Nom : *Jeudi 16 février 2017 – 2h*

Devoir surveillé n°7

Dérivation – Statistiques – Produit scalaire

QUESTION DE COURS (3 points)**.**
Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(x\,;\,y)$ et $(x'\,;\,y')$.
On pose $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.
Montrer que $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

EXERCICE 7.1 (6 points)**.**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par :

$$f : x \longmapsto \frac{x^2-4x+4}{x-3}$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ et on nomme f' sa fonction dérivée.
   (a) Montrer que
   $$f' : x \longmapsto \frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$$
   (b) Déterminer le tableau des variations de f en justifiant.
   On indiquera les valeurs exactes des extremums.
2. Déterminer les coordonnées des éventuels points de la courbe où la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses.
3. La droite $\mathscr{D}$ est d'équation réduite $y = x - 1$.
   (a) Déterminer les abscisses des éventuels points de la courbe où la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à $\mathscr{D}$.
   (b) Déterminer les positions relatives de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ selon les valeurs de x.

EXERCICE 7.2 (4 points)**.**
Un éditeur doit produire un livre avec les contraintes suivantes :
- sur chaque page, le texte imprimé doit être contenu dans un rectangle de 300 cm^2 ;
- les marges gauche et droite doivent mesurer 1,5 cm alors que les marges haut et bas doivent mesurer 2 cm.

Un exemple est donné avec la figure 7.1 en annexe.

Le but de l'exercice est de déterminer quelles doivent être les dimensions de la page pour que la consommation de papier soit minimale.

On note x et y les dimensions de la page et $\mathscr{S}(x) = xy$ la surface de la page.

1. À l'aide des données de l'énoncé, démontrer que :
   $$y = \frac{288+3x}{x-4}$$
2. En déduire une expression de $\mathscr{S}(x)$ uniquement en fonction de x et préciser son ensemble de définition.
3. Après avoir étudié $\mathscr{S}$, répondre au problème posé.

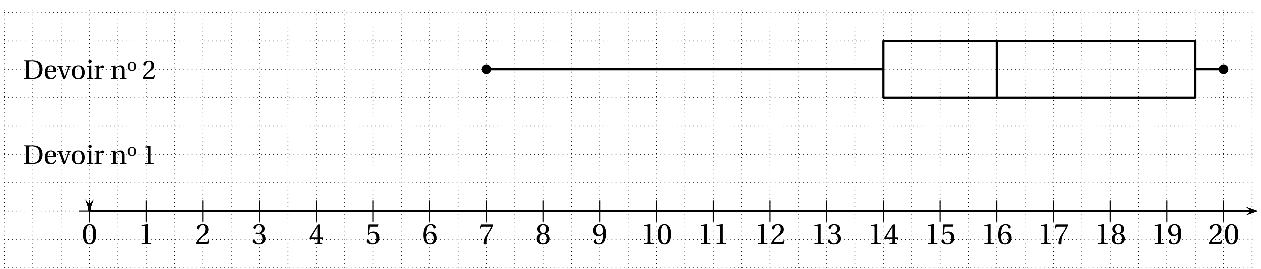
EXERCICE 7.3 (6 points)**.**
Le tableau suivant donne les résultats (arrondis au point supérieur) obtenus par une classe de Seconde lors d'un devoir, dit *devoir n^o^ 1*, en mathématiques :

Notes x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectifs n_i	0	0	1	2	3	0	2	7	2	2	0	1	0	2	0	1	3	1	3	4	1

1. (a) Déterminer la note moyenne $\overline{x}$, arrondie au dixième, et l'écart-type s, arrondi au centième, de cette série en détaillant brièvement les calculs (les pointillés sont autorisés dans la rédaction).

   (b) Déterminer la médiane m et les premier et troisième quartiles Q_1 et Q_3 de cette série en précisant la façon dont ils ont été obtenus.
2. Le professeur considère que si l'écart entre la moyenne et la médiane est supérieur à 0,75, alors il est important. Est-ce le cas ? Comment l'expliquer ?
3. (a) Représenter, sur la figure ci-dessous, le diagramme en boite de la série statistique correspondant au devoir n° 1.
   Sur cette figure, on a déjà représenté le diagramme en boite d'une série constituée des résultats d'un autre devoir, dit *devoir n° 2*, de mathématiques de cette Seconde.
   En vous basant sur ces diagrammes, comparer les résultats de cette classe à ces deux devoirs.

   (b) Le devoir n° 2 a une moyenne et un écart-type respectivement de $\overline{x}' \approx 16,0$ et $s' \approx 3,95$.
   Comparer les résultats des deux devoirs à l'aide de ces paramètres statistiques.
4. Question bonus : Les résultats des deux devoirs sont très différents, pourtant il s'agit de la même classe ; comment pourrait-on expliquer cette différence ?



EXERCICE 7.4 (7 points)**.**
$ABCD$ est un rectangle de centre O tel que $AB = 8$ cm et $AD = 6$ cm.

1. Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.
2. On désigne par α une mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.

   (a) En exprimant de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$, calculer la valeur exacte de $\cos\alpha$.

   (b) En déduire une valeur approchée par défaut à 1° près de α.
3. Soit I le milieu du segment $[OB]$. Déterminer la valeur exacte de AI.
   On pourra d'abord chercher AI^2.

EXERCICE 7.5 (4 points)**.**
$ABCD$ est un trapèze rectangle en A et en D tel que $AB = 4$, $CD = 3$ et $AD = h$. I est le milieu du segment $[AD]$.

1. Exprimer $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}$ en fonction de h.
2. En déduire s'il existe des valeurs de h pour lesquelles le triangle IBC est rectangle en I.

FIGURE 7.1: Exemple de page <u>à l'échelle un demi</u> de l'exercice 7.2

Le rectangle contenant le texte, en pointillés, est de dimension $15\,cm \times 20\,cm = 300\,cm^2$.