Devoir surveillé n°4

Généralités sur les fonctions – Géométrie analytique

L'énoncé est à rendre avec sa copie.
Penser à écrire son nom dessus.
Le barème n'est qu'indicatif (le devoir est noté sur 30 points).

QUESTION DE COURS (2 points)**.**
Soit u une fonction définie et positive sur un intervalle I.
Montrer que u et $\sqrt{u}$ ont les mêmes variations sur I.

EXERCICE 4.1 (6 points)**.**
Le plan est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On donne les points $A(1;4)$, $B(3;3)$, $C(5;2)$ et $D(4;1)$ et de droite $\mathscr{D}$ d'équation $x - y + 6 = 0$.

1. Démontrer que les droites (CD) et $\mathscr{D}$ sont parallèles.
2. Déterminer une équation de la droite (AB).
3. Démontrer que (AB) et $\mathscr{D}$ sont sécantes en un point E dont on déterminera les coordonnées.
4. Déterminer une équation de $\mathscr{D}'$, la parallèle à (CD) passant par B.

EXERCICE 4.2 (6 points)**.**
On donne ci-dessous le tableau des variations d'une fonction f définie sur $[-5;10]$:

x	-5	-3	2	5	10
Variations de f	3 ↘	-4 ↗	0 ↗	9 ↘	4

On sait par ailleurs que $f(-4) = 0$ et que $f(3) = 4$.

Partie A.
Pour chacune des fonctions suivantes :

(a) Donner son ensemble de définition. *On justifiera s'il n'est pas le même que celui de f.*

(b) Donner son tableau des variations. *On justifiera systématiquement.*

1. $g = f + 2$
2. $h = -f$
3. $k = \sqrt{f}$
4. $\ell = \frac{1}{f}$
5. $m = |f|$

Partie B.
Cette partie est en bonus (donc hors barème). Elle ne doit être traitée que lorsque que vous avez fini le reste.
Donner sans justifier le tableau des variations de la fonction $n = \sqrt{\left|\frac{1}{f-4}\right|}$.

EXERCICE 4.3 (11 points)**.**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par :

$$x \mapsto f(x) = \frac{x^2 - 3x}{-x+1}$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

Partie A.
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $x \mapsto h(x) = \frac{-2}{-x+1}$.
Montrer que h est une fonction décroissante $]1\,;+\infty[$.

On admettra pour la suite qu'elle est aussi décroissante sur $]-\infty\,;1[$.

Partie B.

1. (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $f(x) = -x+2-\frac{2}{-x+1}$
   (b) En déduire les variations de f sur chacun des intervalles sur lesquels elle est définie.
2. Déterminer les intersections de $\mathscr{C}$ avec chacun des axes du repère.
3. Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto k(x) = x-3$ et $\mathscr{D}$ sa courbe représentative.
   On appelle d la fonction $f-k$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $d(x) = \frac{2x^2-7x+3}{-x+1}$.
   (b) Étudier le signe de $d(x)$ selon les valeurs de x.
   (c) En déduire les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$ selon les valeurs de x.

EXERCICE 4.4 (5 points)**.**
Le plan est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
Les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ont pour équations respectives $3x-2y-8=0$ et $5x+4y-6=0$.
La droite Δ a pour équation : $2mx-(m+1)y-8=0$.
Comment choisir le réel m pour que ces trois droites soient concourantes ?