Chapitre 16

Compléments de trigonométrie

Sommaire

16.1 Rappels 169
16.2 Formules d'addition 170
16.3 Formules de duplication 170
16.4 Formules de linéarisation 170
16.5 Démonstrations des formules 170
16.6 Exercices 171

16.1 Rappels

On a déjà vu, en Seconde et lors du chapitre 7 sur les angles orientés, les propriétés suivantes.

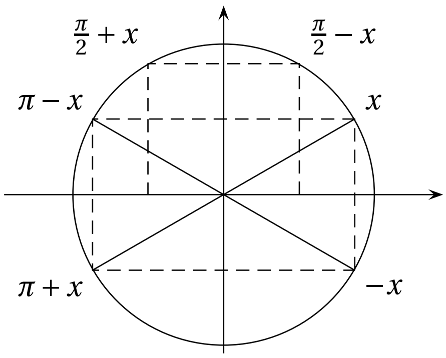
Relation fondamentale

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Sinus et cosinus d'angles particuliers

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Lignes trigonométriques



- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(\pi+x) = -\cos x$
- $\sin(\pi+x) = -\sin x$
- $\cos(\pi-x) = -\cos x$
- $\sin(\pi-x) = \sin x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$

Nous allons en démontrer certaines et voir qu'il en existe d'autres.

16.2 Formules d'addition

Propriété 16.1. *Pour tous réels a et b on a :*

- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

16.3 Formules de duplication

Propriété 16.2. *Pour tout réel a on a :*

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$
- $\sin(2a) = 2\sin a \cos b$

16.4 Formules de linéarisation

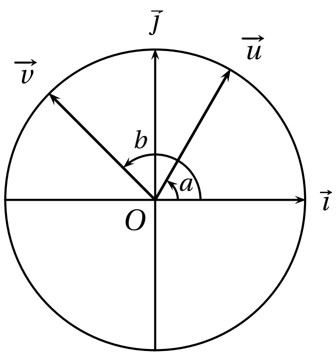
Propriété 16.3. *Pour tout réel a on a :*

- $\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$
- $\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$

16.5 Démonstrations des formules

Le point de départ de toutes les formules

Étudions la quantité $\cos(a-b)$ où a et b sont deux nombres réels.
Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ unitaires (c'est-à-dire de norme 1) et tels que $\left(\vec{\imath}\,;\vec{u}\right) = a$ et $\left(\vec{\imath}\,;\vec{v}\right) = b$ (voir le schéma).



On sait que $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right) = \left(\vec{u}\,;\vec{\imath}\right) + \left(\vec{\imath}\,;\vec{v}\right) = b-a$.
Or on a $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right) = \cos(b-a)$
donc $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \cos(b-a) = \cos(a-b)$ car $\cos x = \cos(-x)$.
On sait aussi que $\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}$.
Et donc $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
Ce qui nous donne la première formule de trigonométrie :

$$\boxed{\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b}$$

De celle-ci on va déduire toutes les autres (les preuves seront faites en classe).

16.6 Exercices

EXERCICE 16.1.
Démontrer les formules des lignes trigonométriques.

EXERCICE 16.2.
Montrer que, pour tous réels a et b : $\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$

EXERCICE 16.3.
En utilisant les formules d'addition, calculer la valeur exacte de $\sin\frac{7\pi}{12}$ et $\cos\frac{7\pi}{12}$.
On pourra utiliser l'égalité $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$.

EXERCICE 16.4.
Calculer la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\cos\frac{\pi}{12}$ puis celle de $\tan\frac{\pi}{12}$.

EXERCICE 16.5.
Montrer que, pour tout réel x : $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)$

EXERCICE 16.6.
Montrer que, pour tout réel x différent de $k\frac{\pi}{2}$, où $k \in \mathbb{Z}$: $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$

EXERCICE 16.7.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $2\sin^3 x - 17\sin^2 x + 7\sin x + 8 = 0$;
- $2\cos^3 x - 7\cos^2 x + 3 = 0$;
- $2\sin^3 x + \cos^2 x - 5\sin x - 3 = 0$.

EXERCICE 16.8.
Dans cet exercice, on dispose de la donnée suivante : $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.
On rappelle que $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ pour tout $x \in D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

1. Démontrer que pour tout $x \in D$: $\tan(\pi + x) = \tan x$. En déduire la valeur exacte de $\tan\frac{9\pi}{8}$.
2. Démontrer que pour tout $x \in D$: $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$. En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$ puis de $\sin\frac{\pi}{8}$.
3. Calculer la valeur exacte de $\cos\frac{5\pi}{8}$.

EXERCICE 16.9.
Dans cet exercice, on dipose de la donnée suivante : $\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

1. Soit $x \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$. Démontrer que $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$.
2. En déduire que $\tan\frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$.

EXERCICE 16.10.
Dans cet exercice on donne : $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Calculer la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$ puis de $\cos\frac{3\pi}{5}$

EXERCICE 16.11.
Démontrer que, pour tout $x \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$: $\tan x = \frac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)}$. En déduire les valeurs exactes de $\tan\frac{\pi}{8}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.

EXERCICE 16.12.
ABC est un triangle non rectangle.

1. Démontrer que $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$.
2. Démontrer que $\tan(A+B) = -\tan C$.
3. En déduire la relation : $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \times \tan B \times \tan C$