Nom : *Jeudi 24 mars 2016 – 2h00*

Devoir surveillé n°7

Dérivation – Produit scalaire

L'énoncé est à rendre avec sa copie. *Penser à écrire son nom en entête.*
Le barème n'est qu'indicatif (le devoir est noté sur 35 points).

QUESTION DE COURS (1,5 point)**.**
On rappelle que la définition du produit scalaire est :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

Montrer que dans un repère orthonormé où $\vec{u}(x\,;\,y)$ et $\vec{v}(x'\,;\,y')$, $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

EXERCICE 7.1 (7,5 points)**.**
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x^2+1$ et $g(x) = x^3 - 3x + 1$.

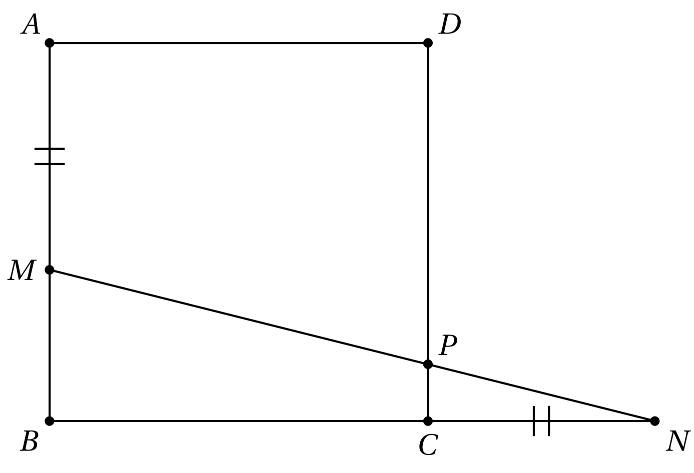
1. Calculer les dérivées f' et g'. Étudier leur signe.
2. Dresser les tableaux des variations des fonctions f et g.
3. Tracer dans le repère de la figure 7.1, donnée en annexe, les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions f et g.
4. (a) Factoriser le polynôme $P(x) = x^2 + 2x - 3$.
   (b) En déduire les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ selon les valeurs de x.

EXERCICE 7.2 (6 points)**.**
$ABCD$ est un carré de côté 1.
M est un point sur le segment $[AB]$.
On place le point N tel que $CN = AM$ sur la demi-droite $[BC)$ à l'extérieur du segment $[BC]$.
La droite (MN) coupe (DC) en P.

Le but de l'exercice est de trouver où placer M sur le segment $[AB]$ pour que la distance PC soit maximale.

On pose $AM = x$ avec $0 \leqslant x \leqslant 1$.

1. Montrer que $PC = \frac{x-x^2}{1+x}$.
2. (a) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = \frac{x-x^2}{1+x}$.
   (b) En déduire la valeur de x pour laquelle la distance PC est maximale.



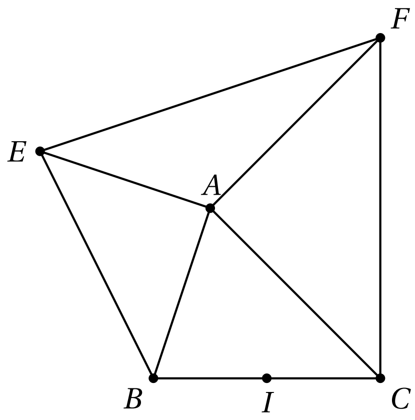
EXERCICE 7.3 (3 points)**.**
ABC est un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 4$ et $\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{6}$.
Déterminer la valeur exacte de BC.

EXERCICE 7.4 (4,5 points).

ABC est un triangle tel que l'angle en A est aigu. BAE et CAF sont des triangles rectangles et isocèles en A à l'extérieur du triangle ABC (voir la figure ci-contre).

On note $\theta = \widehat{BAC}$, $b = AC$ et $c = AB$.

1. Exprimer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE}$ en fonction de b, c et θ.
2. Soit I le milieu de $[BC]$.
   Montrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.
3. Montrer que (AI) est la hauteur issue de A dans le triangle AEF.



EXERCICE 7.5 (13,5 points).

Le but de l'exercice est de vérifier, dans un cas particulier, la propriété suivante : « Dans un triangle, le symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté est sur le cercle circonscrit ».

La plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On donne les points $A\,(2 ; 6)$, $B\,(8 ; 2)$ et $C\,(-3 ; -9)$.

1. Placer ces points dans le repère de la figure 7.2 page suivante et la compléter par la suite par tous les objets géométriques rencontrés dans l'exercice.
2. Cercle circonscrit
   (a) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{D}$, la médiatrice du segment $[AB]$.
   (b) $\mathscr{D}'$, la médiatrice du segment $[BC]$, admet comme équation cartésienne $x + y + 1 = 0$.
   Justifier que Ω, centre du cercle circonscrit au triangle ABC appartient à $\mathscr{D}$ et à $\mathscr{D}'$ puis déterminer les coordonnées de Ω.
   (c) Soit Γ, le cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que Γ admet comme équation cartésienne $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 60 = 0$.
3. Soit $H\,(5 ; 3)$. Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.
4. (a) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soit $A'\,(7 ; 1)$. Montrer que A' est le projeté orthogonal de H sur (BC).
   (b) Soit H' le symétrique de H par rapport à (BC).
   Que représente A' pour $[HH']$?
   En déduire les coordonnées de H'.
5. Vérifier l'énoncé proposé.

Nom : *Jeudi 24 mars 2016 – 2h00*

FIGURE 7.1: Repère de l'exercice 7.1

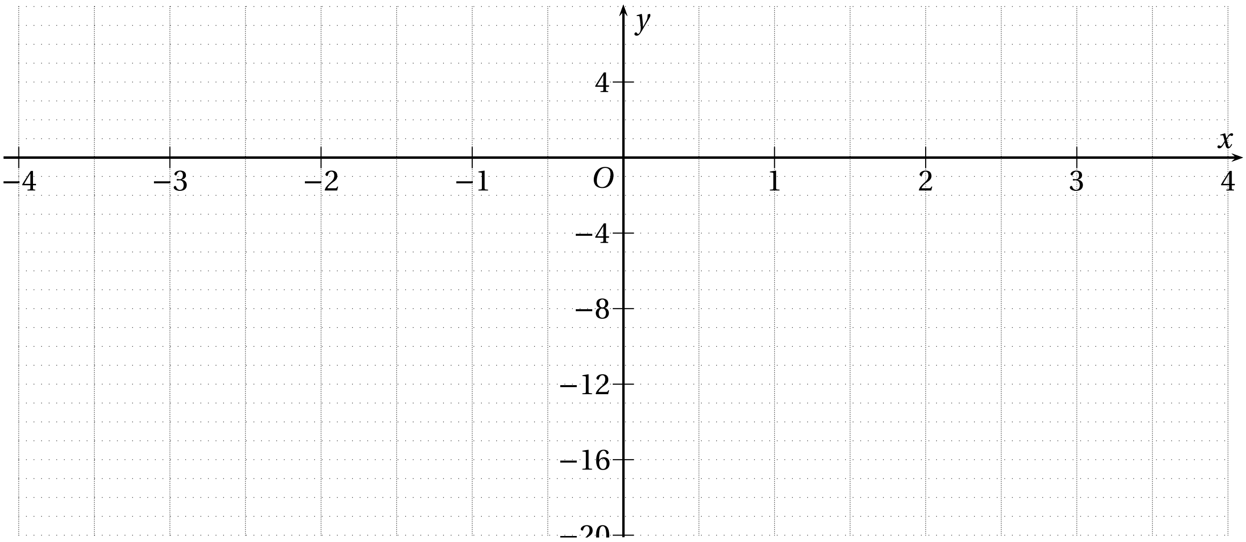


FIGURE 7.2: Repère de l'exercice 7.5