Nom : *Jeudi 4 mai 2017 – 1h*

Devoir surveillé n°8

Produit scalaire – Variables aléatoires

EXERCICE 8.1 (3 points)**.**
Lors d'une semaine promotionnelle, un cinéma propose l'attraction suivante :
Chaque spectateur passe sous un portique électronique et :

- il s'éclaire en vert une fois sur dix, permettant au spectateur de bénéficier d'une entrée gratuite ;
- il s'éclaire en bleu une fois sur cinq, offrant au spectateur une entrée à demi-tarif ;
- il s'éclaire en rouge le reste du temps, le spectateur devant alors s'acquitter des 8 euros du billet plein tarif.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque spectateur, associe le prix de son entrée en euros.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de X et en donner une interprétation.

EXERCICE 8.2 (7,5 points)**.**
Une urne contient 5 boules rouges et $n-5$ boules noires où $n \geqslant 6$.
Un joueur tire au hasard, successivement et sans remise, deux boules de l'urne.
Le joueur gagne 2 euros s'il tire deux boules de couleurs différentes et perd 1 euro sinon.

1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation.
2. On note G la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur ; déterminer la loi de probabilité de G.
3. Montrer que $E(G)$, l'espérance mathématique de G, est :

$$E(G) = \frac{-n^2+31n-150}{n^2-n}$$

4. Déterminer la composition de l'urne pour que le jeu soit équitable, c'est-à-dire que ni le joueur, ni l'organisateur ne soient avantagés.
5. Déterminer la composition de l'urne pour que l'organisateur soit avantagé.

EXERCICE 8.3 (9,5 points)**.**
Un repère est fourni plus bas; il est conseillé d'y placer les points rencontrés au fur et à mesure de l'exercice, ce qui permet de vérifier ses résultats, mais ce n'est pas exigé.

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Soit les points $A(-1;1)$, $B(3;5)$, $C(3;-1)$.
Soit $I(1;3)$, $J(3;2)$ et $K(1;0)$ les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.

1. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{D}$, la hauteur issue de B du triangle ABC.
2. Soit $H(1;1)$.
   (a) Montrer que H appartient à $\mathscr{D}$.
   (b) Montrer que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.
   (c) En déduire la nature de H.
3. Soit $A'(5;3)$.
   (a) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ et de diamètre $[AA']$.
   (b) Montrer que les points B et C appartiennent à $\mathscr{C}$.
   (c) En déduire la nature de ce cercle.
4. On suppose pour la suite qu'une (autre) équation cartésienne de $\mathscr{C}$ est

$$\mathscr{C} : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 10$$

   (a) Montrer que le symétrique de H par rapport à J est A'.
   (b) Déterminer les coordonnées de B', symétrique de H par rapport à K et montrer que B' est aussi sur le cercle.
   (c) Mêmes questions pour C', symétrique de H par rapport à I.
   (d) On admettra que cela est toujours vrai. Énoncer alors la propriété.