Nom : Jeudi 26 mai 2016 – 2h00

Devoir surveillé n°9

Suites – Loi binomiale

L'énoncé est à rendre avec sa copie. *Penser à écrire son nom en entête.*
Le barème n'est qu'indicatif (le devoir est noté sur 25 points).

EXERCICE 9.1 (8 points)**.**
(u_n) est la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = -u_n^2 + u_n$.

1. Montrer que, quelle que soit la valeur de u_0, la suite (u_n) est décroissante.
2. Sur la figure 9.1 donnée en annexe page 195, où la courbe de la fonction $f : x \longmapsto -x^2 + x$ a été représentée, tracer les représentations en chemin de (u_n) dans les cas suivants :
   en vert : $u_0 = -1$ **en bleu :** $u_0 = 1,5$ **en rouge :** $u_0 = \frac{1}{2}$
   Conjecturer dans chaque cas le comportement de la suite (u_n) quand n devient grand.
3. Pour la suite de l'exercice, on suppose que $u_0 = \frac{1}{2}$.
   (a) On admet que, si (u_n) converge, c'est vers le nombre ℓ tel que $f(\ell) = \ell$.
   Déterminer ℓ par le calcul.
   (b) On admet que, lorsque (u_n) converge vers ℓ, on peut rendre u_n aussi proche qu'on veut de ℓ : il suffit de prendre n suffisamment grand.
      i. Concevoir un algorithme de seuil, qu'on écrira en langage courant sur sa copie, prenant comme argument un nombre ϵ (petit) et retournant la première valeur de n telle que $|u_n - \ell| < \epsilon$.
      On n'oubliera pas que (u_n) est décroissante.
      ii. À l'aide de cet algorithme, compléter le tableau suivant :

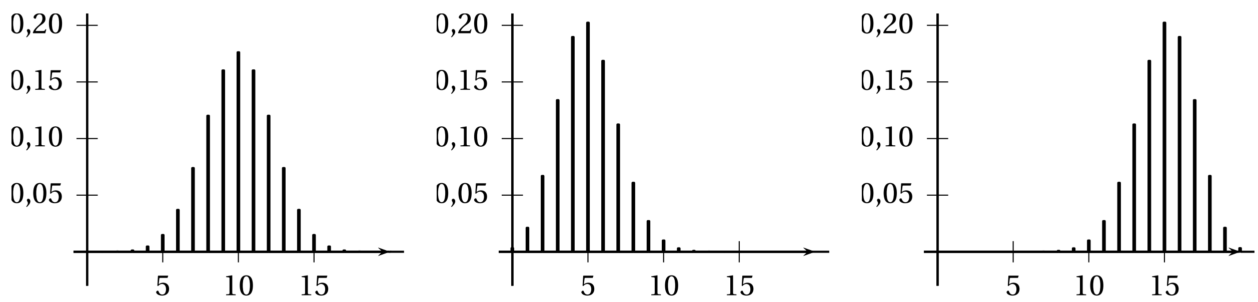
ϵ	1	0,1	0,01	0,001	10^{-6}
n					

On recopiera le tableau sur sa copie avant de le compléter.

EXERCICE 9.2 (4 points)**.**
Dans cet exercice, les résultats devront être justifiés autrement que par l'utilisation de la calculatrice.

1. Interpréter $\binom{6}{1}$ et en donner la valeur.
2. On suppose connu que $\binom{6}{2} = 15$. En déduire $\binom{7}{2}$.
3. En déduire $\binom{7}{5}$.

EXERCICE 9.3 (2 points)**.**
On a représenté sur la figure ci-dessous la distribution de probabilité de trois variables aléatoires suivant les lois binomiales $\mathscr{B}(20\,;0,5)$, $\mathscr{B}(20\,;0,25)$ et $\mathscr{B}(20\,;0,75)$.
Associer chaque loi à son graphique en justifiant brièvement son choix.



EXERCICE 9.4 (5 points)**.**
Une classe compte 30 élèves dont 20 filles. À chaque cours de mathématiques, le professeur interroge au hasard un élève de la classe, sans se rappeler quels élèves il a déjà interrogés.
On considère un entier positif ou nul n et on note X la variable aléatoire qui correspond au nombre de filles interrogées au cours de n jours consécutifs.

1. Quelle est la loi de X ? *Justifier brièvement.*
2. Quelle est la probabilité que sur 10 jours consécutifs, soient interrogées 4 filles exactement ? Au moins 4 filles ?
3. Quel doit être le nombre minimal de cours consécutifs pour que la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée soit inférieure à 0,001 ?

EXERCICE 9.5 (6 points)**.**
Un élève se rend à vélo au lycée distant de 3 km de son domicile à une vitesse supposée constante de 15 km/h.
Sur le parcours, il rencontre 6 feux tricolores non synchronisés. Pour chaque feu, la probabilité qu'il soit au vert est $\frac{2}{3}$. Un feu rouge ou orange lui fait perdre une minute et demie.
On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de feux verts rencontrés par l'élève sur son parcours et T la variable aléatoire égale au temps en minutes mis par l'élève pour aller au lycée.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Exprimer T en fonction de X.
3. Déterminer $E(T)$ et interpréter ce résultat.
4. L'élève part 17 min avant le début des cours.
   (a) Peut-il espérer être à l'heure ?
   (b) Calculer la probabilité qu'il soit en retard.

FIGURE 9.1: Repère de l'exercice 9.1