Chapitre 14

Relations métriques dans le triangle

Sommaire

Certaines propriétés en rapport avec les équations cartésiennes de droite ou de cercle (vues au paragraphe 10.3) étaient les premières applications du produit scalaire.
D'autres applications du produit scalaire sont regroupées dans le présent chapitre.

La plupart des démonstrations nécessitent d'avoir traité le chapitre 10 sur le produit scalaire.

14.1 Formules de la médiane

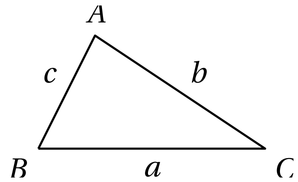
Théorème 14.1 (Formules de la médiane)**.** *Soit A et B deux points quelconques du plan et I le milieu du segment $[AB]$.*
Alors, pour tout point M du plan on a :
- $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$;
- $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$;
- $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$.

Remarques.
- La droite (MI) étant, pour le triangle MAB, la médiane issue de A, ces formules sont appelées *formules de la médiane*.
- Ces formules ne sont pas à apprendre, par contre on doit savoir les retrouver en utilisant les carrés scalaires (voir la preuve ci-dessous).
- Ces formules sont particulièrement utiles quand on cherche tous les points M vérifiant, par exemple, $MA^2 + MB^2 = 4$ puisqu'elles permettent de passer d'une expression à deux inconnues (MA et MB) à une expression à une inconnue (MI).

La preuve du premier point sera faite en classe, les autres démonstrations sont du même type et seront traitées en exercice.

14.2 Formule d'AL-KASHI

Dans ce paragraphe et dans les suivants, on parle d'un triangle ABC non aplati dont on note les longueurs $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$ et S son aire.



Théorème 14.2 (Formule d'AL-KASHI)**.** *Avec les conventions de notations vues plus haut, on a*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$

La preuve sera faite en classe.

Remarques.

- Si le triangle est rectangle en A, on retrouve le théorème de PYTHAGORE qui n'en est qu'un cas particulier. La formule d'AL-KHASI s'appelle aussi *Pythagore généralisé.*
- En permutant les côtés et les angles, on a aussi :
  - $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$;
  - $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$.

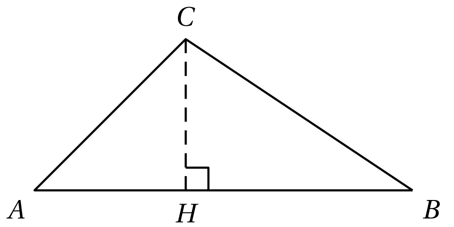
14.3 Formule de l'aire

Propriété 14.3 (Formule de l'aire)**.** *Avec les conventions de notations vues plus haut :*

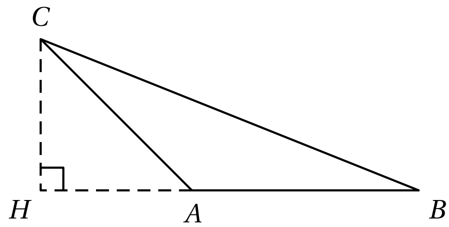
$$S = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$$

Preuve. Deux situations sont à considérer :

Situation 1
(triangle *acutangle*)



Situation 2
(triangle *obtusangle*)



L'aire du triangle est donnée par : $S = \frac{1}{2}AB \times CH$.
Or $CH = AC\sin\widehat{A}$ (situation 1) ou $CH = AC\sin\left(\pi - \widehat{A}\right) = AC\sin\widehat{A}$ (situation 2).
Dans les deux cas, $S = \frac{1}{2}AB \times AC\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$.
En permutant, on obtient les deux autres égalités. ◊

14.4 Formule des sinus

Propriété 14.4 (Formule des sinus)**.** *Avec les conventions de notation vues plus haut :*

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$$

Preuve. D'après ce qui précède, on a : $S = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$.
En multipliant par $\frac{2}{abc}$, on obtient $\frac{2S}{abc} = \frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c}$.
Le triangle étant non aplati, les angles sont non nuls et les sinus de ces angles aussi, on peut donc inverser ces quotients : $\frac{abc}{2S} = \frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$ ◊

Exemple. Soit ABC un triangle tel que $c = AB = 5$ cm, $\widehat{A} = 40°$ et $\widehat{B} = 30°$.
Alors $\widehat{C} = 180 - 40 - 30 = 110°$et, comme $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$, on obtient $\frac{a}{\sin 40} = \frac{b}{\sin 30} = \frac{5}{\sin 110}$ puis $a \approx 3,42$ cm et $b \approx 2,66$ cm.

14.5 Formule de HÉRON

Propriété 14.5 (Formule de HÉRON)**.** *Avec les conventions de notations vues plus haut et en notant p le demi-périmètre du triangle ($2p = a + b + c$), on a :*

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

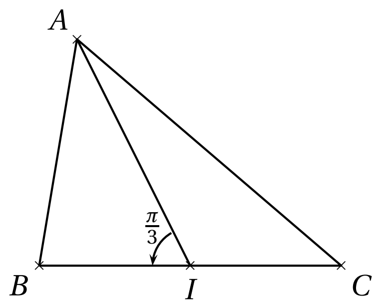
On l'admettra.

14.6 Exercices

EXERCICE 14.1.
Démontrer les deuxième et troisième formules de la médiane.

EXERCICE 14.2.
ABC est un triangle et I est le milieu de $[BC]$. On sait que $\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}\right) = \frac{\pi}{3}$ et que $BI = CI = 2$ et $AI = 3$
Calculer :

1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$;
2. $AB^2 + AC^2$;
3. $AB^2 - AC^2$;
4. AB et AC.



EXERCICE 14.3.
$[AB]$ est un segment de milieu I et $AB = 2$ cm.

1. Montrer que pour tout point M du plan : $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$
2. Trouver et représenter l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 = 14$.

EXERCICE 14.4.
$ABCD$ est un parallélogramme de centre I tel que $AB = 7$, $AD = 5$ et $BD = 8$.

1. Montrer que $AB^2 + AD^2 = 2AI^2 + 2ID^2$. En déduire AC.
2. En déduire les mesures des angles du parallélogramme à 1° près.
3. En déduire l'aire de $ABCD$.

EXERCICE 14.5.
ABC est un triangle tel que $a = 2$, $b = 3$ et $c = 4$. Calculer la valeur exacte de l'aire S de ABC.

EXERCICE 14.6.
ABC est un triangle tel que $b = 3$, $c = 8$ et $\widehat{A} = 60°$. Calculer la valeur exacte de a ainsi que les mesures de $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ (en degrés à 10^{-1} près).

EXERCICE 14.7.
ABC est un triangle tel que $b = 6\sqrt{2}$, $\widehat{A} = 105°$ et $\widehat{C} = 45°$. Calculer les valeurs exactes de a et c.

EXERCICE 14.8.
ABC est un triangle tel que $BC = 4$, $\widehat{B} = \frac{\pi}{4}$ rad et $\widehat{C} = \frac{\pi}{3}$ rad.

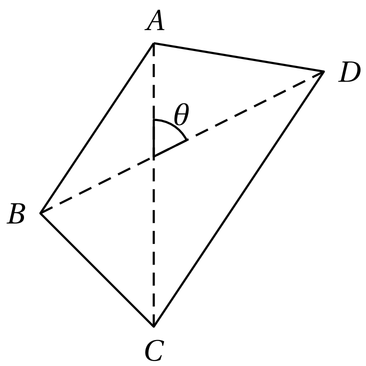
1. Montrer que $\sin\widehat{A} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
2. Calculer les valeurs exactes de AB et AC.
3. Calculer la valeur exacte de l'aire de ABC

EXERCICE 14.9.
ABC est un triangle tel que $S = 5$ cm^2, $c = AB = 13$ cm et $b = AC = 2$ cm. Calculer la (ou les) longueur(s) possible(s) du troisième côté $a = BC$.

EXERCICE 14.10.
ABC est un triangle tel que $AB = 7$, $AC = 4$ et $\widehat{A} = 60^\circ$.

1. Calculer la valeur exacte de BC.
2. Calculer la valeur exacte de $\sin\widehat{B}$.

EXERCICE 14.11.
$ABCD$ est un quadrilatère convexe. On note θ l'angle entre ses deux diagonales (AC) et (BD). Démontrer que l'aire S du quadrilatère $ABCD$ est donnée par :



$$S = \frac{1}{2} \times AC \times BD \sin\theta$$

EXERCICE 14.12.
Un promeneur marche 5 km en direction de l'Est, puis 2 km en direction du Nord-Est. Surpris par le mauvais temps, il retourne directement à son point de départ en courant.
Sur quelle distance d a-t-il couru ? (On donnera la valeur exacte, puis la valeur approchée arrondie à 10 m).

EXERCICE 14.13.
Montrer que « ABC est un triangle rectangle en $A \Leftrightarrow \sin^2\widehat{A} = \sin^2\widehat{B} + \sin^2\widehat{C}$ ».