est équivalente à l'équation* $\sin x = \sin b$ *et les solutions de l'équation sont les réels* $b + k \times 2\pi$ *et les réels* $\pi - b + k \times 2\pi$, *où k entier quelconque.*

On l'admettra (des éléments de preuve seront donnés en classe).

On ne peut donc résoudre ce type d'équation que si l'on connait un réel b particulier tel que $\sin b = \beta$.

Équations se ramenant à $\cos(px) = \alpha$ **ou** $\sin(px) = \beta$

p est un réel quelconque différent de 0.
La méthode est la même jusqu'à obtenir $px \equiv c \pmod{2\pi}$ ou bien $px = c + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
On a alors $x \equiv \frac{c}{p} \pmod{\frac{2\pi}{p}}$ ou bien $x = \frac{c}{p} + k \times \frac{2\pi}{p}, k \in \mathbb{Z}$.
Les solutions ne sont donc plus « à un certain nombre de tours près ».

Exemple. Résoudre l'équation $\cos(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$:

1. dans $\mathbb{R}$;
2. dans $[0; 2\pi]$;
3. dans $]-\pi; \pi]$.

1. On sait que $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. On a donc :

$$\begin{array}{rcl}
\cos(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} & \Leftrightarrow & \cos(2x) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\
& \Leftrightarrow & 2x \equiv \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi} \text{ ou } 2x \equiv -\frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi} \\
& \text{ou bien} & 2x = \frac{3\pi}{4} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } 2x = -\frac{3\pi}{4} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z} \\
& \Leftrightarrow & x \equiv \frac{3\pi}{8} \pmod{\pi} \text{ ou } x \equiv -\frac{3\pi}{8} \pmod{\pi} \\
& \text{ou bien} & x = \frac{3\pi}{8} + k \times \pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = -\frac{3\pi}{8} + k \times \pi, k \in \mathbb{Z}
\end{array}$$

Remarque. Les solutions obtenues sont « à un certain nombre de demis-tours près ».

L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions est donc

$$\mathscr{S} = \left\{x \equiv \frac{3\pi}{8} \pmod{\pi}, x \equiv -\frac{3\pi}{8} \pmod{\pi}\right\}$$

ou bien

$$\mathscr{S} = \left\{x = \frac{3\pi}{8} + k \times \pi, x = -\frac{3\pi}{8} + k \times \pi, \forall k \in \mathbb{Z}\right\}$$

2. x n'est solution que si $x \in \mathscr{S} \cap [0; 2\pi]$.
Un petit tableau peut nous y aider :

k	...	-2	-1	0	1	2	3	...
$\frac{3\pi}{8} + k \times \pi$	...	$-\frac{13\pi}{8}$	$-\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{19\pi}{8}$	$\frac{27\pi}{8}$	...
$-\frac{3\pi}{8} + k \times \pi$	...	$-\frac{17\pi}{8}$	$-\frac{11\pi}{8}$	$-\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{21\pi}{8}$	...

Comme $[0; 2\pi] = \left[0; \frac{16\pi}{8}\right]$, l'ensemble $\mathscr{S}'$ des solutions est donc

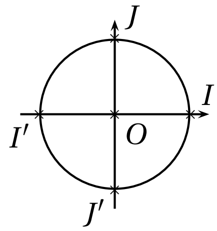
$$\mathscr{S}' = \left\{\frac{3\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}\right\}$$

3. x n'est solution que si $x \in \mathscr{S} \cap]-\pi; \pi]$.
Comme $]-\pi; \pi] = \left]-\frac{8\pi}{8}; \frac{8\pi}{8}\right]$, d'après le tableau précédent, l'ensemble $\mathscr{S}''$ des solutions est donc

$$\mathscr{S}'' = \left\{-\frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right\}$$

7.3 Exercices

7.3.1 Angles orientés



Dans tous les exercices le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ orthonormé direct.
Sauf définition particulière propre à un exercice, les points I, J, I', J' sont les points tels que $\overrightarrow{OI}=-\overrightarrow{OI'}=\vec{\imath}$, $\overrightarrow{OJ}=-\overrightarrow{OJ'}=\vec{\jmath}$.

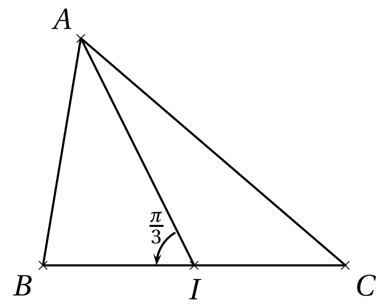
EXERCICE 7.2.
On considère les points A, B, C et D du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ associés, respectivement, aux réels $\frac{37\pi}{6}$, $\frac{29\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{5\pi}{12}$.

1. Déterminer les mesures principales des angles orientés $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OA}\right)$ et $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OB}\right)$.
2. Démontrer que $(OA)\perp(OC)$.
3. Déterminer les mesures principales des angles orientés $\left(\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right)$.
4. Préciser une mesure en degré de l'angle $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}\right)$

EXERCICE 7.3.
Sur un cercle trigonométrique $\mathscr{C}$, on considère les points A et B tels que $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)=\frac{5\pi}{6}$ et $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)=-\frac{2\pi}{3}$.
Déterminer la mesure principale des angles suivants :

1. $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OJ'}\right)$;
2. $\left(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OB}\right)$;
3. $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$;
4. $\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{OB}\right)$;
5. $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{BO}\right)$;
6. $\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{BO}\right)$;
7. $\left(2\overrightarrow{OA};-3\overrightarrow{OB}\right)$.

EXERCICE 7.4.



ABC est un triangle et I est le milieu de $[BC]$. On sait que $\left(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}\right)=\frac{\pi}{3}$.
Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants (on justifiera par le calcul et on ne s'autorisera pas les lectures graphiques) :

1. $\left(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{IB}\right)$;
2. $\left(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{IC}\right)$;
3. $\left(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{CB}\right)$.

EXERCICE 7.5.
$ABCD$ est un carré orienté dans le sens direct.
E et F sont les points tels que CBE et ABF sont des triangles équilatéraux orientés dans le sens direct.
Le but de cet exercice est de prouver que les points D, E et F sont alignés, à l'aide des angles orientés.

1. Faire un dessin.
2. (a) Montrer que $\left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{6}$.
   (b) En déduire que $\left(\overrightarrow{FD};\overrightarrow{FA}\right)=\frac{5\pi}{12}$.
3. (a) Montrer que $\left(\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BF}\right)=\frac{\pi}{2}$.
   (b) En déduire que $\left(\overrightarrow{FB};\overrightarrow{FE}\right)=\frac{\pi}{4}$.
4. Montrer que $\left(\overrightarrow{FD};\overrightarrow{FE}\right)=\pi$. Conclure.

7.3.2 Trigonométrie

EXERCICE 7.6.
Après avoir placé les points du cercle trigonométrique correspondant aux nombres réels suivants, déduire graphiquement les valeurs exactes de leurs cosinus et sinus :

- $\frac{17\pi}{4}$
- $\frac{14\pi}{3}$
- $\frac{19\pi}{6}$
- $-\frac{21\pi}{2}$

EXERCICE 7.7.
En vous aidant éventuellement du cercle trigonométrique, compléter les tableaux suivants avec les valeurs exactes :

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{-8\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{3}$	$\frac{-28\pi}{3}$
$\cos x$							
$\sin x$							

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{-11\pi}{4}$	$\frac{19\pi}{4}$	$\frac{31\pi}{4}$
$\cos x$							
$\sin x$							

EXERCICE 7.8.
Déterminer les valeurs exactes de $\sin\frac{31\pi}{6}$ et $\cos\frac{31\pi}{6}$.

EXERCICE 7.9.
On donne $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
Déterminer les valeurs exactes de $\sin\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{3\pi}{5}$, $\sin\frac{3\pi}{5}$, $\cos\frac{\pi}{10}$ et $\sin\frac{\pi}{10}$.

EXERCICE 7.10.
Simplifier les expressions suivantes :

$A = \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

$B = \sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(-x)$

$C = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

$D = \sin(\pi + x) + \cos(\pi + x) - \sin(-x)$

$E = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(-x)$

EXERCICE 7.11.
Calculer, sans utiliser la calculatrice :

$A = \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{7\pi}{4}$

$B = \cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} - \cos\frac{5\pi}{3}$

$C = \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{7\pi}{6} + \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$D = \sin\frac{\pi}{2} - \cos\pi + \sin\frac{3\pi}{2}$

$E = \cos\frac{7\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4}$

$F = \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$G = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\frac{\pi}{3} + 1$

EXERCICE 7.12.
Résoudre les équations suivantes :

1. Dans $\mathbb{R}$: $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
2. Dans $]-2\pi\,;2\pi]$: $\sin x = -\sin\frac{\pi}{4}$;
3. Dans $]-\pi\,;\pi]$: $\sin x = \cos\frac{\pi}{6}$;
4. Dans $\mathbb{R}$: $\sin x = 0$;
5. Dans $\mathbb{R}$: $\cos x = 0$;
6. Dans $\mathbb{R}$: $\cos x = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;
7. Dans $\mathbb{R}$: $\cos x = -\cos\frac{\pi}{4}$;
8. Dans $\mathbb{R}$: $\sin x = \frac{1}{2}$;
9. Dans $\mathbb{R}$: $\sin x = -\cos\frac{\pi}{4}$;
10. Dans $]-\pi\,;\pi]$: $(\sin x+1)(\cos x-1)=0$;
11. Dans $]-\pi\,;\pi]$: $\cos^2 x = 1$;
12. Dans $[0\,;2\pi]$: $2\sin^2 x+\sin x-1=0$;
13. Dans $]-\pi\,;\pi]$: $4\cos^2 x-3=0$;
14. Dans $]-\pi\,;\pi]$: $\sin^2 x-\sin x=0$.

EXERCICE 7.13.
Pour chacune des équations suivantes :

1. les résoudre dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des réels x vérifiant l'équation ;
2. placer sur le cercle trigonométrique les points M tels que $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OM}\right)=x$;
3. donner les mesures principales des solutions.

1. $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
2. $\cos 3x = 0$;
3. $\cos 4x = -1$;
4. $\cos x = 2$;
5. $\sin 2x = -\frac{1}{2}$;
6. $\sin 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
7. $\sin\frac{x}{2} = 0$;
8. $\sin 6x = -4$;
9. $\cos 2x = \cos x$;
10. $\cos 2x = \cos(3x+\pi)$;
11. $\sin 3x = \sin x$;
12. $\sin x = \sin\frac{x}{3}$;
13. $\cos 2x = \sin 3x$;
14. $\cos x = -\sin 2x$;
15. $\sin 4x = -\cos 2x$;
16. $\tan x = \sqrt{3}$;
17. $\tan 2x = 1$;
18. $\tan\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$;
19. $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.