Devoir surveillé n°8.

Applications de la dérivée – Variables aléatoires – Applications du produit scalaire

L'énoncé est à rendre avec sa copie. *Penser à écrire son nom en entête sur cet énoncé.*
On soignera la rédaction et la présentation.
Le barème n'est qu'indicatif. Le devoir est noté sur 30 points.

La calculatrice n'est pas autorisée avant d'avoir rendu l'exercice 1.

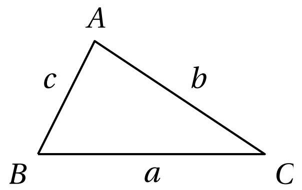
EXERCICE 1 (3 points).
Les deux parties sont indépendantes.

Partie A : Déterminer la valeur exacte simplifiée au maximum de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$. *Indication :* $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\ldots$.

Partie B : Démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. *Soit un triangle ABC non aplati dont on note les longueurs BC = a, AC = b et AB = c. Alors :*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$



EXERCICE 2 (6 points).

Partie A : Une roue.

À la fête foraine de Villetamuse, on trouve une roue partagée en 8 secteurs égaux tels que :

- il y a 4 secteurs de couleur bleue (B)
- il y a 3 secteurs de couleur verte (V)
- il y a 1 secteur de couleur rouge (R)

La roue tourne sur son axe central et s'arrête sur l'une des couleurs, chaque secteur ayant la même probabilité.

Pour pouvoir faire tourner la roue, un joueur doit payer 2 € et, selon la couleur sur laquelle elle s'arrête, il gagne :

- 0 € si le bleu sort ;
- 2 € si le vert sort ;
- 7 € si le rouge sort.

On appelle X la variable aléatoire associée au gain final (gain – mise de départ) du joueur.

Pour chacune des questions, une seule des réponses est exacte.
Recopier sur votre copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse inexacte ou l'absence de réponse ne rapportent ni n'enlèvent aucun point.

1. L'ensemble des valeurs prises par X est :
   (a) $\{7;0;2\}$ (b) $\{5;-2;0\}$ (c) $\{1;4;3\}$
2. La probabilité que le joueur gagne au plus 1 € est égale à :
   (a) $p(X>1)$ (b) $1-p(X>1)$ (c) $p(X\geqslant 1)$
3. L'espérance mathématique de X vaut :
   (a) $-0,375$ € (b) $1,625$ € (c) 0 €
4. La variance de X vaut :
   (a) $\frac{31}{8}$ (b) $\frac{319}{64}$ (c) $\frac{237}{64}$

Partie B. Un autre jeu.

À la fête foraine de Villetamuse on trouve un autre jeu dont l'espérance du gain final Y et la variance sont, respectivement, $E(Y)=-0,1$ € et $V(Y)=6$.

Comparer ce jeu à celui de la partie A sur la base de ces informations.

EXERCICE 3 (6 points)**.**
Sur les 1 200 élèves d'un lycée, 120 sont majeurs.
Des stages en entreprise sont organisés chaque année tel que :

- chaque élève participe au plus à un stage ;
- 5 % des élèves mineurs partent en stage ;
- 25 % des élèves majeurs partent en stage.

1. Recopier sur sa copie et compléter le tableau suivant :

	Mineur	Majeur	Total
En stage			
Pas en stage			
Total			

2. On rencontre un élève au hasard et on définit les événements suivants :
   - M : « l'élève rencontré est majeur » ;
   - S : « l'élève rencontré part en stage ».

   Déterminer et interpréter les probabilités suivantes :
   - $p\left(\overline{M}\right)$;
   - $p\left(\overline{M}\cap S\right)$;
   - $p\,(M\cup S)$.
3. Chaque stage dure 4 jours pour un élève mineur et 9 jours pour un élève majeur. On note X la variable aléatoire associant à chaque élève le nombre de jours de stage.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter le résultat.

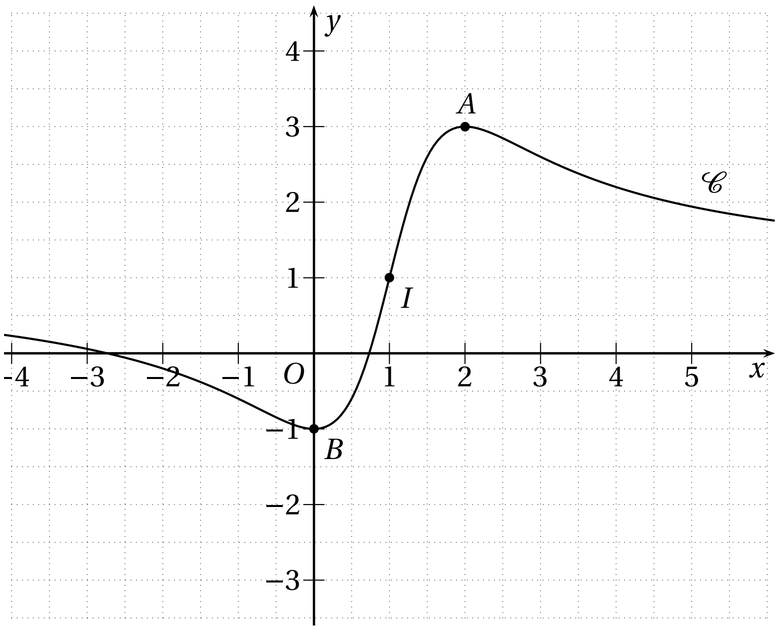
EXERCICE 4 (6 points)**.**
Une urne contient n jetons ($n \geqslant 8$) indiscernables au toucher dont 7 sont verts et les autres sont rouges.
On y prélève, successivement et en remettant le jeton prelevé dans l'urne à chaque fois, deux jetons.
On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de couleurs obtenues lors du tirage.

1. Dans le cas où $n = 10$, à l'aide d'un arbre de probabilité, déterminer la probabilité de l'événement $\{X = 1\}$.
2. (a) Dans le cas général, déterminer, en fonction de n, la loi de probabilité de X.
   (b) Montrer que l'espérance mathématique de X est
$$E(X) = \frac{n^2+14n-98}{n^2}$$
3. On pose, pour tout $x > 0$:
$$f(x) = \frac{x^2+14x-98}{x^2}$$
   (a) Étudier les variations de f.
   (b) En déduire n pour que l'espérance soit maximale.

EXERCICE 5 (9 points).

Partie A.

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative donnée ci-dessous.



La courbe passe par les points $A(2;3)$, $B(0;-1)$ et $I(1;1)$ et admet en A et en B des tangentes parallèles à l'axe des abscisses.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $f'(x) = 0$.
2. Estimer graphiquement la valeur de $f'(1)$.
3. Déterminer graphiquement le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x sur l'intervalle $[-2;5]$.

Partie B.

On admet pour la suite que

$$f(x) = \frac{x^2+2x-2}{x^2-2x+2}$$

On note f' sa fonction dérivée.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
3. (a) Montrer que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{4x(-x+2)}{(x^2-2x+2)^2}$$

   (b) En déduire le tableau de variations complet de f sur l'intervalle $[-2;5]$.
4. Déterminer l'équation réduite de Δ, tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
5. Déterminer les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$.