Chapitre 11

Variables aléatoires

Sommaire

11.1 Activités

ACTIVITÉ 11.1 (Fille ou garçon)**.**
On se propose d'utiliser le tableur pour résoudre le problème suivant :
« Monsieur X est invité chez des nouveaux amis qu'il sait très joueurs mais qu'il connait à peine. Au cours de la conversation il apprend que ses nouveaux amis ont deux enfants mais il oublie de demander leur sexe. Soudain l'un de ces deux enfants entre dans la salle. Il s'agit d'un garçon.
"– Vous avez donc un garçon et ...? demande-t-il
– Je parie que tu ne devineras pas. Sur quoi mises-tu? un gars? une fille?"
Sur quoi doit miser monsieur X pour maximiser ses chances de clore le bec à ces amis un peu lourds avant de prendre congé? »

On suppose pour simplifier les choses qu'un enfant sur deux qui nait est une fille et l'autre un garçon.

1. Que *conjecturez-vous* a priori quant au sexe de l'autre enfant?
2. On se propose d'utiliser la colonne A pour simuler le sexe du premier enfant, la colonne B pour celui du second enfant et la colonne C pour compter le nombre de garçons.

Proposer une formule utilisant la fonction ALEA (ou ALEA.ENTRE.BORNES avec Calc) permettant de simuler le sexe d'un enfant dans les cases A1 et B1 et une formule adaptée pour compter le nombre de garçons de la fratrie dans la case C1.
Demander au professeur de valider les deux formules avant d'aller plus loin.

3. « Tirer la poignée » verticalement de façon à simuler 100 familles de deux enfants.
4. Dans la plage F4 : J5 dresser un tableau de la forme suivante :

Nombre de garçons	0	1	2	total
Effectif				

où les cases *Effectif* seront automatiquement complétées par le tableur (utiliser la fonction NB.SI)

5. En appuyant plusieurs fois sur la touche F9 (Excel) ou CTRL+MAJ+F9 (Calc), indiquer autour de quels effectifs semblent osciller les types de famille.
6. Puisque l'un des enfants est un garçon, quel type de famille doit-on exclure ?
En observant les types de famille restants, déterminer sur quel sexe doit miser Monsieur X et dans quelle proportion il a des chances de gagner son pari.
Votre conjecture est-elle validée ?

ACTIVITÉ 11.2 (Arbres pondérés)**.**
On dispose :

- d'une urne contenant quatre boules insdiscernables au toucher dont trois boules bleues portant respectivement les numéros 1, 2 et 3, notées b_1, b_2 et b_3, et une boule rouge unique, notée r ;
- d'un jeu de six cartes identiques portant chacun un chiffre en couleur : une carte avec un chiffre 1 en vert, une carte avec un chiffre 2 en rouge, une carte avec un chiffre 2 en bleu, une carte avec un chiffre 2 en vert, une carte avec un chiffre 3 en rouge et une carte avec un chiffre 3 en bleu.

On considère l'expérience aléatoire suivante : « On prélève de façon équiprobable une boule dans l'urne puis une carte du jeu. On note, dans l'ordre, la couleur de la boule extraite et le numéro inscrit sur la carte ».

On note Ω l'ensemble de toutes issues possibles et $p(A)$ la probabilité d'un évènement A.

1. Construire l'arbre des possibles et en déduire Ω. Est-on dans une situation qu'équiprobabilité ?
2. (a) Construire un arbre, que nous appelerons « modèle intermédiaire », qui prenne en compte, pour la boule extraite, non seulement sa couleur mais aussi son numéro et, pour la carte, non seulement le numéro mais aussi sa couleur.
   (b) A-t-on équiprobabilité entre chacun des chemins ?
   (c) En déduire les probabilités de chacun des évènements élémentaires de Ω.
   O*n présentera les résultats sous forme de tableau du type :*

ω_i	ω_1	ω_2	...
$p(\omega_i)$	$p(\omega_1)$	$p(\omega_2)$	...

   Remarque. Lorsqu'on détermine pour chaque évènement élémentaire sa probabilité, on dit qu'on décrit la loi de probabilité.
3. L'arbre du modèle intermédiaire, nous ramenant à une situation d'équiprobabilité, nous a permis de décrire la loi de probabilité. Cependant il est un peu lourd. Essayons de l'alléger.
   (a) Refaire l'arbre des possibles en ajoutant devant chaque éventualité des branches multiples : autant qu'on en peut trouver sur le modèle intermédiaire qui mènent à cette éventualité.

(b) Refaire l'arbre des possibles de la manière suivante :

i. Remplacer ces branches multiples par des branches simples mais en indiquant le nombre de branches qu'il devrait y avoir. On obtient alors un arbre pondéré (chaque branche ayant un poids).

ii. Combien de chemins du modèle intermédiaire terminaient sur l'évènement élémentaire $(r,2)$? Comment pourrait-on retrouver ce nombre à partir de l'arbre précédent ?

(c) Refaire l'arbre des possibles de la manière suivante :

i. Pondérer chaque branche, non plus avec le nombre de branches multiples qu'il devrait y avoir, mais avec le quotient de ce nombre par le nombre total de branches qu'il devrait y avoir à ce même niveau.

ii. Quelle est la probabilité de l'évènement élémentaire $(r,2)$? Comment pourrait-on retrouver cette probabilité à partir de l'arbre précédent ?

ACTIVITÉ 11.3 (Loi des grands nombres)**.**
On donne l'algorithme suivant, écrit en langage courant :

```
ENTREES
  FACE, LANCERS : Nombres entiers naturels
INITIALISATION
  EFFECTIF prend la valeur 0
INSTRUCTIONS
  Pour K variant de 1 a Lancers faire :
    DE prend la valeur nombre_aleatoire_entre_1_et_6
    Si DE = FACE alors EFFECTIF prend la valeur EFFECTIF +1
  Fin Pour
  FREQUENCE = EFFECTIF / LANCERS
SORTIE
  FREQUENCE
```

On se propose de l'étudier puis de l'étoffer et enfin de le modifier pour qu'il fasse autre chose.

Partie A : Étude de l'algorithme

1. Que fait cet algorithme ?
2. Le programmer sur Algobox et le faire fonctionner pour la face de votre choix, en faisant plusieurs essais à chaque fois, avec :
   - $Lancers = 10$
   - $Lancers = 100$
   - $Lancers = 1\,000$
   - $Lancers = 10\,000$

   Qu'observe-t-on ?
3. (a) Le modifier pour qu'il calcule la *fréquence* d'apparition de la *face* à chaque valeur de k et affiche dans un repère le point d'abscisse k et d'ordonnée la *fréquence* nouvellement calculée.

   (b) Le faire fonctionner pour un certain nombre de lancers, comme à la question 2. Qu'observe-t-on ?

Partie B : Modification de l'algorithme
Modifier l'algorithme pour qu'il affiche :

1. D'abord, en seule sortie, à la place de la *fréquence* de l'algorithme originel, la *moyenne* des résultats obtenus après un certain nombre de *lancers*; le faire fonctionner pour un certain nombre de lancers, comme à la question 2 ; qu'observe-t-on ?

2. Ensuite, comme dans la partie précédente, dans un repère, pour chaque valeur de k, le point d'abscisse k et d'ordonnée la *moyenne* nouvellement calculée; le faire fonctionner pour un certain nombre de lancers, comme à la question 2; qu'observe-t-on?

Partie C : Une situation
On s'intéresse à la situation suivante : « On lance un dé à 6 faces, équilibré, et on marque :
- Un point si on obtient 1 au dé;
- Deux points si on obtient 2 au dé;
- Trois points si on obtient 3 ou 4 au dé;
- Quatre points si on obtient 5 ou 6 au dé ».

On cherche à estimer le nombre de points qu'on peut espérer obtenir en moyenne.

1. Modifier l'algorithme précédent pour qu'il puisse simuler la situation et le faire fonctionner pour conjecturer le nombre de points qu'on obtient en moyenne.
2. (a) Décrire l'univers des possibles Ω et la loi de probabilité.

   (b) Sur un grand nombre de lancers, vers quelle fréquence va tendre chacun des évènements élémentaires?

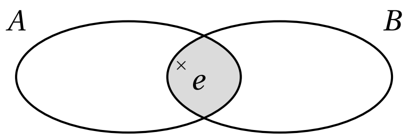
   (c) En déduire vers quelle valeur va tendre la moyenne.

11.2 Rappels

Ce paragraphe ne comportant que des rappels de Seconde, les exemples seront limités et les preuves des théorèmes et propriétés ne seront pas refaites.

11.2.1 Vocabulaire des ensembles

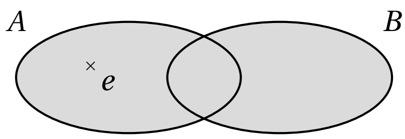
Définition 11.1 (Intersection)**.** L'*intersection* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont communs à A et B.
On la note $A \cap B$.



Ainsi $e \in A \cap B$ signifie $e \in A$ **et** $e \in B$.

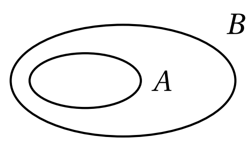
Remarque. Lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.

Définition 11.2 (Réunion)**.** La *réunion* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B.
On la note $A \cup B$.



Ainsi $e \in A \cup B$ signifie $e \in A$ **ou** $e \in B$.

Définition 11.3 (Inclusion)**.** On dit qu'un ensemble A est *inclus* dans un ensemble B si tous les éléments de A sont des éléments de B.
On note alors $A \subset B$ (« A inclus dans B ») ou $B \supset A$ (« B contient A »).

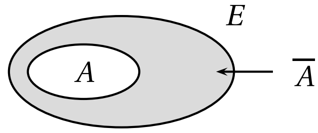


On dit alors que A est une *partie* de B ou que A est un *sous-ensemble* de B.

Remarque. $\varnothing$ et E sont toujours des parties de E (partie vide et partie pleine).

On notera $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

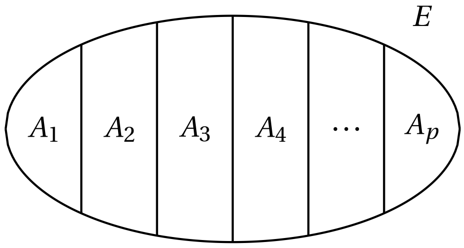
Définition 11.4 (Complémentaire)**.** Soit E un ensemble et A une partie de E. Le *complémentaire* de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On le note $\overline{A}$.



Remarque. $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Définition 11.5. Des parties A_1, A_2, ..., A_p d'un ensemble E constituent une *partition* de E si elles sont deux à deux disjointes et si leur réunion est E.
Ainsi :

- Pour tous i et j de $\{1\,;\ldots;\,p\}$: $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$;
- $\coprod_{i=1}^{p} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p = E$.



Propriété 11.1. *Soit A une partie d'un ensemble E et $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. Alors A et $\overline{A}$ constituent une partition de E.*

Définition 11.6 (Cardinal)**.** Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est appelé *cardinal de E*. Ce nombre est noté $\text{Card}(E)$. On convient que $\text{Card}(\varnothing) = 0$.

Remarque. La notion de cardinal ne s'applique pas aux ensembles infinis (comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc.).

11.2.2 Expériences aléatoires

Issues, univers

Définition 11.7. L'ensemble de toutes les *issues* d'une *expérience aléatoire* est appelé *univers* (ou univers des possibles). On note généralement cet ensemble Ω.

Dans ce chapitre, Ω sera toujours un ensemble fini.

Évènements

Exemple : on lance deux dés et on considère la somme S obtenue. L'ensemble de toutes les issues possibles (univers) est $\Omega = \{2\,;3\,;\cdots;\,11\,;12\}$.
Le tableau 11.1 page suivante définit le vocabulaire relatif aux *évènements* (en probabilité).

TABLE 11.1: Vocabulaire relatif aux évènements en probabilité

Vocabulaire	Signification	Illustration
Évènement (notation quelconque)	Ensemble de plusieurs issues	Obtenir un nombre pair : $A = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$ Obtenir un multiple de trois : $B = \{3; 6; 9; 12\}$ Obtenir une somme supérieure à 10 : $C = \{10; 11; 12\}$ Obtenir une somme inférieure à 6 : $D = \{2; 3; 4; 5; 6\}$
Évènement élémentaire (noté ω)	L'une des issues de la situation étudiée (un élément de Ω)	Obtenir 7 : $\omega = \{7\}$
Évènement impossible (noté $\varnothing$)	C'est un évènement qui ne peut pas se produire	« Obtenir 13 » est un évènement impossible.
Évènement certain (noté Ω)	C'est un évènement qui se produira obligatoirement	« Obtenir entre 2 et 12 » est un évènement certain.
Évènement « A et B » (noté $A \cap B$)	Évènement constitué des issues communes aux 2 évènements	$A \cap B = \{6; 12\}$
Évènement « A ou B » (noté $A \cup B$)	Évènement constitué de toutes les issues des deux évènements	$A \cup B = \{2; 3; 4; 6; 8; 9; 10; 12\}$
Évènements incompatibles (on note alors $A \cap B = \varnothing$)	Ce sont des évènements qui n'ont pas d'éléments en commun	$C \cap D = \varnothing$ donc C et D sont incompatibles. Par contre, A et B ne le sont pas.
Évènements contraires (l'évènement contraire de A se note $\overline{A}$)	Ce sont deux évènements incompatibles dont la réunion forme la totalité des issues (Ω)	Ici, $\overline{A}$ représente l'évènement « obtenir une somme impaire ». On a alors : • $A \cap \overline{A} = \varnothing$ (ensembles disjoints) • $A \cup \overline{A} = \Omega$

11.3 Probabilités

11.3.1 Loi de probabilité sur un univers Ω

Définition 11.8. Soit $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \cdots ; \omega_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire.
Définir une loi de probabilité P sur Ω, c'est associer, à chaque évènement élémentaire w_i, des nombres $p_i \in [0; 1]$, appelés *probabilités*, tels que :

- $\sum_i p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$;
- la probabilité d'un évènement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités p_i des évènements élémentaires ω_i qui constituent A.

Remarque. On note aussi : $p_i = p(\{\omega_i\}) = p(\omega_i)$.

Propriété 11.2. *Soit A et B deux évènements de Ω, alors :*

- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$;
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Remarque. Comme, par définition, la probabilité de l'évènement certain est 1 alors la probabilité de l'évènement impossible, qui est son contraire, est 0.

11.3.2 Une situation fondamentale : l'équiprobabilité

Définition 11.9. Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont même probabilité, on dit qu'il y a *équiprobabilité* ou que la loi de probabilité est *équirépartie*.

Dans ce cas, la règle de calcul de la probabilité d'un évènement A est la suivante :

Propriété 11.3. *Dans une situation d'équiprobabilité sur un univers* Ω*, pour tout évènement élémentaire* ω *et tout évènement* A *on a :*

$$p(\omega) = \frac{1}{Card(\Omega)} \qquad p(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}} = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

Certaines expériences ne sont pas des situations d'équiprobabilité, mais on peut parfois s'y ramener tout de même, comme par exemple dans l'activité 11.2.

11.3.3 Loi des grands nombres

Définition 11.10. Lorsque qu'on répète une expérience aléatoire, on appelle *fréquence d'apparition* d'une éventualité ω_i donnée le nombre : $f_i = \frac{\text{nombre de fois où l'éventualité } \omega_i \text{ apparaît}}{\text{nombre de fois où l'expérience est répétée}}$

On constate que si l'on répète un grand nombre de fois l'expérience donnée, les différentes fréquences d'apparition ont tendance à se stabiliser. Ce constat est un résultat mathématique appelé *La loi des grands nombres*; il se démontre, mais la démonstration est largement hors de nos compétences :

Théorème 11.4 (Loi des grands nombres)**.** *Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité, les distributions des fréquences calculées sur des séries de taille* n *se rapprochent de la loi de probabilité quand* n *devient grand.*

Remarques.

- Dans certains cas, on utilise ce résultat pour valider ou rejeter un modèle (une loi de probabilité) choisi à priori.
- Dans d'autres cas, lorsqu'on ne connaît pas de loi de propabibilité relativement à une expérience aléatoire, on peut ainsi en introduire une à partir des fréquences déterminées lors d'un grand nombre d'expériences

11.4 Variables aléatoires

11.4.1 Les situations

On illustrera toute cette section par les situations suivantes :

1. on tourne une roue dans une fête foraine qui est partagée en 8 secteurs égaux : 1 de couleur rouge, 3 de couleur verte et 4 de couleur bleue ;
2. on lance deux dés et on s'intéresse à la somme des deux dés.

11.4.2 Définition

Définition 11.11. Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

- On appelle *variable aléatoire* toute fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$ qui, à tout élément de Ω, fait correspondre un nombre réel k.
- L'évènement noté $\{X = k\}$ est l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image k par X.
- L'ensemble image de Ω par X est l'ensemble de toutes les images des éléments de Ω par X. Cet ensemble est noté Ω'.

Avec nos situations de départ on peut imaginer les variables aléatoires suivantes :

1. La partie de roue à la fête foraine coûte 1 € et l'on gagne :
   - 0 € si le bleu sort ;
   - 2 € si le vert sort ;
   - 5 € si le rouge sort ;

   Lorsqu'on lance la roue, l'univers est donc $\Omega = \{\text{bleu}\,;\text{vert}\,;\text{rouge}\}$ et l'on peut définir la variable aléatoire qui à chaque couleur associe le gain engendré.
   Ainsi, en enlevant la mise (1 € pour pouvoir jouer), on a :
   - X : bleu $\mapsto -1$
   - X : vert $\mapsto 1$
   - X : rouge $\mapsto 4$
2. On peut, par exemple, définir une variable aléatoire X de la façon suivante :
   - $X = 0$ si la somme des deux dés est paire ;
   - $X = 1$ si elle est impaire.

   L'ensemble image de Ω par X est $\Omega' = \{0\,;1\}$

Remarques.

- Une variable aléatoire n'est pas un nombre, mais une fonction.
- Les valeurs d'une variable aléatoire sont toujours des nombres.
- En général, une variable aléatoire est notée X, Y, Z.

11.4.3 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 11.12. Soit $\Omega = \{\omega_1\,;\omega_2\,;\cdots\,;\omega_n\}$ un univers associé à une expérience aléatoire sur lequel a été définie une loi de probabilité et $\Omega' = \{x_1\,;x_2\,;\cdots\,;x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X.
La loi de probabilité de X est la fonction définie sur Ω', qui à chaque x_i fait correspondre le nombre $p'_i = p(X = x_i)$.

On démontre facilement que $\sum\limits_i p'_i = 1$.

En reprenant les deux situations de départ, on a :

1. Dans le cas de la roue on a :

x_i	-1	1	4
$p(X=x_i)$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2. $p(X=0)$ est la probabilité que la variable aléatoire soit égale à 0, c'est-à-dire que la somme soit paire.
On a ainsi $p(X=0)=p(2)+p(4)+p(6)+\cdots+p(12)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$. De même $p(X=1)=\frac{1}{2}$.

x_i	0	1
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

11.4.4 Espérance, variance, écart type

Définition 11.13. L'espérance mathématique, la variance et l'écart type de la variable aléatoire X, dont les notations respectives sont $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ sont respectivement les nombres :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i w_i \qquad V(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i\left(\omega_i-E(X)\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\omega_i^2\right)-(E(X))^2 \qquad \sigma(X)=\sqrt{V}$$

Toujours avec les exemples de la situation de départ :

1. (X est le gain à la roue de la fête foraine)
   - $E(X)=\frac{4}{8}\times(-1)+\frac{3}{8}\times 1+\frac{1}{8}\times 4=\frac{3}{8}$ (le gain qu'on peut espérer à chaque partie est en moyenne de 0,375 €)
   - $V(X)=\frac{4}{8}\times(-1)^2+\frac{3}{8}\times 1^2+\frac{1}{8}\times 4^2-\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{175}{64}$
   - $\sigma(X)=\sqrt{\frac{175}{64}}\approx 1,654$
2. ($X=0$ si la somme des dés est paire, $X=1$ si elle est impaire)
   - $E(X)=\sum_i p'_i x_i=\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$
   - $V(X)=\sum_i p'_i x_i^2-(E(X))^2=\frac{1}{2}\times 0^2+\frac{1}{2}\times 1^2-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$
   - $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{1}{2}$

Propriété 11.5. *Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire sur lequel a été définie une variable aléatoire X d'espérance $E(X)$ et de variance $V(x)$.*
Soit Y une nouvelle variable aléatoire telle que $Y=aX+b$ où a et b sont des réels quelconque.
Alors $E(Y)=aE(X)+b$ et $V(Y)=a^2V(X)$.

La preuve sera faite en classe.
Avec les exemples de la situation de départ :

1. Si, par exemple, la partie coûte quatre euros au lieu d'un, on obtient une variable aléatoire $Y=1X-3$. $E(Y)=1E(X)-3=-2,625$ et $V(Y)=1^2V(X)=V(X)$.
2. Si, par exemple, on définit la variable aléatoire $Y=2X$, $E(Y)=2E(X)=1$ et $V(Y)=2^2V(X)=4V(X)=1$.

11.5 Exercices

EXERCICE 11.1.
Deux lignes téléphoniques A et B arrivent à un standard.
On note :

- E_1 : « la ligne A est occupé » ;
- E_2 : « la ligne B est occupée ».

Après étude statistique, on admet les probabilités :

- $p(E_1) = 0,5$;
- $p(E_2) = 0,6$;
- $p(E_1 \cap E_2) = 0,3$.

Calculer la probabilité des évènements suivants :

- F : « la ligne A est libre » ;
- G : « une ligne au moins est occupée » ;
- H : « une ligne au moins est libre ».

EXERCICE 11.2.
On jette trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée et on appelle « tirage »le résultat obtenu. Ainsi (Face ; Face ; Pile) est un tirage (qu'on notera FFP).

1. Faire un arbre décrivant l'ensemble des issues possibles de cette expérience aléatoire et donner le cardinal de Ω, l'univers des possibles.
2. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de « Pile »obtenues.
   (a) Décrire Ω', l'univers des possibles pour X.
   (b) Déterminer la loi de probabilité associée à X (on la présentera sous forme de tableau).
   (c) Déterminer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ respectivement l'espérance, la variance et l'écart type de X.

EXERCICE 11.3.
Pour se rendre à son travail, un automobiliste rencontre trois feux tricolores. On suppose que les feux fonctionnent de manière indépendante, que l'automobiliste s'arrête s'il voit le feu orange ou rouge et qu'il passe si le feu est vert. On suppose de plus que chaque feu est vert durant les deux tiers du temps et rouge ou orange un tiers du temps. On dit que l'automobiliste a obtenu le feu au vert quand il est passé sans s'arrêter.

1. Faire un arbre représentant toutes les situations possibles.
2. Quelle est la probabilité que l'automobiliste ait les trois feux verts ? deux des trois feux verts ?
3. Combien de feux au vert l'automobiliste peut-il espérer ?

EXERCICE 11.4.
Un dé (à 6 faces) est truqué de la façon suivante : chaque chiffre pair a deux fois plus de chance de sortir qu'un numéro impair.

1. Calculer la probabilité d'obtenir un 6.
2. On lance deux fois le dé.
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un chiffre pair.
   (b) Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un 6.
   (c) On appelle X la variable aléatoire qui a chaque tirage associe la somme des deux dés. Calculer l'espérance de X. Comment interpréter ce nombre ?

EXERCICE 11.5.
On lance deux dés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
L'ensemble E des couples $(x\,;\,y)$, avec $1 \leqslant x \leqslant 6$ et $1 \leqslant y \leqslant 6$, est associé à une loi de probabilité équirépartie.
À chaque couple $(x\,;\,y)$, on associe $|x-y|$. On définit ainsi une variable aléatoire X sur l'ensemble E.

1. Définir la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

EXERCICE 11.6.
On considère une roue partagée en 15 secteurs égaux tels que :

- il y a un secteur de couleur rouge (R)
- il y a cinq secteurs de couleur bleue (B)
- il y a neuf secteurs de couleur verte (V)

La roue tourne sur son axe central et s'arrête sur l'une des couleurs, chaque secteur ayant la même probabilité.
Pour pouvoir faire tourner la roue, un joueur doit payer 1 € et, selon la couleur sur laquelle elle s'arrête, il gagne :

- 0 € si le vert sort;
- 1 € si le bleu sort;
- x € si le rouge sort;

On appelle X la variable aléatoire associée au gain final (gain − mise de départ) du joueur.

1. Décrire l'univers $X(\Omega)$ associé à X.
2. Décrire la loi de probabilité associée à X (on la présentera sous forme de tableau).
3. Exprimer en fonction de x l'espérance de gain du joueur.
4. On suppose que $x = 2$ € .
   (a) Quelle est l'espérance de gain du joueur?
   (b) Qui est le plus avantagé : l'organisateur du jeu ou le joueur?
5. Mêmes questions pour $x = 15$ € .
6. On dit que le jeu est équitable lorsque l'espérance de gain est égale à zéro, car alors ni l'organisateur du jeu ni le joueur ne sont avantagés. Combien doit valoir x pour que le jeu soit équitable?

EXERCICE 11.7.
On considère le jeu suivant : Le joueur lance deux dés à six faces; s'il fait un double 6, il gagne un million d'euros, sinon il perd dix mille euros.
Faut-il lui conseiller le jeu?

EXERCICE 11.8.
On dispose d'une roue qui comporte dix secteurs identiques, neuf verts et un rouge.
On propose les deux jeux suivants :

Jeu 1 : si la roue s'arrête sur un secteur vert, le joueur gagne 2 000 euros, sinon il perd 8 000 euros.

Jeu 2 : si la roue s'arrête sur un secteur vert, le joueur ne gagne ni ne perd rien, sinon, il gagne 10 000 euros.

1. Intuitivement, quel jeu semble le plus avantageux?
2. Calculer, pour chaque jeu, l'espérance et la variance de gain du joueur. Que constate-t-on?

EXERCICE 11.9.
Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$, notée aussi m, et d'écart-type $\sigma(X)$, noté σ.
Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = \frac{X-m}{\sigma}$.
Déterminer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$.

EXERCICE 11.10.
On jette un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On définit une variable alétoire X en associant à chaque tirage le nombre :

- -10 si on tire le numéro 1 ;
- 10 si on tire le numéro 6 ;
- 0 dans tous les autres cas.

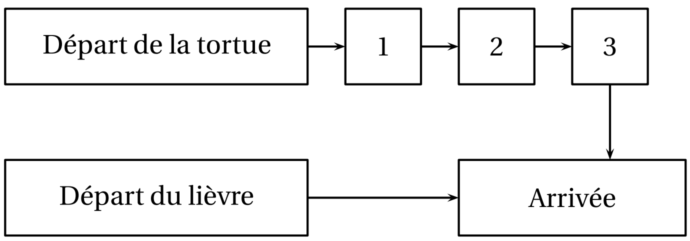
1. Définir l'univers Ω associé à l'expérience aléatoire et l'univers Ω' associé à la variable alétoire.
2. On suppose que le dé est parfaitement équilibré. Donner la loi de probabilité de X, son espérance et son écart-type
3. Même question avec la variable Y qui associe à chaque tirage le nombre :
   - -5 si on tire le numéro 1 ;
   - 5 si on tire le numéro 6 ;
   - 0 dans tous les autres cas.

EXERCICE 11.11.
On lance n dés ($n \geqslant 1$). On note A l'évènement « obtenir au moins un 6 ».

1. Décrire $\overline{A}$.
2. Exprimer en fonction de n la probabilité $p(\overline{A})$.
3. En déduire que $p(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
4. Compléter le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(A)$								

5. Combien de dés faut-il lancer pour que la probabilité d'obtenir au moins un six soit supérieure à $\frac{3}{4}$?
6. Le lièvre et la tortue font la course.
   Le lièvre se divertit longuement mais quand il part, il file à l'arrivée. La tortue, quant à elle, avance inexorablement mais lentement vers l'arrivée.
   On considère qu'on peut assimiler cette course au lancement d'un dé :
   - si le 6 sort, le lièvre avance ;
   - sinon la tortue avance d'une case et au bout de 4 cases la tortue a gagné.
     Voir figure ci-dessous.



   (a) Déterminer la probabilité que le lièvre l'emporte et celle que la tortue l'emporte.
   (b) En combien de lancers de dés peut-on espérer finir la partie en moyenne ?