Mathématiques en Première S

David ROBERT

2007–2008

Sommaire

Progression

Mois	Sem	Intitulé du chapitre	En module
Sept	1	Généralités sur les fonctions (2,5 sem.)	
	2		Sections planes (2 mod)
	3	Coplanarité (2 sem.)	
	4		
Oct	5	Second degré (2 sem.)	
	6		
	7		
	8	Angles orientés (1,5 sem.)	
		Vacances d'automne du sam 27 oct au jeu 8 nov	
Nov	9 (3 j)	Nombre dérivé (2 sem.)	Éq. trigo. (2 mod)
	10		
	11		
	12	Produit scalaire (+ médiane + équations droites cercles) (2,5 sem.)	
Déc	13		
	14	Statistiques (1,5 sem)	
	15		
		Vacances de Noël du sam 22 déc au lun 7 jan	
Jan	16	Fonction dérivée (2 sem.)	
	17		
	18	Barycentres (3 sem.)	Intro aux suites (tableur) (3 mod.)
	19		
Fév	20		
	21	Suites (généralités) (1 sem. + modules)	
		Vacances d'hiver du sam 16 fév au lun 3 mar	
Mars	22	Repérage dans l'espace (+ éq. cône, cyl) (1 sem.)	
	23	Comportement asymptotique (2 sem.)	
	24		
	25	Transformations (2 sem.)	
Avr	26		
	27	Suites arithmétiques et géométriques (1 sem.)	
		Vacances de printemps du sam 12 avr au lun 28 avr	
Mai	28	Trigonométrie, Relations métriques dans le triangle (2 sem.)	
	29		
	30	Suites (convergence) (1 sem.)	
	31	Probabilités (2 sem.)	
	32		
Juin	33	Coordonnées polaires (0,5 sem.)	

Devoir maison n°1

Lieux de points

Ce devoir maison nécessite l'utilisation d'un ordinateur sur lequel devra être installé le logiciel (gratuit) de géométrie dynamique nommé GeoGebra, disponible sur le site : http://www.geogebra.org/. Les constructions sont à faire avec ce logiciel à partir de fichiers que vous trouverez sur le site http://perpendiculaires.free.fr/ (rubrique Documents 1S).

EXERCICE 1 *Fichier : DM1a.ggb*

d est une droite quelconque du plan et F est un point non situé sur cette droite. On cherche à tracer l'ensemble $\mathscr{P}$ des points du plan situés à égale distance de la droite d et du point F.

1. Construire les points du plan A et B situés à la distance PQ du point F et de la droite d.
   Décrire brièvement votre construction et justifier qu'elle donne bien les points recherchés.
2. Q est en fait un point libre (qu'on peut déplacer) sur une droite verticale d'.
   Que semblent décrire les points A et B lorsque Q décrit la droite d' ?
   Faire apparaître ce lieu avec la fonction Lieu.
3. On munit le plan du repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OF}\right)$.
   Construire O et I et faire apparaître les vecteurs du repère.
   Masquer tous les objets construits à l'exception de ceux donnés au départ, du lieu de A et B et du repère $\left(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OF}\right)$.
   Enregistrer sa construction. La fournir avec sa copie.
4. Soit $P(x ; y)$ un point quelconque du plan.
   (a) Exprimer PF^2 en fonction de x et de y.
   (b) Exprimer h^2, où h est la distance de P à la droite d, en fonction de x et de y.
   (c) Montrer que P est à égale distance de la droite d et du point F si et seulement si P appartient à une courbe dont on précisera l'équation.

EXERCICE 2 *Fichier : DM1b.ggb*

F et F' sont deux points distincts du plan. On cherche à tracer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan tels que $FM + F'M = e$ où e est une constante donnée.

1. H est un point du segment $[PQ]$.
   On pose $e = PQ$. Que peut-on dire de $PH + QH$?
   Construire les points du plan A et B tels que $FA + F'A = e$ et $FB + F'B = e$.
   Décrire brièvement votre construction et justifier qu'elle donne bien les points recherchés.
2. H est en fait un point libre (qu'on peut déplacer) sur la droite (PQ).
   À quelle condition sur H les points A et B existent-ils ?
   Que semblent décrire les points A et B lorsque H décrit le segment $[PQ]$?
   Faire apparaître ce lieu avec la fonction Lieu.
   Masquer tous les objets construits à l'exception de ceux donnés au départ et du lieu de A et B.
   Enregistrer sa construction. La fournir avec sa copie.
3. F' est lui aussi un point libre (sur l'axe des abscisses).
   Que devient le lieu des points A et B lorsque $F = F'$? lorsque $FF' = e$? lorsque $FF' > e$?

EXERCICE 3 *Fichier : DM1c.ggb*

1. H est un point de la droite (PQ).
   Construire les points du plan A et B tels que $FA = PH$, $F'A = QH$, $FB = PH$ et $F'B = QH$.
2. H est un point libre de la droite (PQ).
   Que deviennent A et B lorsque $H \in [PQ]$?
   Déplacer le point H sur la droite (PQ).
   Que semblent décrire les points A et B lorsque H décrit la droite (PQ) ?
   Faire apparaître ce lieu avec la fonction Lieu.
   Masquer tous les objets construits à l'exception de ceux donnés au départ et du lieu de A et B.
   Enregistrer sa construction. La fournir avec sa copie.
3. On appelle $\mathscr{H}$ ce lieu. Décrire $\mathscr{H}$ en terme de distances à F et F' en faisant intervenir dans votre description $e = PQ$ (« $\mathscr{H}$ est l'ensemble des points M du plan tel que ... »).
4. F' est lui aussi un point libre (sur l'axe des abscisses).
   Que devient le lieu des points A et B lorsque $F = F'$? lorsque $FF' = e$? lorsque $FF' < e$?

Chapitre 1

Généralités sur les fonctions

Sommaire

1.1 Activités

Activité 1.1 (Fonctions de référence (rappels)).
Compléter le tableau 1.1, page suivante, sur le modèle de la deuxième ligne.

Activité 1.2 (La fonction racine).
On appelle *fonction racine* la fonction qui à un réel x associe, s'il existe, le réel positif noté $\sqrt{x}$ tel que $(\sqrt{x})^2 = x$.

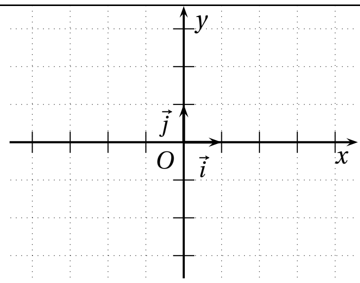
1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction racine.
2. Montrer que si $0 \leq a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Que peut-on en déduire ?
3. Tracer la courbe représentative de la fonction racine.

Activité 1.3 (Sommes de fonctions).

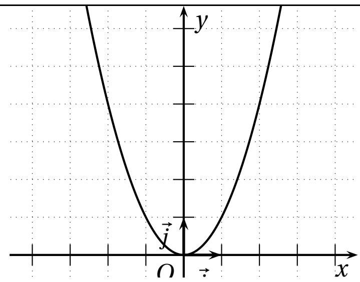
1. (a) Sur le graphique 1.1 page 7, tracer la courbe représentant la fonction f, somme des deux fonctions déjà représentées.
   (b) Donner, par lecture graphique, les variations de la fonction f.
   (c) Y a-t-il un lien entre les variations des deux fonctions représentées et celles de f ?
2. À l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un grapheur :
   (a) tracer les courbes représentatives des fonctions f et g (définies sur $\mathbb{R}$) ci-dessous puis de la fonction h, somme de ces deux fonctions et relever par lecture graphique les sens de variation de chacune de ces fonctions :

TAB. 1.1 – Fonctions de référence - Tableau de l'activité 1.1

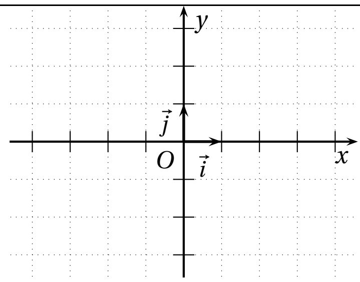
<table>
<tr><th>Fonction
Définie sur</th><th>Parité
Variations</th><th>Allure de la courbe représentative</th></tr>
<tr><td>Affine
$f(x) =$

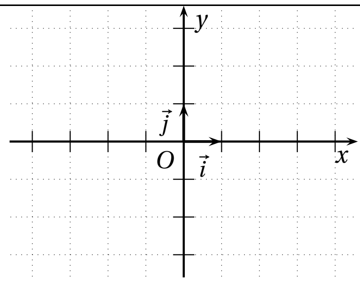
$D_f =$</td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>Carré
$f(x) = x^2$

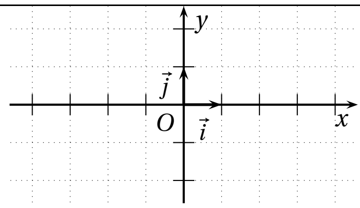
$D_f = \mathbb{R}$</td><td>D_f est centré sur 0 et
$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$
donc la fonction carré est paire

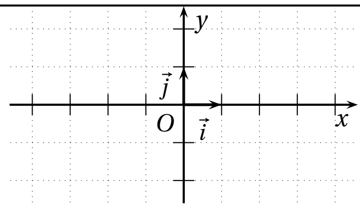
$\begin{array}{|c|ccccc|}\hline x & -\infty & & 0 & & +\infty \\ \hline f(x)=x^2 & & \searrow & & \nearrow & \\ & & & 0 & & \\ \hline\end{array}$</td><td>

Parabole</td></tr>
<tr><td>Cube
$f(x) =$

$D_f =$</td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>Inverse
$f(x) =$

$D_f =$</td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>Sinus
$f(x) =$

$D_f =$</td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>Cosinus
$f(x) =$

$D_f =$</td><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>Valeur absolue
$f(x) =$

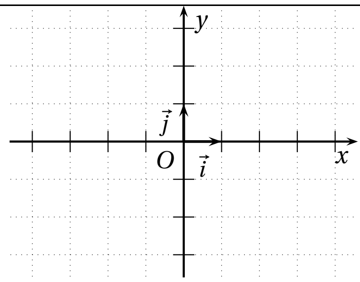
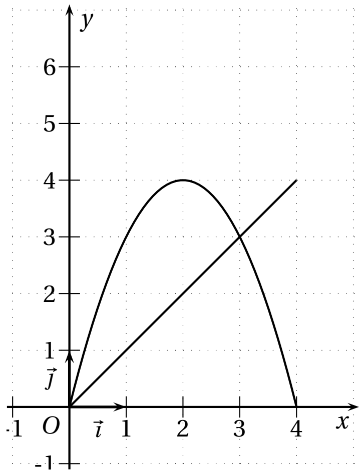
$D_f =$</td><td></td><td>
</td></tr>
</table>

FIG. 1.1 – Graphique de l'activité 1.3



- $f(x) = 2x+3$ et $g(x) = x-4$;
- $f(x) = -2x+4$ et $g(x) = x+1$;
- $f(x) = -2x+1$ et $g(x) = 2x-4$;
- $f(x) = -3x+2$ et $g(x) = x-4$;
- $f(x) = -x+4$ et $g(x) = -2x+3$.

(b) même question avec les fonctions f et g suivantes et la fonction h, somme de ces deux fonctions :
- $f(x) = x^2-1$ et $g(x) = x+1$;
- pour $x \neq 0$, $f(x) = x$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$;
- $f(x) = -x^3$ et $g(x) = -x+2$;
- pour $x \neq -2$, $f(x) = 2x+1$ et $g(x) = 2 - \dfrac{1}{x+2}$.

(c) Conjecturer le lien qu'il existe entre les variations de f et g et celles de h puis le prouver.

Activité 1.4 (Égalités de fonctions).
Dans chacun des cas suivants déterminer si $f(x) = g(x)$ pour tout réel x et en déduire, lorsque c'est possible, les variations de ces fonctions :
- $f(x) = \sqrt{x^2}$ et $g(x) = (\sqrt{x})^2$;
- $f(x) = x+1-\dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x}$;
- $f(x) = x^2-2x+5$ et $g(x) = (x-1)^2+4$;
- $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x+2}$ et $g(x) = x-1$.

Activité 1.5 (Fonctions associées).
Soit f, g, h, k, l les fonctions définies par :
- $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$
- $g(x) = 3+\sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$
- $h(x) = \sqrt{x+4}$ pour $x \in [-4;+\infty[$
- $k(x) = -\sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$
- $l(x) = 4\sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$

1. À l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un grapheur, tracer la courbe représentative de f puis celle de g.
2. Décrire la transformation permettant de passer de la courbe de f à celle de g en précisant ses caractéristiques si cette transformation est une transformation usuelle (symétrie, etc.).
3. Mêmes questions en remplaçant g par chacune des autres fonctions.

1.2 Rappels sur la notion de fonction

Les définitions et propriétés suivantes ont été vues en Seconde aussi les propriétés ne seront pas démontrées.

1.2.1 Définition, vocabulaire et notations

Définition 1.1. Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.
Définir une fonction f sur un ensemble D, c'est associer, à chaque réel $x \in D$, *au plus* un réel noté $f(x)$.
On dit que $f(x)$ est l'*image* de x par f et que x est un *antécédent* de $f(x)$.
On note :
$$f : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$
et on lit « f, la fonction de D dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(x)$ ».

Remarque. f désigne la fonction, $f(x)$ désigne le réel qui est l'image de x par f.

1.2.2 Ensemble de définition

Définition 1.2. L'ensemble des réels possédant une image par une fonction est appelé *ensemble de définition* de la fonction. On le note en général D_f.

On le détermine par le calcul. À notre niveau les seuls problèmes de définition portent sur les fonctions comportant la variable x au dénominateur ou sous une racine.

1.2.3 Courbe représentative

Définition 1.3. Dans un repère, l'ensemble des points M de coordonnées $\left(x\,;\,f(x)\right)$ où x décrit D_f est appelé *courbe représentative* (ou représentation graphique) de la fonction f. On la note en général $\mathscr{C}_f$.
On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = f(x)$.

On veillera à ne pas confondre la fonction et sa représentation graphique.

1.2.4 Parité

Définition 1.4. Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles. On dit que D est centré en 0 si, pour tout $x \in D$, alors $-x \in D$.

Fonction paire

Définition 1.5. Soit f une fonction définie sur un ensemble D. On dit que f *est paire* si :
- D est centré en 0 ;
- pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$.

Propriété 1.1. *Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'*axe des ordonnées.

Exemples 1.1. Les fonctions carrée, valeur absolue et cosinus sont paires.

Fonction impaire

Définition 1.6. Soit f une fonction définie sur un intervalle D. On dit que f *est impaire* si :
- D est centré en 0 ;
- pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.

Propriété 1.2. *Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'*origine du repère.

Exemples 1.2. Les fonctions cube, inverse et sinus sont impaires.

1.2.5 Périodicité

Définition 1.7. Soit f une fonction définie sur un ensemble D. On dit que f est périodique s'il existe un réel $t \neq 0$ tel que, pour tout x appartenant à D :
- $x + t \in D$;
- $f(x+t) = f(x)$.

On appelle période T de f le plus petit des réels t positif.

Exemples 1.3. Les fonctions cosinus, sinus sont périodiques et de période 2π. La fonction tangente est périodique et de période π.

1.3 Comparaison de fonctions

Comparer deux fonctions f et g c'est déterminer si $f(x) = g(x)$ pour tout x et, sinon, sur quel(s) intervalle(s) on a $f(x) > g(x)$ et $f(x) < g(x)$.

1.3.1 Égalité de deux fonctions

Définition 1.8. Soit f et g deux fonctions. On dit que f et g sont égales si :

- f et g ont même ensemble de définition D ;
- pour tout $x \in D$, $f(x) = g(x)$.

On note alors $f = g$.

1.3.2 Comparaison de deux fonctions

Cas général

Définition 1.9. Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et f et g deux fonctions définies au moins sur D. On dit que f est ***inférieure à*** g sur D lorsque $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in D$.
On note $f \leq g$ sur D.

Remarque. On dit parfois que f est majorée par g sur D ou que g est minorée par f sur D.

Les conséquences graphiques sont les suivantes :

Propriété 1.3. *Soient f et g deux fonctions définies au moins sur D, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes respectives. Alors si $f \leq g$ sur D, $\mathscr{C}_f$ est* au-dessous *de $\mathscr{C}_g$.*

Preuve. Immédiat. ♢

Cas particulier – Fonction majorée, minorée, bornée

Dans les cas où l'une des deux fonctions est constante (ici $g(x) = m$) on a :

Définition 1.10. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que :

- f est *minorée sur I* s'il existe un réel m tel que, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m$. m est un minorant de f sur I ;
- f est *majorée sur I* s'il existe un réel M tel que, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$. M est un majorant de f sur I ;
- f est *bornée sur I* si elle est majorée et minorée sur I.

La représentation graphique de f est alors :

- au-dessus de la droite d'équation $y = m$ si elle est minorée par m ;
- au-dessous de la droite d'équation $y = M$ si elle est majorée par M ;
- dans une bande horizontale délimitée par les droites d'équation $y = m$ et $y = M$ si elle est bornée par m et M.

1.4 Opérations sur les fonctions

1.4.1 Opérations algébriques sur les fonctions

De la même manière qu'on peut ajouter, multiplier, diviser, etc. des nombres, on peut ajouter, multiplier, diviser, etc. des fonctions.

Définition 1.11. Soit f et g deux fonctions définies au moins sur D et k un réel. Le tableau suivant regroupe les opérations sur les fonctions f et g :

Opération	Notation	Définition	Définie pour
Somme de la fonction f et du réel k	$f + k$	$(f+k)(x) = f(x) + k$	$x \in D_f$
Produit de la fonction f et du réel k	kf	$(kf)(x) = kf(x)$	
Somme des fonctions f et g	$f + g$	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	$x \in D_f \cap D_g$
Différence des fonctions f et g	$f - g$	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	
Produit des fonctions f et g	fg	$(fg)(x) = f(x) \times g(x)$	
Quotient des fonctions f et g	$\dfrac{f}{g}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$x \in D_f \cap D_g$ et $g(x) \neq 0$

1.4.2 Fonctions associées

Définition 1.12. Soit f une fonction définie sur D et k un réel.
On appelle fonctions associées à f les fonctions : $x \mapsto f(x)+k \quad x \mapsto f(x+k) \quad x \mapsto kf(x)$

Remarque. Ces fonctions ne sont en général pas définies sur le même ensemble de définition que f.

Propriété 1.4. *Soit f une fonction définie sur D et k un réel.*
- *La courbe de $f+k$ s'obtient à partir de celle de f par une translation de vecteur $\vec{u}(0;k)$*
- *La courbe de $x \mapsto f(x+k)$ s'obtient à partir de celle de f par une translation de vecteur $\vec{u}(-k;0)$*
- *Dans un repère orthogonal, la courbe de $-f$ s'obtient à partir de celle de f par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses*

On l'admettra.

1.4.3 Composition des fonctions

Soient f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f et g une fonction dont l'ensemble de définition est D_g.

Définition 1.13. Si, pour tout $x \in D_f$, $f(x) \in D_g$, alors la composée de f et de g est définie par $g\big(f(x)\big)$ et on la note $g \circ f$. Ainsi $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

Exemples 1.4. 1. Si f et g sont deux fonctions définies (sur $\mathbb{R}$) par $f(x) = x+1$ et $g(x) = x^2 - 1$, alors on a :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 1 = (x+1)^2 - 1 = x^2 + 2x$$

2. Si f et g sont deux fonctions définies par : $f(x) = x+1$ ($D_f = \mathbb{R}$) et $g(x) = \frac{1}{x}$ ($D_g = \mathbb{R}^*$), alors on a, pour $x+1 \neq 0$,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x+1}$$

Dans ce deuxième exemple, l'ensemble de définition de $g \circ f$ (ici $\mathbb{R} - \{-1\}$) est différent de ceux de f et g.

1.5 Variations d'une fonction

1.5.1 Rappels

Définition 1.14. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que
- f est *croissante sur I* si pour tous réels a et b de I on a : si $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$;
- f est *décroissante sur I* si pour tous réels a et b de I on a : si $a < b$, alors $f(a) \geq f(b)$;
- f est *monotone sur I* si f ne change pas de sens de variation sur I.

Remarque. On obtient les définitions de strictement croissante ou décroissante en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

1.5.2 Variations de $f+g$

Propriété 1.5. *Soit deux fonctions f et g définies au moins sur un ensemble D.*
- *Si f et g sont deux fonctions croissantes sur D, alors la fonction $f+g$ est croissante sur D.*
- *Si f et g sont deux fonctions décroissantes sur D, alors la fonction $f+g$ est décroissante sur D.*

Preuve. Voir l'exercice 1.5 ◊

1.5.3 Variations de $f+k$

Propriété 1.6. *Soit f une fonction définie et monotone sur un intervalle I et k un réel. Les fonctions f et $f+k$ ont même sens de variation sur I.*

Preuve. Si f est croissante et $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$. Donc $f(a)+k \leq f(b)+k$ donc $f+k$ est aussi croissante.
On démontre de la même manière si f est décroissante. ◊

Exemple 1.5. La fonction $f : x \longmapsto x^2 + 2$ a les mêmes variations que la fonction carrée.

1.5.4 Variations de kf

Propriété 1.7. *Soit f une fonction définie et monotone sur D.*
- *Si $k > 0$ alors les fonctions f et kf ont le même sens de variation sur D.*
- *Si $k < 0$ alors les fonctions f et kf ont des sens de variation opposés sur D.*

Preuve. Voir l'exercice 1.6 ♢

1.5.5 Variations de $g \circ f$

Théorème 1.8 (Sens de variation de $g \circ f$)**.** *Soient f une fonction définie sur un ensemble I et g définie sur un ensemble J telles que pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$. Le tableau ci-dessous donne les variations de $g \circ f$:*

	g *croissante*	g *décroissante*
f *croisssante*	$g \circ f$ *croissante*	$g \circ f$ *décroissante*
f *décroissante*	$g \circ f$ *décroissante*	$g \circ f$ *croissante*

Preuve. Nous ne ferons la preuve que pour f croissante et g décroissante, les autres étant quasiment identiques.
Soient a et b, éléments de I, tels que $a < b$.
f étant croissante, on a donc $f(a) \leqslant f(b)$.
On a donc $f(a)$ et $f(b)$, éléments de $f(I)$, tels que $f(a) \leqslant f(b)$.
g étant décroissante sur $f(I)$, on a donc $g\left(f(a)\right) \geqslant g\left(f(b)\right)$, c'est-à-dire que $(g \circ f)(a) \geqslant (g \circ f)(b)$. Donc $g \circ f$ décroissante sur I. ♢

1.6 Éléments de symétrie d'une courbe

Propriété 1.9. *Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative dans un repère orthogonal d'une fonction f définie sur D.*
- *La droite Δ d'équation $x = a$ est axe de symétrie de $\mathscr{C}$ si et seulement si, pour tout h tel que $(a+h) \in D$,*
  - *$(a-h) \in D$ et*
  - *$f(a+h) = f(a-h)$*
- *Le point $\Omega(a; b)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}$ si et seulement si, pour tout h tel que $(a+h) \in D$,*
  - *$(a-h) \in D$ et*
  - *$\frac{f(a+h)+f(a-h)}{2} = b$*

On l'admettra.

Remarque. Cette propriété traduit en terme de coordonnées les symétries axiales et centrales, comme l'illustrent les schémas de la présente page. Ainsi :
- Symétrie axiale (figure 1.2 de la présente page) : M et M' étant symétriques par rapport à Δ, elle-même orthogonale aux axes, ils ont même ordonnée et des abscisses symétriques par rapport à a ;
- Symétrie centrale (figure 1.3 de la présente page) : Ω étant centre de symétrie, il est le milieu du segment $[MM']$, donc leurs abscisses sont symétriques par rapport à a et leurs ordonnées, symétriques par rapport à b : $\frac{f(a+h)+f(a-h)}{2} = b$.

FIG. 1.2 – Courbe présentant un axe de symétrie

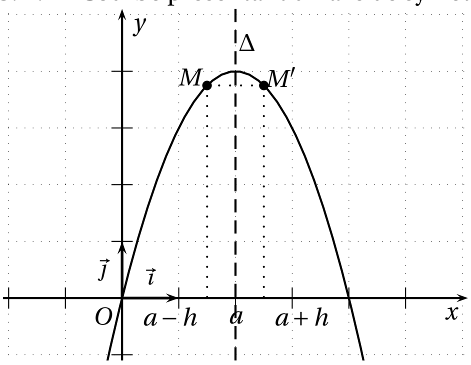
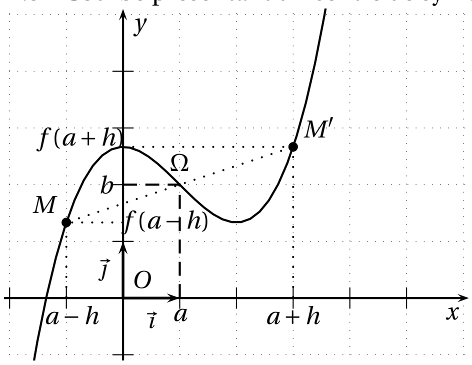


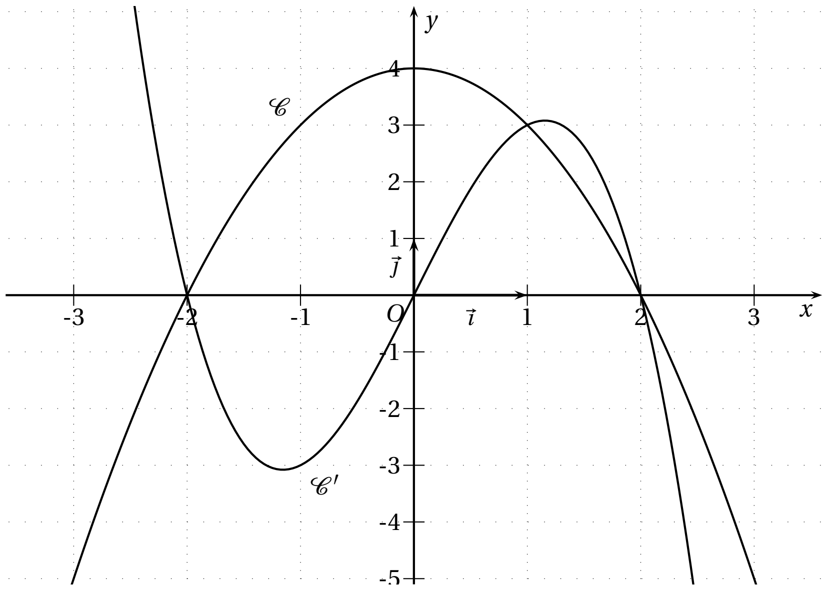
FIG. 1.3 – Courbe présentant un centre de symétrie



1.7 Exercices

Exercice 1.1.
Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^3 + 4x$ et $g(x) = -x^2 + 4$.
On a tracé sur le graphique 1.4 page suivante les courbes représentatives de f et de g.

FIG. 1.4 – Graphique de l'exercice 1.1



1. Associer chaque courbe à la fonction qu'elle représente. Justifier succinctement.
2. Déterminer graphiquement le nombre de solution des équations :
   - $f(x) = 0$;
   - $g(x) = 0$;
   - $f(x) = g(x)$.
3. Résoudre par le calcul : $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$
4. Résoudre graphiquement : $f(x) \leq g(x)$.

Exercice 1.2.
Soit f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$.

1. Étudier le signe de $f(x) - g(x) = x - x^2$.
2. En déduire l'intervalle sur lequel on a $f \leq g$.

Exercice 1.3.
Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$ et $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

1. Calculer $f(x) - g(x)$ (*réduire au même dénominateur*).
2. En déduire l'intervalle sur lequel on a $f \leq g$.

Exercice 1.4.
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(1-x)$. En étudiant le signe de $\frac{1}{4} - f(x)$, montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$ par $\frac{1}{4}$.

Exercice 1.5 (Preuve de la propriété 1.5).

1. Montrer que si a et b sont deux nombres de D tels que $a < b$ et que f et g sont croissantes sur D, alors $(f+g)(a) \leq (f+g)(b)$. Conclure.
2. Mêmes questions lorsque f et g sont décroissantes sur D.

Exercice 1.6 (Preuve de la propriété 1.7).
Montrer que :

- si a et b sont deux nombres de D tels que $a < b$
- si f croissante sur D
- et si $k < 0$

alors $kf(a) \geq kf(b)$.
Conclure.

Exercice 1.7.
On considère les fonctions

- f définie par $f(x) = x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$;
- g définie par $g(x) = \sqrt{1-x}$ sur $]-\infty ; 1]$;
- h définie par $h(x) = 1 - \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Donner une formule explicite pour

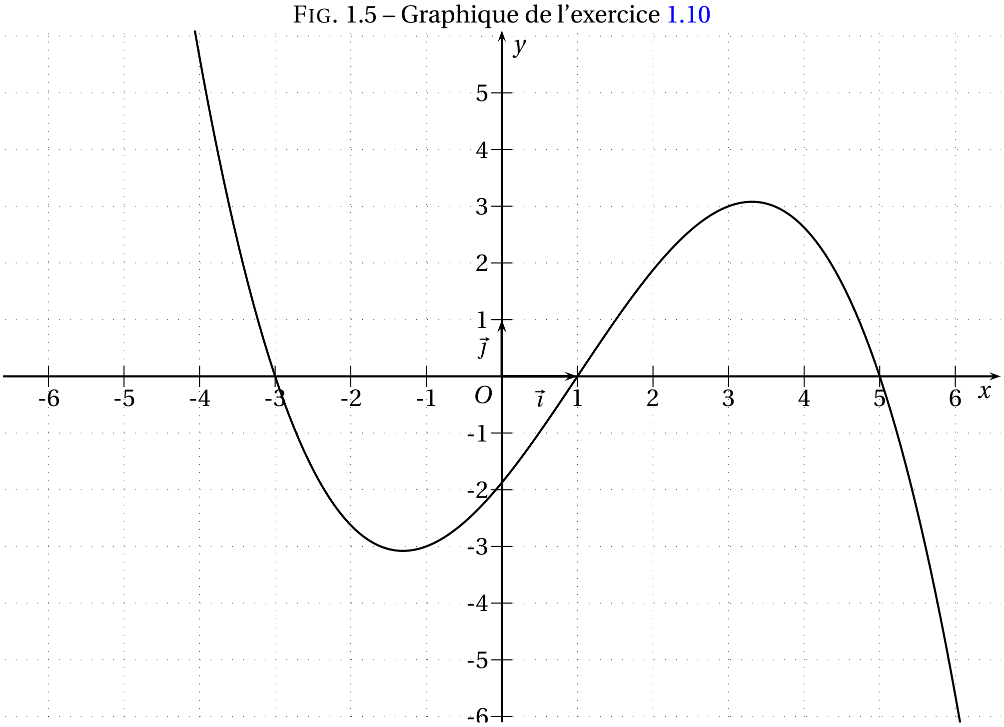
1. $f \circ g$ et pour $g \circ f$;
2. $f \circ h$ et pour $h \circ f$.

Exercice 1.8.
Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 1$ et $g(x) = 4x^3 - 3x$. Démontrer que $f \circ g = g \circ f$.

Exercice 1.9.
1. Donner une décomposition de la fonction f définie par $f(x) = (x-3)^2 + 2$ qui permette d'en déduire son sens de variation sur l'intervalle $]-\infty; 3]$ et décrire simplement comment obtenir la courbe représentative de f à partir de celle d'une fonction de référence.
2. Mêmes questions pour les fonctions suivantes :
   - $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$;
   - $f(x) = (x+1)^3 - 1$;
   - $f(x) = 3 - (x+1)^2$;
   - $f(x) = 3 + \dfrac{1}{2+x}$;
   - $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x-2}$;
   - $f(x) = -3\sqrt{x+1}$.

Exercice 1.10.
On a représenté sur la figure 1.5 de la présente page la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Y tracer les courbes des fonctions suivantes :
- $u = f + 2$;
- $v = -2f$;
- $w(x) = f(x+3)$;
- $z = |f|$.

FIG. 1.5 – Graphique de l'exercice 1.10



Exercice 1.11.
Soient f et g les fonctions définies par :
- $f(x) = \dfrac{2x+1}{x}$;
- $g(x) = \dfrac{2x-9}{x-4}$.

1. Quels sont leurs ensembles de définition ?
2. Déterminer les réels a, b, c et d tels que, pour tout réel x :
   - $f(x) = a + \dfrac{b}{x}$;
   - $g(x) = c + \dfrac{d}{x-4}$.
3. En déduire les tableaux de variations de ces deux fonctions.
4. (a) Vérifier que, pour tout réel t : $f(2+t) = g(2-t)$.
   (b) Que peut-on en déduire pour leurs représentations graphiques ?

Exercice 1.12.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 1}{x-3}$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel x, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-3}$.
2. Soit $\mathscr{D}$ la droite représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x + 1$. On pose $d(x) = f(x) - g(x)$.

(a) Étudier le signe de $d(x)$ selon les valeurs de x.

(b) En déduire la position de $\mathscr{C}$ par roppport à $\mathscr{D}$.

Exercice 1.13.

Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Étudier le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
3. Déterminer la position de la courbe de g par rapport à la droite d'équation $y = 1$ selon les valeurs de x.

Exercice 1.14.

1. On considère la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{-4}{x+1}$.

   À partir du tableau de variations de la fonction inverse, déduire, en justifiant, le tableau de variations de g et son ensemble de définition.
2. On considère la fonction f définie sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x+1}$.

   Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x+1}$
3. À l'aide des questions précédentes, déterminer les variations de la fonction f.
4. On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   (a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec chacun des axes du repère.
   (b) Montrer que le point $A(-1;0)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}$.
   (c) Placer les points trouvés aux questions précédentes dans un repère et tracer soigneusement $\mathscr{C}$.

Exercice 1.15.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{-x^2+5x-4}{x-2}$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. (a) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel x, $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-2}$.
   (b) En déduire les variations de f.
2. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite d'équation $y = -x+3$ selon les valeurs de x.
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.
4. Montrer que $\Omega(2;1)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}$.
5. Placer les points et les droites rencontrés dans les questions précédentes dans un même repère et y tracer $\mathscr{C}$.

Chapitre 2

Vecteurs de l'espace

Sommaire

2.1 Activités

Activité 2.1 (Sections planes).

Il s'agit dans cette activité de déterminer quelles peuvent être les intersections d'un *plan* et d'un solide usuel.[1] Plus précisément, on s'attachera à déterminer l'intersection du plan avec chacune des faces, l'ensemble formant une figure plane, puisqu'incluse dans le plan, qu'on appellera parfois la *trace* du plan sur le solide. Il s'agit avant tout de développer un *savoir-faire*, aucune notion ou propriété nouvelle n'étant au programme.

1. *Sections planes d'un tétraèdre*
   Dans le fichier *1SChp2Tetraedre.g3w*, qui s'ouvre avec le logiciel Geospace, on a représenté un tétraèdre $ABCD$.
   J est le point tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$.
   Dans chacun des cas suivants, placer les points I et K, puis, à l'aide des propriétés de géométrie dans l'espace vues en Seconde, construire sur le dessin en perspective la trace du plan (IJK) sur le tétraèdre $ABCD$.
   Attendre l'autorisation du professeur avant de passer au cas suivant.
   (a) $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$
   (b) $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
   (c) $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et K centre de gravité de ABC
   (d) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$
2. *Sections planes d'un cube*
   Dans le fichier *1SChp2Cube.g3w*, qui s'ouvre avec le logiciel Geospace, on a représenté un cube $ABCDEFGH$.
   I est le point tel que $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ et J est le milieu de $[HG]$.
   Dans chacun des cas suivants, placer le point K, puis, à l'aide des propriétés de géométrie dans l'espace vues en Seconde, construire sur le dessin en perspective la trace du plan (IJK) sur le cube $ABCDEFGH$.
   Attendre l'autorisation du professeur avant de passer au cas suivant.
   (a) $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$
   (b) $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{DC}$
   (c) $K = C$
   (d) K milieu de $[BC]$

Activité 2.2 (Vecteurs égaux).

$ABCDEFGH$ est un cube représenté sur la figure 2.1 page suivante. Les points P et Q sont tels que : $\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{EC}$.

1. (a) Construire le point P.
   (b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{EP}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{EH}$.

[1] Conformément au programme, on se limitera aux cubes et aux tétraèdres.

2. Construire le point Q et expliquer pourquoi les vecteurs $\overrightarrow{BQ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
3. (a) Expliquer pourquoi $\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{CQ}$.
   (b) Quelle est la nature du quadrilatère $HPQC$?

Activité 2.3.
$ABCD$ est un tétraèdre représenté sur la figure 2.2 de la présente page. I, J, K et L sont les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.

1. (a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IL}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BD}$.
   (b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{JK}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BD}$.
   (c) Que peut-on en conclure pour les points I, J, K et L ?
2. (a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$.
   (b) Que peut-on alors dire de ces trois vecteurs ?

FIG. 2.1 – Figure de l'activité 2.2

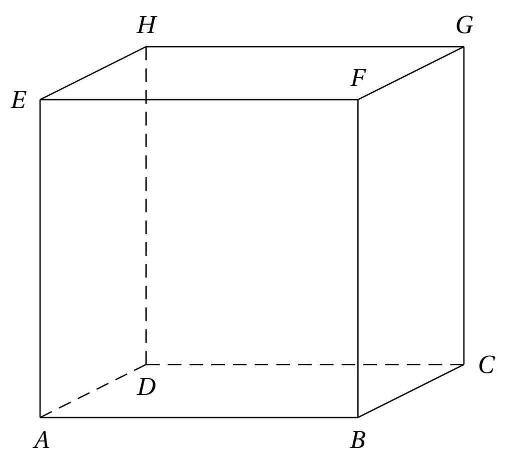
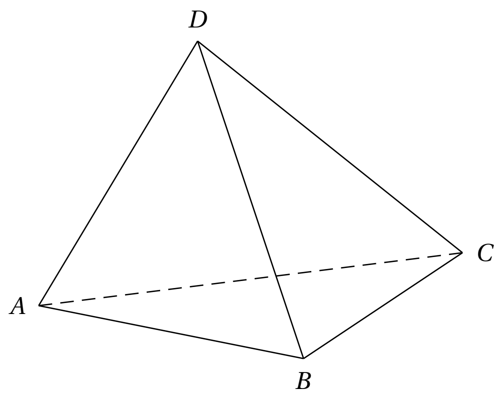


FIG. 2.2 – Figure de l'activité 2.3



2.2 Vecteurs de l'espace

Les définitions et propriétés concernant les vecteurs vues en Seconde dans le plan s'étendent naturellement à l'espace.

Il en va ainsi :

- de la définition d'un vecteur (direction, sens, norme) ;
- de la somme de deux vecteurs ;
- du produit d'un vecteur par un réel ;
- de la colinéarité de deux vecteurs ;
- de l'orthogonalité de deux vecteurs.

2.3 Définition vectorielle d'une droite et d'un plan

Définition 2.1. Soit A un point de l'espace et $\vec{v}$ un vecteur non nul de l'espace.
La droite Δ passant par A et ayant la même direction que celle de $\vec{v}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{v}$.
On pourra éventuellement noter $\Delta = (A; \vec{v})$.

Remarques.
- Une telle définition est tout à fait valable dans le plan.
- $\vec{v}$ et tous les vecteurs colinéaires à $\vec{v}$) sont appelés *vecteurs directeurs de* Δ.
- Le couple $(A; \vec{v})$ définit aussi un repère de Δ, c'est-à-dire qu'à tout point $M \in \Delta$, on peut associer un unique réel x permettant de repérer M par rapport à A : le réel tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{v}$.

Définition 2.2. Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires de l'espace.
Le plan $\mathscr{P}$ contenant A et deux représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'origine A est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
On pourra éventuellement noter $\mathscr{P} = (A; \vec{u}, \vec{v})$.

Remarque. Le triplet $(A; \vec{u}, \vec{v})$ définit un repère de $\mathscr{P}$, c'est-à-dire qu'à tout point $M \in \mathscr{P}$, on peut associer un unique couple $(x; y)$ permettant de repérer M par rapport à A : le couple tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

2.4 Vecteurs coplanaires

Définition 2.3 (Coplanarité de vecteurs)**.** Des vecteurs sont dits coplanaires si l'on peut trouver des représentants de ces vecteurs tels que leurs origines et leurs extrémités sont coplanaires.

Deux vecteurs sont toujours coplanaires puisqu'en prenant des représentants de ces vecteurs ayant la même origine on obtient trois points et trois points sont forcément coplanaires. La question ne se pose que lorsqu'il y a trois vecteurs (ou plus) et dans ce cas on a la propriété suivante :

Propriété 2.1. *Soient trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Ces trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si il existe un triplet $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ tel que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$.*

On l'admettra.

Remarque. Cette propriété n'est valable qu'avec trois vecteurs. Pour quatre vecteurs on trouve toujours $(a; b; c; d) \neq (0; 0; 0; 0)$ tel que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} + d\vec{x} = \vec{0}$ (admis). Il faudra donc, dans ce cas, montrer que trois d'entre eux sont coplanaires, par exemple $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, puis que le dernier est aussi coplanaire avec les précédents, par exemple $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{x}$.

Cette propriété est équivalente à la suivante, beaucoup plus facile à utiliser dans les démonstrations :

Propriété 2.2. *Soient trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Ces trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si il existe un couple $(\alpha; \beta)$ tel que $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$ (ou bien $\vec{v} = \alpha\vec{w} + \beta\vec{u}$, ou bien $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$).*

Démonstration de l'équivalence des deux propriétés.

- Supposons qu'il existe un triplet $(a;b;c) \neq (0;0;0)$ tel que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$.
  Ayant $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$, l'un au moins des trois réels est non nul. On peut supposer que c'est a.
  Alors $a\vec{u} = -b\vec{v} - c\vec{w} \Leftrightarrow \vec{u} = -\frac{b}{a}\vec{v} - \frac{c}{a}\vec{w}$.
- Supposons qu'il existe un couple $(\alpha; \beta)$ tel que $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$.
  Alors $\vec{u} - \alpha\vec{v} - \beta\vec{w} = \vec{0}$ donc le triplet $(1; -\alpha; -\beta)$ convient.

$\diamondsuit$

On a les conséquences suivantes à la coplanarité de trois vecteurs :

Propriété 2.3. *Soit A, B, C, D, E et F des points distincts de l'espace tels que A, B et C non alignés.*
- *Il existe $(a; b)$ tels que $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ si et seulement si A, B, C et D sont coplanaires.*
- *Il existe $(a; b)$ tels que $\overrightarrow{EF} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ si et seulement si la droite (EF) est parallèle au plan (ABC)*

Preuve.
- Le premier point découle de la définition des vecteurs coplanaires.
- $(EF)//(ABC) \Leftrightarrow$ il existe une droite parallèle à (EF) contenu dans le plan $(ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{EF} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$.

$\diamondsuit$

2.5 Exercices

Exercice 2.1.
$ABCD$ est un tétraèdre.

1. Construire les points E, F, G et H tels que :
   - $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$;
   - $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$;
   - $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$;
   - $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$.
2. Que peut-on dire des points E, F, G et H ?

Exercice 2.2.
$ABCD$ est un tétraèdre.
I et L sont les milieux respectifs de $[AD]$ et $[DC]$, J est le point tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et K est le point tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.
Les points I, J, K et L sont-ils coplanaires ?

Exercice 2.3.
$ABCDEFGH$ est un cube.
I, J et K sont les milieux respectifs de $[AD]$, $[BC]$ et $[FG]$.
On veut prouver que la droite (AK) est parallèle au plan (IJH).

1. Traduire par des relations vectorielles : « la droite (AK) est parallèle au plan (IJH). »
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AK}$ à l'aide de deux vecteurs formés avec les points I, J et K. Conclure.

Exercice 2.4.
$ABCDEFGH$ est un cube.
I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[AE]$, $[EH]$ et $[AD]$. G est le centre de gravité du triangle DCH.

1. Montrer que $(CK)//(IJB)$.
2. Montrer que $(KL)//(IJB)$.
3. Que peut-on en conclure ?
4. Tracer la trace de ces deux plans sur le cube.

Exercice 2.5.
$ABCD$ est un tétraèdre tel que les faces ABC, ACD et ADB sont des triangles rectangles en A et tel que BCD est un triangle équilatéral.
Soit G le centre de gravité du triangle BCD.

1. Démontrer que les triangles ABC, ABD et ACD sont isocèles.
2. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale aux droites (BC) et (BD).
3. En déduire que (AG) est perpendiculaire au plan (BCD).

Exercice 2.6.
Le plan est muni d'un repère orthonormal.

1. On donne $A(2;-1;3)$, $B(1;2;0)$, $C(-2;1;2)$ et $D(-1;-2;5)$.
   $ABCD$ est-il un parallélogramme ? Un rectangle ?
2. On donne $A(-3;1;4)$, $B(-2;-1;7)$, $C(-4;-1;-2)$ et $D(-5;-5;4)$.
   Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?
3. On donne $A(1;1;3)$, $B(\sqrt{2}+1;0;2)$ et $C(\sqrt{2}+1;2;2)$.
   Nature du triangle ABC ?
4. On donne $A(1;-2;3)$, $B(0;4;4)$ et $C(4;-20;0)$.
   Les points A, B et C sont-ils alignés ?

Exercice 2.7.
Dans le repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on donne les points $A(2;0;0)$, $B(0;3;1)$ et $C(5;1;3)$.

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle. Préciser le sommet de l'angle droit.
2. Soit M le point de coordonnées $(1;7;5)$. Démontrer que M est un point du plan (ABC).
3. Soit D le point de coordonnées $(9;16;-6)$. Démontrer que la droite (DM) est perpendiculaire au plan (ABC).
4. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

Exercice 2.8.
$ABCD$ est un tétraèdre.
Soit I milieu de $[BC]$, J milieu de $[CD]$, H centre de gravité du triangle BCD et K centre de gravité du triangle ACD.

1. Exprimer, dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$, les coordonnées des points I, J, K et H.
2. Soit G le point tel que $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AH}$. Quelles sont les coordonnées de G ?
3. Démontrer que $\overrightarrow{BG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BK}$.
4. Démontrer que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Exercice 2.9.
$ABCDEFGH$ est un cube de côté égal à 1.
On considère le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

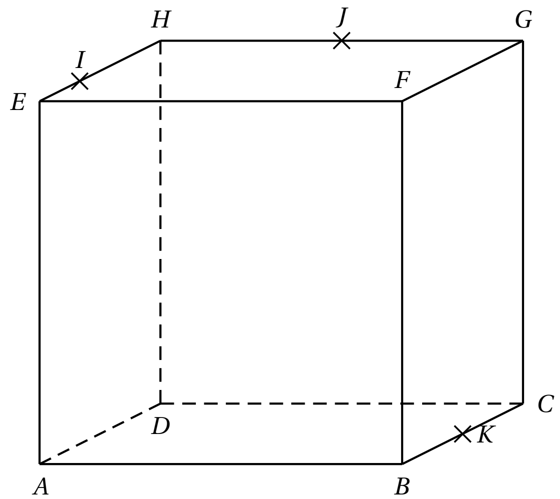
1. Calculer la longueur CE.
2. Calculer les coordonnées du centre de gravité I de AHF et du centre de gravité J de BDG.
3. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (AHF) ainsi qu'au plan (BDG). (Rappel : pour montrer que d'une droite d est orthogonale à un plan P, on montre qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 de P).
4. Démontrer que $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Devoir surveillé n°1

Généralités sur les fonctions – Sections planes

EXERCICE 1 *3 points*

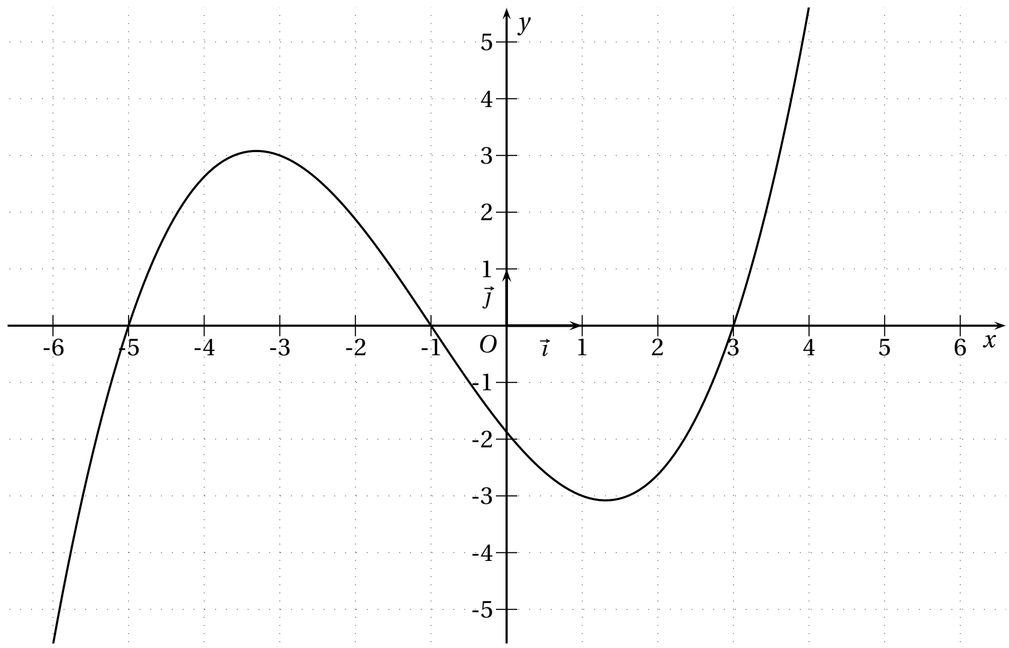
Tracer, sur le schéma de la présente page, la trace du plan (IJK) sur le cube $ABCDEFGH$ (*on ne demande aucune justification mais on laissera les traits de construction et on indiquera les parallélismes éventuels utilisés pour tracer les objets*).



EXERCICE 2 *3 points*

On a représenté sur la figure de la présente page la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Tracer les courbes des fonctions suivantes :

- $u = f + 2$;
- $v = -2f$;
- $w(x) = f(x+3)$;
- $z = |f|$.



EXERCICE 3 *4,5 points*

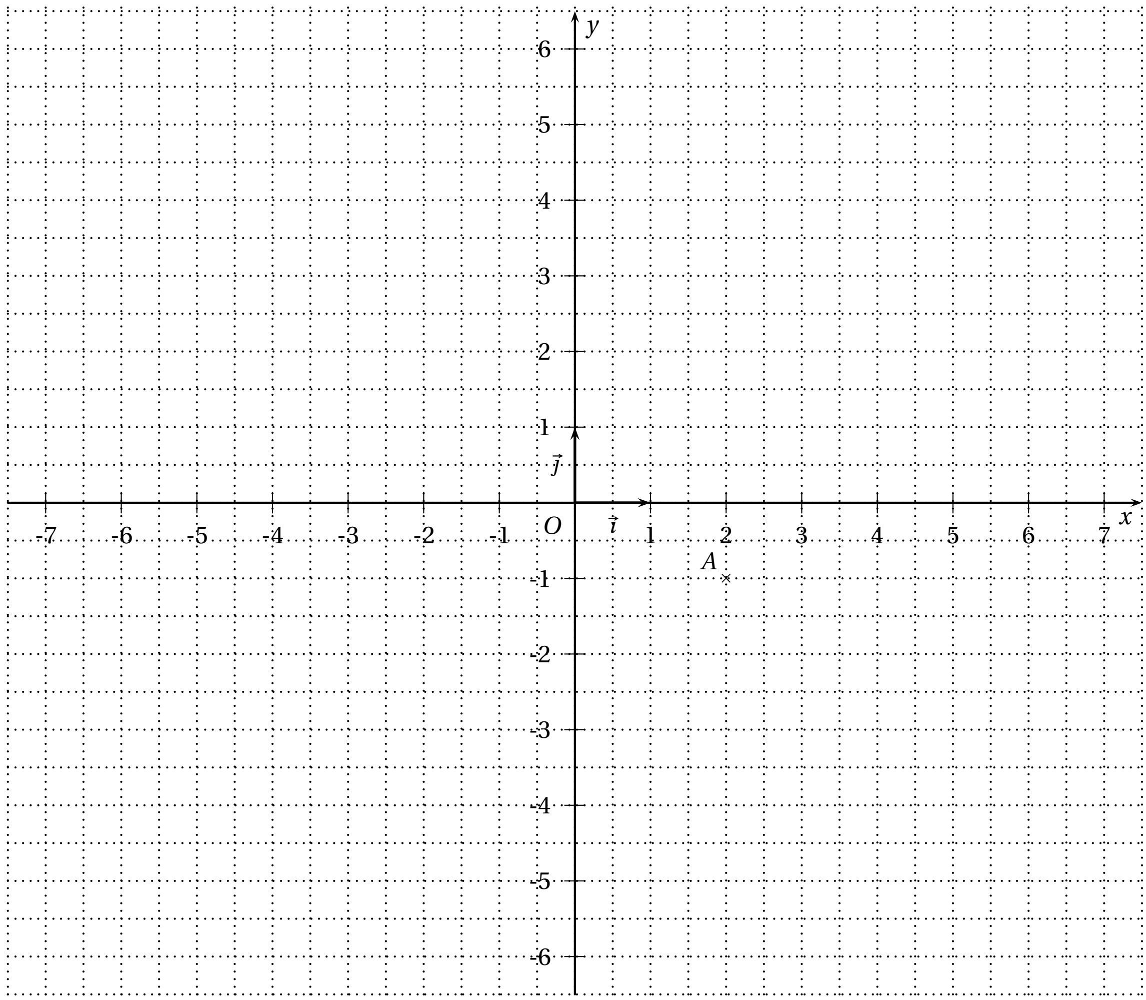
Déterminer les sens de variations des fonctions suivantes en indiquant les propriétés utilisées :

1. $f(x) = 5x + 3 - x^2$ sur $]-\infty ; 0]$;
2. $g(x) = 2\sqrt{x} + 3$ sur $[0 ; +\infty[$;
3. $h(x) = u \circ v(x)$ sur $]-\infty ; 0[$ avec $u(x) = 2x + 5$ et $v(x) = \dfrac{1}{x}$.

EXERCICE 4 *Étude d'une fonction (9,5 points)*

L'objectif de cet exercice est d'étudier la fonction $f(x) = \dfrac{-x^2+3x}{x-2}$ et de tracer $\mathscr{C}$, sa représentation graphique, dans le repère de la présente page.

1. On considère la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{2}{x-2}$
   À partir du tableau de variations de la fonction inverse, déduire, en justifiant, le tableau de variations de g et son ensemble de définition.
2. On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;2[\cup]2\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{-x^2+3x}{x-2}$
   Montrer que, pour tout $x \in]-\infty\,;2[\cup]2\,;+\infty[$, $f(x) = -x+1+\dfrac{2}{x-2}$
3. À l'aide des questions précédentes, déterminer les variations de la fonction f.
4. On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f.
   (a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec chacun des axes du repère.
   (b) Déterminer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses selon les valeurs de x.
   (c) Déterminer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -x+1$ selon les valeurs de x.
   (d) Montrer que le point $A(2\,;-1)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}$.
   (e) Placer dans le repère les éléments géométriques rencontrés dans la question 4 puis tracer soigneusement $\mathscr{C}$.



Chapitre 3

Second degré

Sommaire

3.1 Activités

Activité 3.1.
On appelle $\mathscr{C}_f$ la parabole représentant la fonction carré : $x \mapsto x^2$ dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On transforme la parabole $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $\vec{u} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$. On obtient une nouvelle courbe $\mathscr{C}_g$.

Déterminer, avec ce que vous savez sur les fonctions associées, la fonction g dont la courbe $\mathscr{C}_g$ est la courbe représentative.

Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Activité 3.2.
Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 + 6x + 5$. On appelle $\mathscr{C}_h$ sa courbe représentative.

1. Montrer que $h(x) = (x+3)^2 - 9 + 5$.
2. En déduire une transformation qui permet de passer de la courbe de la fonction carré $f : x \mapsto x^2$ à $\mathscr{C}_h$.
3. En déduire le tableau des variations de h et son extremum.
4. En déduire la (ou les) valeur(s) de x telle(s) que $h(x) = 0$, si il y en a.
5. Représenter $\mathscr{C}_h$ sur le repère précédent.

Plus généralement :

Propriété. *Toute fonction de type $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = \alpha(x+\beta)^2 + \gamma$ où α, β et γ sont des réels.*
Cette forme est appelée forme canonique.

Elle sera démontrée plus tard.

Activité 3.3. 1. Soit $g(x) = 2x^2 - x - 1$ et $f(x) = 2x^2$

(a) Mettre g sous forme canonique.

(b) En déduire la transformation qui permet de passer de la courbe de f à celle de g.
(c) En déduire les variations de k et son extremum.
(d) En déduire la (ou les) valeur(s) de x telle(s) que $g(x) = 0$, si il y en a.
(e) En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

2. Mêmes questions avec $g(x) = -x^2 + 2x - 4$ et $f(x) = -x^2$.
3. Mêmes questions avec $g(x) = 4x^2 + 4x + 1$ et $f(x) = 4x^2$.
4. Mêmes questions avec $g(x) = ax^2 + bx + c$ et $f(x) = ax^2$.

3.2 Trinôme

3.2.1 Définition, forme développée

Définition 3.1. On appelle *trinôme* toute expression qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$. Cette forme s'appelle la *forme développée* du trinôme.

3.2.2 Forme canonique

Théorème 3.1. *Tout trinôme $ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme $\alpha(x+\beta)^2 + \gamma$ où $\alpha = a$, $\beta = \dfrac{b}{2a}$ et $\gamma = -\dfrac{b^2-4ac}{4a}$. Cette forme s'appelle la* forme canonique *du trinôme.*

Preuve.

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \quad \text{car } a \neq 0 \\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - a\times\frac{b^2-4ac}{4a^2} \\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}
\end{aligned}$$

◊

3.2.3 Racines et discriminant

Définitions 3.2. Soit un trinôme $ax^2 + bx + c$. On appelle :
- *racine* du trinôme tout réel solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$;
- *discriminant* du trinôme, noté Δ, le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Remarque. La forme canonique s'écrit alors :

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Propriété 3.2. *Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.*
- *Si $\Delta < 0$, alors le trinôme **n'a pas de racine**.*
- *Si $\Delta = 0$, alors le trinôme a **une unique racine** : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.*
- *Si $\Delta > 0$, alors le trinôme a **deux racines** : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$*

Remarques.
- Le signe de Δ permet *discriminer* les équations de type $ax^2 + bx + c = 0$ qui ont zéro, une ou deux solutions, c'est la raison pour laquelle on l'appelle le *discriminant*[1].
- Si $\Delta = 0$ les formules permettant d'obtenir x_1 et x_2 donnent $x_1 = x_0$ et $x_2 = x_0$; pour cette raison, on appelle parfois x_0 la *racine double* du trinôme.

Preuve. On a vu que $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ donc $(\mathscr{E}) : ax^2+bx+c = 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$

[1] Discriminer. *v. tr.* Faire la discrimination, c'est-à-dire l'action de distinguer l'un de l'autre deux objets, ici des équations

- Si $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ alors ax^2+bx+c est égal à la somme de deux quantités positives (la seconde strictement) donc $ax^2+bx+c>0$ et $(\mathscr{E})$ n'a pas de solution. Or $-\frac{\Delta}{4a^2}>0 \Leftrightarrow \frac{\Delta}{4a^2}<0 \Leftrightarrow \Delta<0$.
- Si $-\frac{\Delta}{4a^2} = 0$ alors $ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ donc $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}$. $(\mathscr{E})$ a une unique solution. Or $-\frac{\Delta}{4a^2}=0 \Leftrightarrow \Delta=0$.
- Si $-\frac{\Delta}{4a^2}<0$ alors ax^2+bx+c est de la forme $a(A^2-B^2)$ donc :
  $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow (A^2-B^2)=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right)=0$
  donc deux solutions :
  1. $x=-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}}=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}$.
     Donc, si $a>0$, $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et, si $a<0$, $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
  2. $x=-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}}=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}$.
     Donc,si $a>0$, $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et, si $a<0$, $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

  Donc, dans tous les cas, $\mathscr{E}$ a deux solutions qui sont $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. Or $-\frac{\Delta}{4a^2}<0 \Leftrightarrow \frac{\Delta}{4a^2}>0 \Leftrightarrow \Delta>0$.

◊

3.2.4 Forme factorisée, signe d'un trinôme

Propriété 3.3. *Soit ax^2+bx+c un trinôme et $\Delta=b^2-4ac$ son discriminant.*
- *Si $\Delta<0$, le trinôme n'a pas de forme factorisée.*
- *Si $\Delta=0$, alors $ax^2+bx+c=a(x-x_0)(x-x_0)=a(x-x_0)^2$, où x_0 est la racine double.*
- *Si $\Delta>0$, alors $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, où x_1 et x_2 sont les racines.*

Cette écriture, lorsqu'elle existe, est appelée forme factorisée *du trinôme.*

Preuve. On a vu que $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$
- On admettra que si $\Delta<0$, le trinôme n'a pas de forme factorisée.
- Si $\Delta=0$ alors $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=a\left(x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2=a(x-x_0)^2$.
- Si $\Delta>0$ alors

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=a\left(x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right)\\ &= a\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=a\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\\ &= a(x-x_1)(x-x_2)\end{aligned}$$

◊

Propriété 3.4. *Soit ax^2+bx+c un trinôme.*
- *Si $\Delta<0$, ax^2+bx+c est strictement du signe de a pour tout x.*
- *Si $\Delta=0$, ax^2+bx+c est strictement du signe de a pour tout $x\neq-\frac{b}{2a}$ et s'annule en $x=-\frac{b}{2a}$.*
- *Si $\Delta>0$, le trinôme a deux racines x_1 et x_2 et ax^2+bx+c est :*
  - *strictement du signe de a quand $x\in]-\infty;x_1[\cup]x_2;+\infty[$;*
  - *strictement du signe opposé de a quand $x\in]x_1;x_2[$;*
  - *s'annule en x_1 et en x_2.*

On peut aussi énoncer cette propriété de la façon synthétique suivante :

Propriété 3.5. *Un trinôme ax^2+bx+c est du signe de a sauf entre les racines, si elles existent.*

Preuve. On a vu que $ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$
- Dans le cas où $\Delta<0$, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}$ est la somme de deux quantités positives, la seconde strictement, donc le signe de ax^2+bx+c est strictement celui de a.
- Dans le cas où $\Delta=0$, $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, donc le signe de ax^2+bx+c est celui de a. Plus précisement : il ne s'annule qu'en $x_0=-\frac{b}{2a}$ et est sinon strictement du signe de a.

- Dans le cas où $\Delta > 0$, $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines. En supposant que $x_1 < x_2$ (sinon il suffit d'inverser les racines), le tableau de signe ci-desous donne le résultat.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$(x-x_1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-x_2)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-x_1)(x-x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

◊

3.3 Fonction trinôme

3.3.1 Définition

Définition 3.3. On appelle *fonction trinôme* une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, qui à x associe $f(x) = ax^2+bx+c$ où $a \neq 0$.

3.3.2 Sens de variation

Propriété 3.6. *Soit $f(x) = ax^2+bx+c$ une fonction trinôme. Alors f a les variations résumées dans les tableaux ci-dessous :*

- *Si $a > 0$:*

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
f	$+\infty$ ↘	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↗ $+\infty$

- *Si $a < 0$:*

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↘ $-\infty$

Preuve. Comme $f(x) = ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$, f est une fonction associée à la fonction carrée et, avec les propriétés des fonctions associées, on a les tableaux de variations indiqués.
En particulier : si $a > 0$ les sens de variations de la fonction carrée ne sont pas inversés, si $a < 0$, ils le sont. ◊

3.3.3 Courbe représentative

Propriété 3.7. *La courbe représentative d'une fonction trinôme $f(x) = ax^2+bx+c$ est obtenue à partir de celle de la fonction $x \mapsto ax^2$ par une translation de vecteur : $\vec{u}\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.*

Preuve. Comme $f(x) = ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$, f est une fonction associée à la fonction $x \mapsto ax^2$ et donc ... ◊

Propriété 3.8. *La courbe représentative d'une fonction trinôme $f(x) = ax^2+bx+c$ admet la droite d'équation $\mathcal{D}$ d'équation $x = -\frac{b}{2a}$ comme axe de symétrie.*

Preuve. On peut le démontrer de deux façons :

- Comme $f(x) = ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$, f est une fonction associée à la fonction $x \mapsto ax^2$ et que la courbe représentative de cette fonction admet l'axe des ordonnées, d'équation $x = 0$ comme axe de symétrie, celle de f admet l'image de cet droite comme axe de symétrie par la translation de vecteur $\vec{u}\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, c'est-à-dire $\mathcal{D}$
- Ou bien :

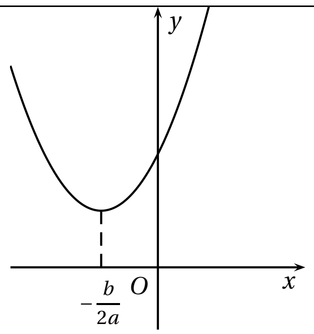
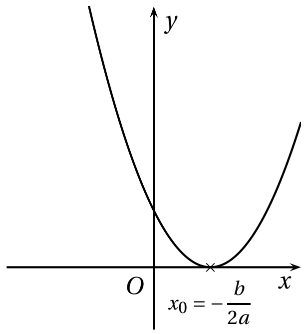
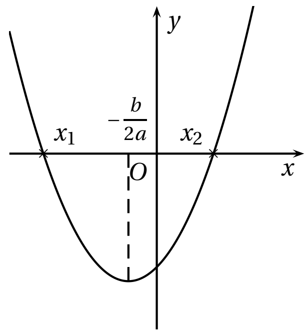
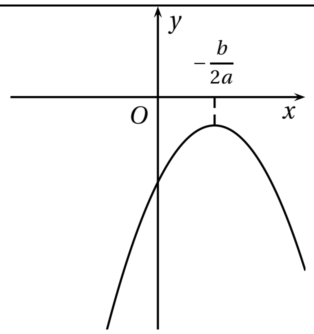
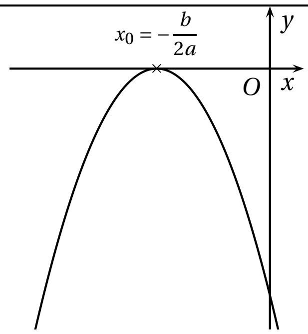
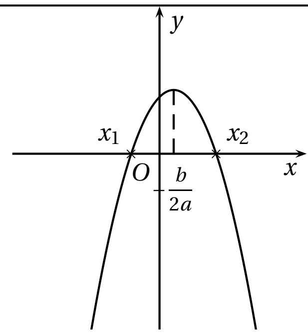
$$\left.\begin{array}{l} f(-\frac{b}{2a}+h) = a\left(-\frac{b}{2a}+h+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = ah^2 - \frac{\Delta}{4a} \\ f(-\frac{b}{2a}-h) = a\left(-\frac{b}{2a}-h+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = ah^2 - \frac{\Delta}{4a} \end{array}\right\} \text{donc } f(-\frac{b}{2a}+h) = f(-\frac{b}{2a}-h).$$

◊

3.4 Bilan

Un bilan des principales propriétés vous est proposé sous forme de tableau page ci-contre.

TAB. 3.1 – Bilan du second degré

	$\Delta = b^2 - 4ac$		
	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
	$ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$	$ax^2+bx+c=0$ a une solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$	$ax^2+bx+c=0$ a deux solutions $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
	ax^2+bx+c n'a pas de racine	ax^2+bx+c a une racine double	ax^2+bx+c a deux racines
	Aucune factorisation	$ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$	$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$
Si $a > 0$			
	$ax^2+bx+c > 0$ sur $\mathbb{R}$	$ax^2+bx+c \geq 0$ sur $\mathbb{R}$	$ax^2+bx+c \geq 0$ sur $]-\infty\,;\,x_1] \cup [x_2\,;\,+\infty[$ et $ax^2+bx+c \leq 0$ sur $[x_1\,;\,x_2]$
Si $a < 0$			
	$ax^2+bx+c < 0$ sur $\mathbb{R}$	$ax^2+bx+c \leq 0$ sur $\mathbb{R}$	$ax^2+bx+c \leq 0$ sur $]-\infty\,;\,x_1] \cup [x_2\,;\,+\infty[$ et $ax^2+bx+c \geq 0$ sur $[x_1\,;\,x_2]$

3.5 Exercices et problèmes

3.5.1 Exercices

Exercice 3.1.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $x^2 = 9$;
- $x^2 = -3$;
- $(x-5)^2 = 3$;
- $(2x-1)^2 + x(1-2x) = 4x^2 - 1$;
- $(3x+5)^2 = (x+1)^2$;
- $(5x-4)^2 - (3x+7)^2 = 0$.

Exercice 3.2.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $4x^2 - x - 3 = 0$;
- $(t+1)^2 + 3 = 0$;
- $2(2x+1)^2 - (2x+1) - 6 = 0$;
- $x^2 + 10^{50}x + 25 \times 10^{98} = 0$.

Exercice 3.3.
Soit P la fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$).
Montrer que si a et c sont de signes opposés alors P admet au moins une racine réelle.
La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 3.4.
Soit P la fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 + bx + c$ admettant deux racines x_1 et x_2 (éventuellement confondues).
À l'aide de la forme factorisée du trinôme, exprimer b et c en fonction de x_1 et de x_2.

Exercice 3.5.
Résoudre les équations suivantes :

- $x^2 = \frac{1}{2}$
- $x^2 = \frac{1}{3}$.
- $6x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

Exercice 3.6.
Résoudre l'équation $2004x^4 + x^2 - 2005 = 0$.

Exercice 3.7.
On note $P(x) = -2x^2 + 7x - 5$.

1. Résoudre l'équation : $P(x) = 0$.
2. Factoriser $P(x)$.
3. Résoudre l'inéquation : $P(x) \leq 0$.

Exercice 3.8.
Résoudre les équations suivantes :

- $\dfrac{2x-5}{x-1} = \dfrac{x-1}{x+1}$
- $\dfrac{x^2-x+1}{x+2} = 2x+3$

Exercice 3.9.
Résoudre l'équation : $\sqrt{x+1} = 2x-3$.

Exercice 3.10.
Résoudre les inéquations suivantes :

- $-x^2 + 9x + 22 \geq 0$;
- $(x^2 + 2x + 1)^2 < 16$;
- $\dfrac{-x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x - 10} > 0$.

Exercice 3.11.
Déterminer le signe de $\dfrac{x^2 + 10x + 25}{-2x^2 - 7x - 3}$ selon les valeurs de x.

Exercice 3.12.
Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 13x + 15$.

1. Montrer que $x = -1$ est racine de ce polynôme.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que $f(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$.
3. (a) Terminer la factorisation de $f(x)$.
   (b) Résolvez l'inéquation $f(x) > 0$.

Exercice 3.13.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2+2x+1$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

1. Précisez la nature de la courbe $\mathscr{C}$ et les coordonnées de son sommet S.
2. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en deux points A et B dont on précisera les coordonnées.
3. Pour quelles valeurs de x la courbe $\mathscr{C}$ est-elle situé au dessus de l'axe des abscisses ?

Exercice 3.14.

On donne le trinôme P défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = 4x^2 - \left(\sqrt{6}+4\sqrt{3}\right)x + \sqrt{18}$

1. Montrer que P admet $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ pour racine.
2. Trouver l'autre racine (valeur exacte).

Exercice 3.15.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2-3x-3}{x-2}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$, $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-2}$.
2. En déduire les variations de f.
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.
4. Montrer que $\Omega(2;5)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}$.
5. Déterminer les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2x+1$ selon les valeurs de x.
6. Placer dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ les points rencontrés dans les questions précédente, tracer la droite $\mathscr{D}$ puis la courbe $\mathscr{C}$.

3.5.2 Problèmes

Problème 3.1.

Trouver deux nombres dont la somme est égale à 57 et le produit égal à 540.

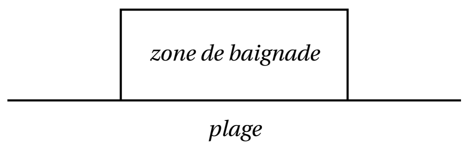
Problème 3.2.

$ABCD$ est un rectangle de largeur x et de longueur $1-x$ (avec $0 < x \leq \frac{1}{2}$).

1. Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire du rectangle est-elle égale à $\frac{2}{9}$?
2. Pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire du rectangle est-elle maximale ?

Problème 3.3.

Une zone de baignade rectangulaire est délimitée par une corde (agrémentée de bouées) de longueur 50 m. Quelles doivent être les dimensions de la zone pour que la surface soit maximale ?



Problème 3.4.

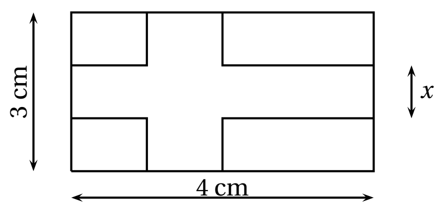
Dans un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 4$ cm et $AC = 6$ cm, on place les points D et E respectivement sur $[AC]$ et $[AB]$ tels que $AD = BE = x$. Déterminer x pour que l'aire du triangle ADE soit égale à la moitié de celle du triangle ABC.

Problème 3.5.

Peut-on trouver trois carrés ayant pour côtés des entiers consécutifs et dont la somme des aires est 15125 ? Si oui, préciser quelles sont les valeurs que doivent avoir les côtés. Même question avec 15127.

Problème 3.6.

Quelle largeur doit-on donner à la croix pour que son aire soit égale à l'aire restante du drapeau ?

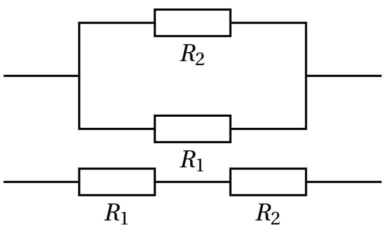


Problème 3.7.

Pour se rendre d'une ville A à une ville B distantes de 195 km, deux cyclistes partent en même temps. L'un d'eux, dont la vitesse moyenne sur ce parcours est supérieure de 4 km/h à celle de l'autre, arrive 1 heure plus tôt. Quelles sont les vitesses des deux cyclistes ?

Problème 3.8.

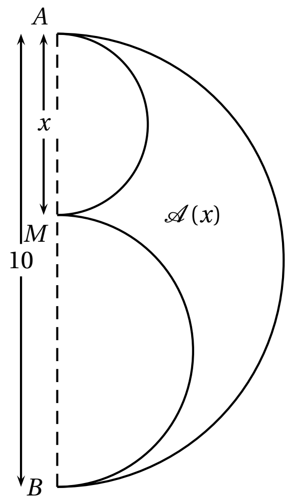
Le montage en dérivation ci-dessous a une résistance de 1,5 kΩ.
Le montage en série ci-desous a une résistance de 8 kΩ.
Calculer les valeurs des résistances R_1 et R_2.



Problème 3.9.

On fabrique une plaque de tôle de la manière suivante : à partir d'un demi-disque de diamètre $[AB]$, on enlève deux demi-disques de diamètres respectifs $[AM]$ et $[MB]$, avec $M \in [AB]$. On pose : $AB = 10$ cm et $AM = x$ cm.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
2. Montrer que l'aire $\mathscr{A}(x)$ de la plaque de tôle est : $\mathscr{A}(x) = \frac{\pi}{4}\left(-x^2 + 10x\right)$
3. Pour quelle(s) valeur(s) de x a-t-on :
   (a) $\mathscr{A}(x) = 0$?
   (b) $\mathscr{A}(x) = 3\pi$?
   (c) $\mathscr{A}(x) = 7\pi$?
4. (a) Montrer que $\mathscr{A}(x)$ atteint une valeur maximale.
   (b) Quelle est cette valeur maximale et pour quelle valeur de x est-elle atteinte ?
   (c) Où se situe alors M ?



Devoir maison n°2

Droites et parabole

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ on considère les points $A(0\,;-4)$, $F(1\,;0)$ et une amie familière : la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y=\dfrac{x^2+1}{2}$.

On s'intéresse aux droites $\mathscr{D}_m$ d'équation $y=mx+p$ passant par $O(0\,;0)$ et aux droites Δ_m d'équation $y=m'x+p'$ passant par A.

L'objectif du devoir est de déterminer, en fonction de m, p, m' et p' le nombre d'intersections de ces droites avec la parabole $\mathscr{P}$.

Exercice 1 *Avec un logiciel*

Les éléments de l'énoncé ont été représentés dans le fichier 1SDM2.ggb, disponible dans la rubrique Documents : 1S du site http://perpendiculaires.free.fr/ et qui s'ouvre avec le logiciel GeoGebra.
On y a aussi représenté une droite d verticale, d'équation $x=6$, et un point M, libre sur la droite d.

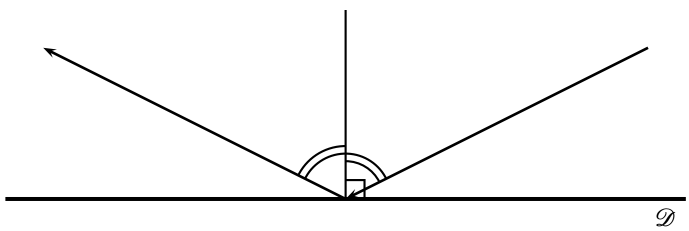
1. Conjecturer, à l'aide du logiciel, la valeur de p et, selon les valeurs de m, le nombre d'intersections entre $\mathscr{D}_m$ et $\mathscr{P}$. On pourra s'aider du point libre.
   On veillera à décrire assez précisément comment cette conjecture a été obtenue et à fournir le fichier avec sa copie.
2. Mêmes questions pour Δ_m.

Exercice 2 *Par le calcul*

1. On s'intérresse ici uniquement à la droite $\mathscr{D}_m$.
   (a) Déterminer par le calcul la valeur de p.
   (b) Déterminer par le calcul le nombre d'intersection ainsi que leurs coordonnées, quand elles existent, entre $\mathscr{D}_m$ et $\mathscr{P}$ lorsque :
      - $m=2$;
      - $m=0,5$.
   (c) Déterminer par le calcul la (ou les) valeur(s) de m pour que l'intersection entre $\mathscr{D}_m$ et $\mathscr{P}$ se réduise à un unique point B dont on précisera les coordonnées. On appelera cette droite $\mathscr{D}$ pour la suite.
   (d) Démontrer la conjecture de l'exercice 1.
2. (a) Déterminer par le calcul la valeur de p'.
   (b) Déterminer par le calcul la (les) valeur(s) de m pour que l'intersection entre Δ_m et $\mathscr{P}$ se réduise à un unique point C dont on précisera les coordonnées. On appelera cette droite Δ pour la suite.
   (c) Démontrer la conjecture de l'execice 1.

Exercice 3 *Une conjecture*

On admet qu'un rayon lumineux se reflète sur la parabole en B (respectivement en C) comme si la parabole était la droite $\mathscr{D}$ (respectivement Δ) selon les lois de l'optique (voir schéma).



1. Montrer que le reflet d'un rayon vertical (parallèle à l'axe des ordonnées) frappant la parabole en B passera par F.
2. Montrer que le reflet d'un rayon vertical (parallèle à l'axe des ordonnées) frappant la parabole en C passera par F (*on pourra montrer que le triangle AFC est isocèle*)
3. Conjecturer une propriété de la parabole permettant d'expliquer pourquoi certaines antennes sont de forme parabolique.

Devoir surveillé n°2

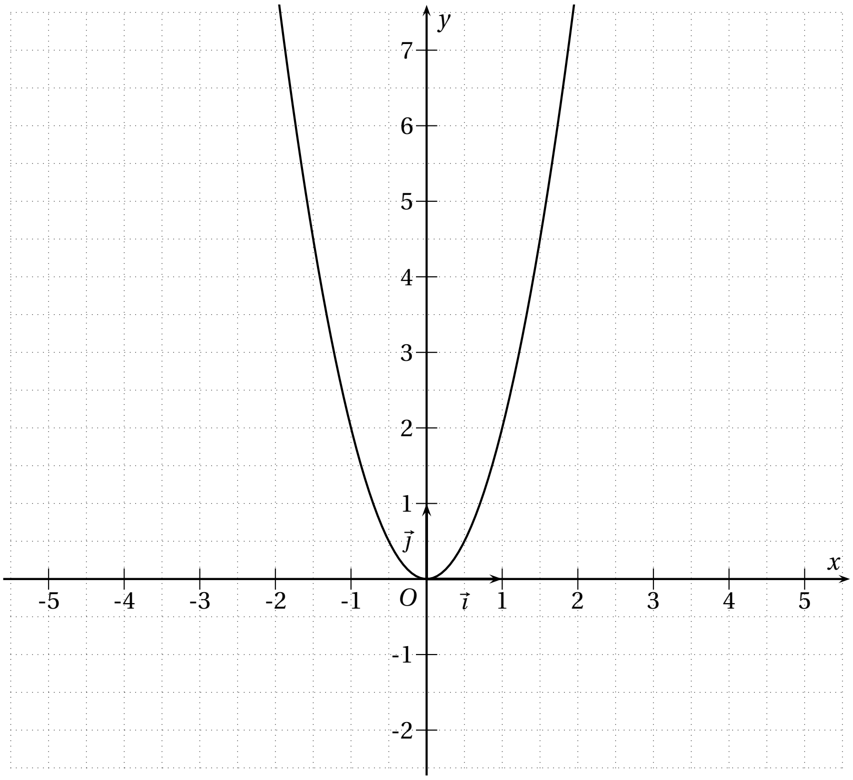
Vecteurs de l'espace – Second degré

EXERCICE 1 *5 points*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer la forme canonique de $2x^2 - 8x + 6$.
2. En déduire :
   (a) les variations de f ainsi que son extremum ;
   (b) la résolution de l'équation $f(x) = 0$;
   (c) le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x ;
   (d) comment passer de la courbe de la fonction $g : x \longmapsto 2x^2$ à $\mathscr{C}$.
3. Tracer $\mathscr{C}$ dans le repère ci-dessous (la courbe tracée est celle de g de la question 2d).

FIG. 3.1 – Graphique de l'exercice 1



EXERCICE 2 *6 points*

$ABCD$ est un tétraèdre. I, J, K et L sont les points tels que :

- $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$;
- $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$;
- K est le centre de gravité du triangle ABC ;
- $\overrightarrow{DL} = \frac{4}{3}\overrightarrow{DB}$.

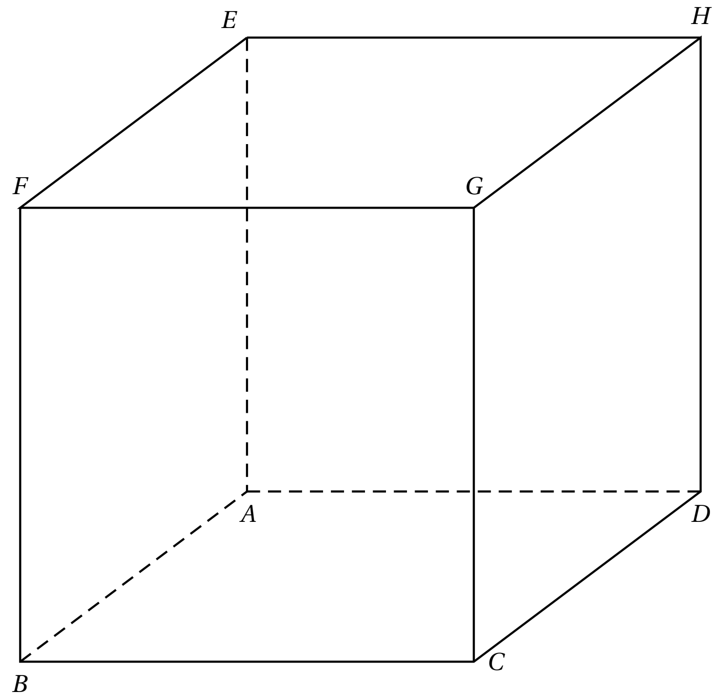
1. Déterminer si la droite (IJ) est parallèle au plan (BCD).
2. Déterminer si les points I, J, K et L sont coplanaires.

EXERCICE 3 *9 points*

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 1 m, I, J et K les milieux respectifs de $[AB]$, $[GH]$ et $[FG]$ et L le centre du cube (c'est-à-dire l'intersection et milieu des diagonales principales du cube).

1. (a) Montrer que I, J et L sont alignés.
   Que peut-on en déduire pour les points I, J, K et L ?
   (b) i. Montrer que ELI est rectangle.
   ii. Montrer que ELK est rectangle.
   iii. Que peut-on en conclure ?
   (c) Montrer que le triangle IJK est rectangle.
   (d) En déduire le volume du tétraèdre[2] $IJKE$.
2. Construire en rouge sur le schéma ci-dessous, sans justifier, la trace de (IJK) sur le cube.

FIG. 3.2 – Graphique de l'exercice 3



[2]On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule : Volume = $\frac{1}{3}$aire de la base × hauteur

Chapitre 4

Angles orientés

Sommaire

4.1 Activité

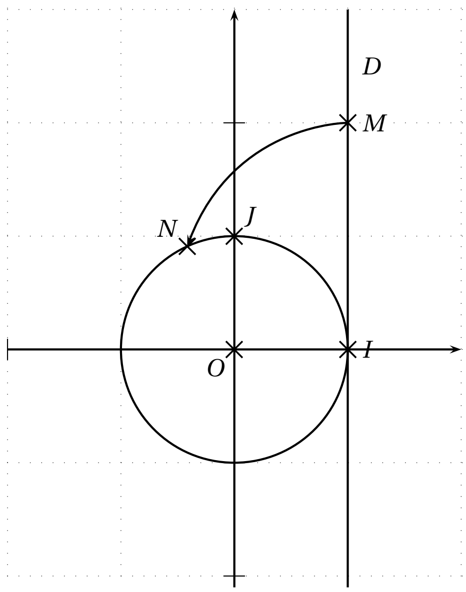
Soit un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 et la droite D d'équation $x = 1$ qui coupe l'axe (Ox) en I.

À tout nombre a, on associe le point M de la droite D, d'abscisse 1 et d'ordonnée a.

« L'enroulement » de la droite D autour du cercle $\mathscr{C}$ met en coïncidence le point M avec un point N de $\mathscr{C}$.

Plus précisément, si a est positif, le point N est tel que $\overset{\frown}{IN} = IM = a$, l'arc étant mesuré dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et, si a est négatif, le point N est tel que $\overset{\frown}{IN} = IM = |a|$, l'arc étant mesuré dans le sens des aiguilles d'une montre.

Le point N est le point du cercle $\mathscr{C}$ associé au nombre a.



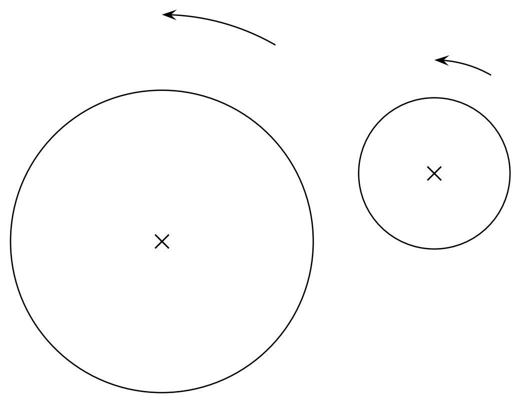
Activité 4.1. 1. Placer les points de la droite M_i dont les ordonnées y_i sont données par le tableau suivant :

M_i	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9
y_i	0	$\dfrac{\pi}{2}$	$-\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$-\dfrac{\pi}{3}$	π	$-\pi$	2π	-2π

Refaire le dessin sur votre feuille au besoin.

2. Placer les points N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9 du cercle associés à ces nombres.
3. Indiquer un nombre associé à chacun des points I, J, $B(-1;0)$ et $B'(0;-1)$.
4. Existe-t-il plusieurs nombres associés à un même point ?
   Si oui, donner quatre nombres associés au point J.

4.2 Orientation du plan



Définition 4.1 (Orientation d'un cercle, du plan, cercle trigonométrique)**.** On utilisera le vocabulaire suivant :
- *Orienter un cercle*, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle appelé *sens direct* (ou positif). L'autre sens est appelé *sens indirect* (négatif ou rétrograde).
- *Orienter le plan*, c'est orienter tous les cercles du plan dans le même sens. L'usage est de choisir pour sens direct le sens contraire des aiguilles d'une montre (appelé aussi *sens trigonométrique*).
- *Un cercle trigonométrique* est un cercle orienté dans le sens direct et de rayon 1. Lorsque le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, le cercle trigonométrique est le cercle orienté dans le sens direct, de centre O et de rayon 1.

Dans la suite du chapitre, on suppose que le plan est orienté dans le sens trigonométrique.

Définition 4.2 (Abscisse curviligne, arc orienté, mesures d'un arc orienté)**.** Le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. Soit $I(0;1)$ un point du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ la tangente en I à $\mathscr{C}$, munie du repère $(I;\vec{\jmath})$ (voir schéma 4.1).
- On appelle *abscisse curviligne* d'un point M du cercle trigonométrique, l'abscisse de tout point N de la droite $\mathscr{D}$ associé à M par enroulement. (Remarque : un point à plusieurs abscisses curvilignes).
- Si les points A et B du cercle trigonométrique ont pour abscisses curvilignes α et β, alors le couple $(A;B)$ est appelé *arc orienté* et noté $\overset{\curvearrowright}{AB}$.
- Une des *mesures de l'arc orienté* $\overset{\curvearrowright}{AB}$ est $\beta-\alpha$.

4.3 Mesures de l'angle orienté d'un couple de vecteurs non nuls

4.3.1 Ensemble des mesures

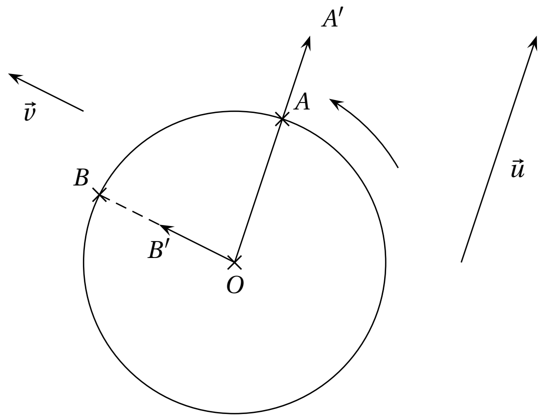
Définition 4.3 (Angle orienté)**.** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté. On appelle *angle orienté*, noté $(\vec{u};\vec{v})$, le couple de ces deux vecteurs.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté, O un point quelconque et $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O.
On considère A' et B' les points définis par $\overrightarrow{OA'}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB'}=\vec{v}$.
Les demi-droites $[OA')$ et $[OB')$ coupent le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ respectivement en A et en B (voir le schéma page suivante).

Définition 4.4 (Mesures d'un angle orienté)**.** Une *mesure* de l'angle orienté $(\vec{u};\vec{v})$, en radian, est une mesure de l'arc orienté associé $\overset{\curvearrowright}{AB}$ du cercle trigonométrique.

Remarque.
- Si une des mesures de $(\vec{u};\vec{v})$ est α, alors toutes les mesures sont de la forme $\alpha+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
- Par abus de langage, on confond un angle et ses mesures.
  On écrit par exemple $(\vec{u};\vec{v})=\frac{\pi}{2}$ signifiant **qu'une** des mesures de $(\vec{u};\vec{v})$ est $\frac{\pi}{2}$, les autres étant de la forme $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
  On écrit aussi $(\vec{u};\vec{v})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, ou encore $(\vec{u};\vec{v})=\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ qui se lit « $\frac{\pi}{2}$ *modulo* 2π ».

FIG. 4.1 – Mesures d'un angle orienté



4.3.2 Mesure principale d'un angle orienté

Définition 4.5 (Mesure principale)**.** La *mesure principale* d'un angle orienté est l'unique mesure de cet angle orienté qui appartient à $]-\pi\,;\pi]$.

4.3.3 Angle nul, angle plat, angles droits

Définition 4.6 (Colinéarité, orthogonalité)**.** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté.

- Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que la mesure principale de $(\vec{u}\,;\vec{v})$ est 0 (angle nul) ou est π (angle plat).
- Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux revient à dire que la mesure principale de $(\vec{u}\,;\vec{v})$ est $\frac{\pi}{2}$ (angle droit direct) ou $-\frac{\pi}{2}$ (angle droit indirect).

Définition 4.7 (Repère orthonormal direct ou indirect)**.** Soit $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ un repère du plan. On dit que $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ est :

- *direct* si une des mesures de $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ est $\frac{\pi}{2}$;
- *indirect* si une des mesures $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ est $-\frac{\pi}{2}$.

4.4 Propriétés des mesures des angles orientés

4.4.1 Propriétés de base

Propriété 4.1. *Soit un vecteur non nul $\vec{u}$ du plan orienté et $k \in \mathbb{R}$.*

- $(\vec{u}\,;\vec{u}) = 0$ *et* $(\vec{u}\,;-\vec{u}) = \pi$.
- *Si* $k > 0$ *alors* $(\vec{u}\,;k\vec{u}) = 0$.
- *Si* $k < 0$ *alors* $(\vec{u}\,;k\vec{u}) = \pi$.

Preuve. Cela découle de la définition 6. ♢

4.4.2 Relation de CHASLES

Propriété 4.2. *Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté.*

$$(\vec{u}\,;\vec{v}) + (\vec{v}\,;\vec{w}) = (\vec{u}\,;\vec{w})$$

On l'admettra.

4.4.3 Conséquences de la propriété de base et de la relation de CHASLES

Propriété 4.3. *Soit $\vec{u}$ et $\vec{u}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté, k et k' deux réels.*

- $(\vec{u}\,;\vec{v}) = -(\vec{v}\,;\vec{u})$.
- $(\vec{u}\,;-\vec{v}) = (\vec{u}\,;\vec{v}) + \pi$.
- $(-\vec{u}\,;\vec{v}) = (\vec{u}\,;\vec{v}) + \pi$.
- $(-\vec{u}\,;-\vec{v}) = (\vec{u}\,;\vec{v})$.
- *Si k et k' sont de même signe,* $(k\vec{u}\,;k'\vec{v}) = (\vec{u}\,;\vec{v})$.
- *Si k et k' sont de signes opposés,* $(k\vec{u}\,;k'\vec{v}) = (\vec{u}\,;\vec{v}) + \pi$.

Preuve.

- $(\vec{u}\,;\vec{v}) + (\vec{v}\,;\vec{u}) = (\vec{u}\,;\vec{u}) = 0$ donc $(\vec{u}\,;\vec{v}) = -(\vec{v}\,;\vec{u})$.

- $(\vec{u};-\vec{v})-(\vec{u};\vec{v})=(\vec{u};-\vec{v})+(\vec{v};\vec{u})=(\vec{v};\vec{u})+(\vec{u};-\vec{v})=(\vec{v};-\vec{v})=\pi$ donc $(\vec{u};-\vec{v})=(\vec{u};\vec{v})+\pi$.
- $(-\vec{u};\vec{v})-(\vec{u};\vec{v})=(-\vec{u};\vec{v})+(\vec{v};\vec{u})=(-\vec{u};\vec{u})=\pi$ donc $(-\vec{u};\vec{v})=(\vec{u};\vec{v})+\pi$.
- $(-\vec{u};-\vec{v})-(\vec{u};\vec{v})=(\vec{u};-\vec{v})+\pi-(\vec{u};\vec{v})=(\vec{u};\vec{v})+2\pi-(\vec{u};\vec{v})=0$ donc $(-\vec{u};-\vec{v})=(\vec{u};\vec{v})$.
- Si k et k' positifs alors $(k\vec{u};k'\vec{v})=(\vec{u};k'\vec{v})=(\vec{u};\vec{v})$.
  Si k et k' négatifs alors $(k\vec{u};k'\vec{v})=(\vec{u};k'\vec{v})+\pi=(\vec{u};\vec{v})+2\pi=(\vec{u};\vec{v})$.
- Si k négatif et k' positif alors $(k\vec{u};k'\vec{v})=(\vec{u};k'\vec{v})+\pi=(\vec{u};\vec{v})+\pi$.
  Si k positif et k' négatif alors $(k\vec{u};k'\vec{v})=(\vec{u};k'\vec{v})=(\vec{u};\vec{v})+\pi$.

♢

4.5 Cosinus et sinus d'un angle orienté

Sauf indication contraire, l'unité utilisée est le radian. Le plan orienté est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$; on considère le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O.

Définition 4.8 (Cosinus et sinus d'un réel)**.** Pour tout réel x, il existe un point M unique du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ tel que x soit une mesure de $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}\right)$.
- L'abscisse du point M est le cosinus de x (noté $\cos x$).
- L'ordonnée du point M est le sinus de x (noté $\sin x$)

Définition 4.9 (Cosinus et sinus d'un angle orienté)**.** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Le cosinus (resp. le sinus) de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u};\vec{v})$ est le cosinus (resp. le sinus) de l'une quelconque de ses mesures. On note $\cos(\vec{u};\vec{v})$ et $\sin(\vec{u};\vec{v})$.

Lien entre cosinus de l'angle orienté et cosinus de l'angle géométrique

Notons α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et notons x la mesure principale de $(\vec{u};\vec{v})$. On a $\alpha=|x|$. Deux cas se présentent :
- si $x\geq 0$, $|x|=x$ et par suite $\cos\alpha=\cos x$;
- si $x\leq 0$, $|x|=-x$ et par suite $\cos\alpha=\cos(-x)=\cos x$

On a donc $\cos(\vec{u};\vec{v})=\cos(\widehat{AOB})$.

Ce n'est pas vrai pour le sinus : $\sin(\widehat{AOB})=|\sin(\vec{u};\vec{v})|$

4.6 Lignes trigonométriques des angles associés

4.6.1 Rappels

Propriété 4.4 (fondamentale)**.**

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

Propriété 4.5 (Sinus et cosinus des angles usuels)**.**

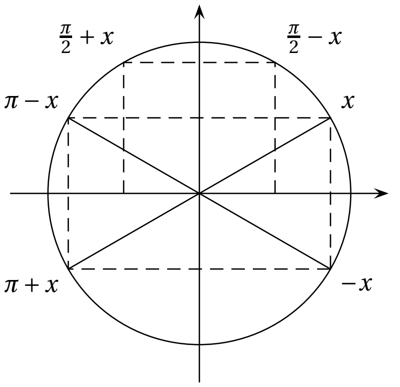
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

4.6.2 Lignes trigonométriques

Les formules ci-dessous sont vraies pour tout réel x, mais pour faciliter la mémorisation, on se place dans le premier cadran. Elles seront démontrées plus tard dans l'année.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$$

$$\cos(\pi-x)=-\cos x$$
$$\sin(\pi-x)=\sin x$$



$$\cos(\pi+x)=-\cos x$$
$$\sin(\pi+x)=-\sin x$$

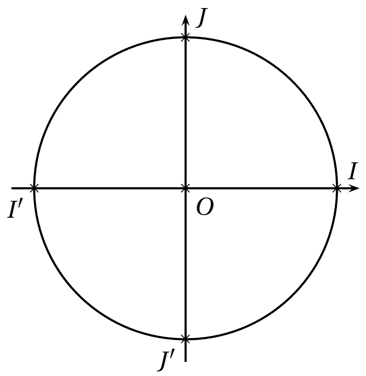
$$\cos -x=\cos x$$
$$\sin -x=-\sin x$$

4.7 Exercices

Exercice 4.1.

Sur un cercle trigonométrique $\mathscr{C}$, on considère les points A et B tels que :

$$\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)=\frac{5\pi}{6} \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)=-\frac{2\pi}{3}$$

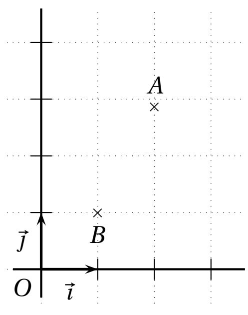


Déterminer la mesure principale des angles suivants :

1. $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OJ'}\right)$;
2. $\left(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OB}\right)$;
3. $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$;
4. $\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{OB}\right)$;
5. $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{BO}\right)$;
6. $\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{BO}\right)$;
7. $\left(2\overrightarrow{OA};-3\overrightarrow{OB}\right)$.

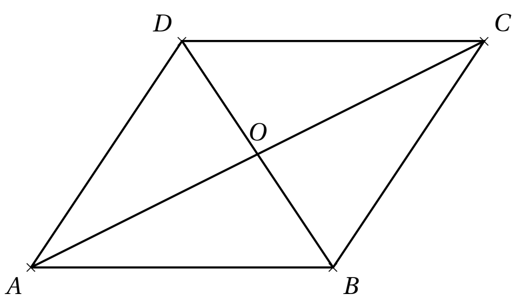
Exercice 4.2.

Dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, on considère le point $B(1;1)$ et le point A d'asbcisse 2 tel que $\left(\vec{\imath},\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\pi}{3}$. Déterminer les coordonnées du milieu I de $[AB]$.



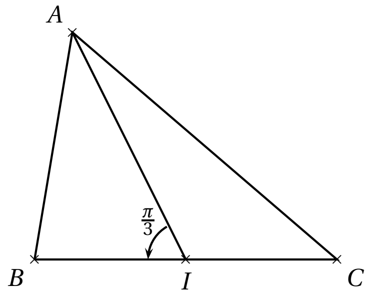
Exercice 4.3.

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O.



1. Démontrer que $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CD}\right)=0$.
2. Quelle propriété du parallélogramme a-t-on démontré ?
3. On suppose que $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right)=\frac{\pi}{4}$.
   Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :
   (a) $\left(\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CB}\right)$;
   (b) $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{DA}\right)$;
   (c) $\left(\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DA}\right)$;
   (d) $\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{DA}\right)$.

Exercice 4.4.
ABC est un triangle et I est le milieu de $[BC]$. On sait que $\left(\overrightarrow{IA}\,;\overrightarrow{IB}\right)=\frac{\pi}{3}$. Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :



1. $\left(\overrightarrow{AI}\,;\overrightarrow{IB}\right)$;
2. $\left(\overrightarrow{AI}\,;\overrightarrow{IC}\right)$;
3. $\left(\overrightarrow{IA}\,;\overrightarrow{CB}\right)$.

Exercice 4.5.
Pour chacune des équations suivantes :

1. les résoudre dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des réels x_i vérifiant l'équation ;
2. placer sur le cercle trigonométrique les points M_i tels que $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OM_i}\right)=x_i$;
3. Donner leurs mesures principales.

- $\cos 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
- $\cos 3x=0$;
- $\cos 4x=-1$;
- $\cos x=2$;
- $\sin 2x=-\dfrac{1}{2}$;
- $\sin 3x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;
- $\sin\frac{x}{2}=0$;
- $\sin 6x=-4$.

Exercice 4.6.
Mêmes questions que l'exercice précédent avec :

- $\cos 2x=\cos x$;
- $\cos 2x=\cos(3x+\pi)$;
- $\sin 3x=\sin x$;
- $\sin x=\sin\frac{x}{3}$;
- $\cos 2x=\sin 3x$;
- $\cos x=-\sin 2x$;
- $\sin 4x=-\cos 2x$.

Exercice 4.7.
Mêmes questions que l'exercice précédent avec :

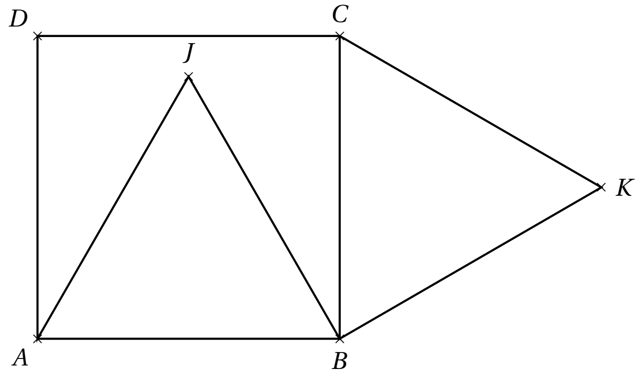
- $\tan x=\sqrt{3}$;
- $\tan 2x=1$;
- $\tan\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}$.

Devoir maison n°3

Angles orientés – Trigonométrie

EXERCICE 1

$ABCD$ est un carré de sens direct. ABJ et CBK sont des triangles équilatéraux de sens direct.



1. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DJ}\right)$.
2. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DK}\right)$.
3. Démontrer que les points D, J et K sont alignés.

EXERCICE 2

1. Résoudre sur $[-\pi\,;\pi]$, à l'aide d'un cercle trigonométrique, les inéquations suivantes :
   (a) $\cos x \geq 0$
   (b) $\cos x \geq -\frac{1}{2}$.
2. En déduire les solutions sur $[-\pi\,;\pi]$ de l'inéquation : $\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x \geq 0$.

Chapitre 5

Nombre dérivé

Sommaire

5.1 Activités

Activité 5.1.
Un corps en chute libre, lâché sans vitesse initiale, parcourt au bout de t secondes la distance $d(t)$ (en mètres) exprimée par : $d(t) = 5t^2$

1. Calculer la distance parcourue par le corps en chute libre au bout de 0, 1, 2, 3, 4, 5 secondes. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction d sur l'intervalle $[0; 5]$.
2. Calculer la vitesse moyenne du corps en chute libre dans les intervalles de temps $[0; 1]$; $[1; 2]$; $[2; 3]$; $[3; 4]$; $[4; 5]$. Que constate-t-on ?
   Comment peut-on retrouver graphiquement ces vitesses moyennes ?
3. Inventer une manière d'obtenir la vitesse instantanée à l'instant $t = 2$.

Activité 5.2.
Cette activité est à réaliser à l'aide du logiciel Geogebra.
On s'intéresse à la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 25$ et on appelle $\mathscr{P}$ sa courbe représentative.
On appelle :

- T le point de $\mathscr{P}$ d'abscisse 1 ;
- T_h le point de $\mathscr{P}$ d'abscisse $1 + h$ où h est un réel ;
- $\mathscr{D}$ la sécante (TT_h).

1. Dans un nouveau fichier, créer $\mathscr{P}$ et T.
   On créera $f(x)$ et le point $\big(1; f(1)\big)$ dans la zone de saisie.
2. Créer un curseur (cinquième bouton) nommé h pouvant varier de -5 à 5 et d'incrément 0,1.
3. En utilisant le curseur h créer T_h et $\mathscr{D}$.
   On affichera l'équation de d sous sa forme réduite : $y = mx + p$.
4. Conjecturer la valeur de m dans chacun des cas suivants :
   - $h = -1$;
   - $h = -0,5$;
   - $h = -0,1$;
   - $h = -0,01$.
5. Vérifier par le calcul votre conjecture dans les deux premiers cas.
6. Montrer, par le calcul, que, dans le cas général, $m = -2 - h$ pour $h \neq 0$
7. Quand h *tend* vers 0 :
   (a) Vers quelle valeur *tend* m ?
   (b) Vers quel point *tend* M_h ?
   (c) Vers quelle droite *tend* la sécante $\mathscr{D}$?
   (d) En déduire l'équation réduite de cette droite.

On appellera *tangente* à $\mathscr{P}$ au point d'abscisse 1, la droite de laquelle se rapproche la sécante d quand h *tend* vers 0 et on appellera *nombre dérivé de $f(x)$ en 1* le coefficient directeur de la tangente.

5.2 Nombre dérivé

Définition. On appelle *accroissement moyen* d'une fonction f entre deux nombres *distincts* a et b le nombre : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

On écrit la plupart du temps $a+h$ à la place de b et la définition devient alors :

Définition 5.1 (Accroissement moyen d'une fonction entre a et $a+h$)**.** On appelle *accroissement moyen* d'une fonction f entre deux nombres distincts a et $a+h$ le nombre : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Les deux définitions sont équivalentes (il suffit de poser $b=a+h$). C'est la seconde que nous utiliserons pour la suite.

On a vu dans les activités que cet accroissement moyen *tendait* vers l'accroissement « instantané » quand h *tendait* vers 0. Cet accroissement « instantané » est appelé *nombre dérivé* en mathématiques, et on a donc la définition suivante :

Définition 5.2 (Dérivabilité et nombre dérivé)**.** Si, quand h *tend* vers 0, la quantité $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *tend* vers un nombre A, on dit que la fonction f est *dérivable en a* et on appelle A le *nombre dérivé de f en a*. On le note $f'(a)$.

Remarques.
- On note parfois $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ l'accroissement moyen, surtout en physique.
  Δx est la différence[1] entre deux valeurs de x, $\Delta f(x)$ celle entre les deux valeurs correspondantes de $f(x)$.
- On note parfois $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ le nombre dérivé. Le d indique là encore une différence mais entre deux valeurs infiniment proches.
- Ces nombres correspondent à des quantités concrètes qui dépendent de la nature de la fonction f ou de la variable. Ainsi, si $f(t)$ est la distance parcourue au bout d'un temps t, la variation moyenne ne sera rien d'autre que la vitesse moyenne et le nombre dérivé est la vitesse instantanée.

Exemple 5.1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-7$ est-elle dérivable en $a=2$?
Pour le savoir étudions la quantité suivante : $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$.

$$\begin{aligned}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \frac{(2+h)^3-2^3}{h} = \frac{8+12h+6h^2+h^3-8}{h}\\ &= \frac{12h+6h^2+h^3}{h} = \frac{h(12+6h+h^2)}{h}\\ &= 12+6h+h^2 \text{ avec } h\neq 0\end{aligned}$$

Lorsque h *tend* vers 0 (en restant différent de 0), $12+6h+h^2$ *tend* vers 12. Donc f est dérivable en $a=2$ et son nombre dérivé en 2 est 12. On note alors $f'(2)=12$.

5.3 Interprétation graphique du nombre dérivé

Définition 5.3 (Tangente à une courbe)**.** On appelle *tangente à une courbe $\mathscr{C}$ en un point M*, appartenant à $\mathscr{C}$, une droite passant par M et qui, si elle existe, est aux alentours de M, la droite la plus proche de $\mathscr{C}$.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f et $A(a;f(a))$ et $B(a+h;f(a+h))$, deux points de cette courbe.
La quantité $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est le coefficient directeur de la droite (AB), sécante à la courbe.
Lorsque h *tend* vers 0, la sécante (AB) *tend* vers la tangente à la courbe au point A et le nombre $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *tend* vers le coefficient directeur de la tangente en A.

On a donc la propriété suivante, qu'on admettra :

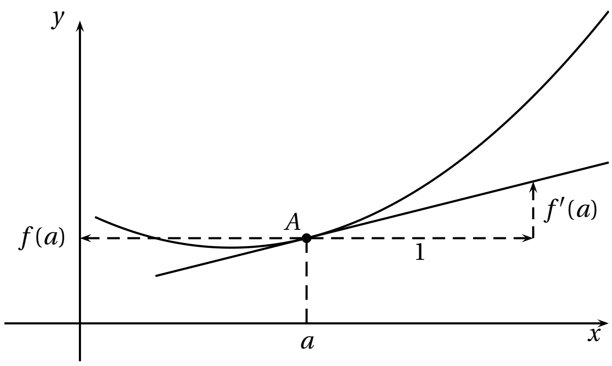
Propriété 5.1. *Soit f une fonction dérivable en a et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.*
Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.

Le schéma 5.1 page ci-contre illustre cette propriété.

Remarque. Le point $A(a;f(a))$ est un point de la courbe et est *aussi* un point de la tangente ; en particulier, ses coordonnées vérifient l'équation de la tangente.

[1] Δ est la lettre grecque correspondant à D

FIG. 5.1 – Interprétation graphique du nombre dérivé



5.4 Approximation affine d'une fonction

L'idée de l'approximation affine est de trouver une fonction affine qui au voisinage de a serait la plus proche possible de f.

On a vu que la tangente à la courbe au point d'abscisse a était la droite la plus proche de la courbe au voisinage de a. Or comme toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées (c'est le cas de la tangente), elle est la représentation graphique d'une fonction affine. Il est donc « naturel » de choisir comme approximation affine de la courbe au voisinage de a la fonction dont la représentation graphique est la tangente à la courbe au point d'abscisse a.

On a donc :

Définition 5.4. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I contenant a.
On appelle *approximation affine de f au voisinage de a*, la fonction g, telle que : $g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$

Propriété. *La représentation graphique de g est la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a*

Remarque. L'équation réduite de la tangente est donc $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

Preuve. La tangente est la droite passant $A(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$ or $A(a; f(a))$ appartient à la représentation graphique de g car $g(a) = f(a) + f'(a)(a-a) = f(a)$. Par ailleurs g est une fonction affine car $g(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = f'(a)x + f(a) - af'(a) = mx + p$ où $m = f'(a)$ et $p = f(a) - af'(a)$. g a donc pour représentation graphique une droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$ qui est, par définition, la tangente à la courbe de f en A. ♢

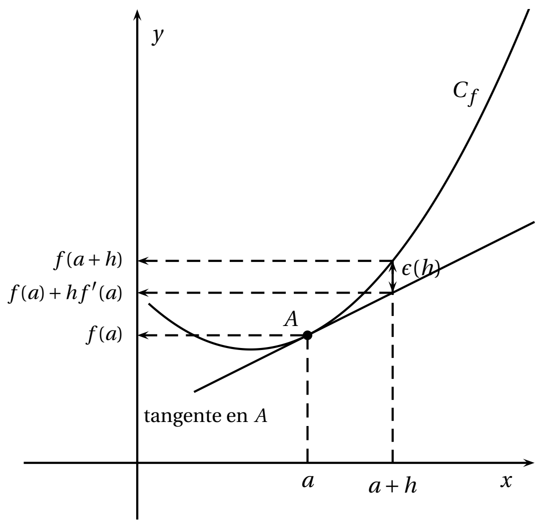
Lorsque x est proche de a la différence entre $f(x)$ et $g(x)$ est petite et $g(x)$ fournit une bonne approximation de la valeur de $f(x)$ tout en étant beaucoup plus facile à calculer. Cette approximation est, dans bien des cas, suffisante et elle est souvent utilisée, en particulier en économie.

En posant $x = a + h$, on obtient :
$g(x) = g(a+h) = f(a) + f'(a)(a+h-a) = f(a) + hf'(a)$.

Et on peut écrire :

$\boxed{\text{Quand } h \text{ est proche de 0, } f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)}$

Le schéma ci-contre illustre cela :
$\epsilon(h)$ est l'erreur commise lorsqu'on prend $f(a) + hf'(a)$ comme valeur de $f(a+h)$. Elle *tend* vers 0 quand h *tend* vers 0.



Exemple 5.2. Application à l'économie.
Un produit coûtant 100 euros au 1er janvier 2006 a augmenté de 2% le 1er février 2006 et le 1er mars 2006.
On peut calculer son coût exact : $100 \times \left(1 + \frac{2}{100}\right)^2 = 104,04$
On peut aussi choisir d'utiliser l'approximation affine de $f(x) = x^2$ au voisinage de 1 : $(1+h)^2 \approx 1 + 2h$.
Ici, comme h est proche de 0 ($h = \frac{2}{100}$), $1 + 2h$ fourni une approximation souvent suffisante de $(1+h)^2$ et on a :
$100 \times \left(1 + \frac{2}{100}\right)^2 \approx 100 \times \left(1 + 2 \times \frac{2}{100}\right) = 104$
L'erreur commise est donc de 0,04 euros, ce qui peut être, dans certains cas, considéré comme négligeable.

5.5 Exercices

Exercice 5.1.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[-3;3]$ ayant les popriétés suivantes :

- f est décroissante sur $[-3;0]$;
- $f(0)=-2$ et $f'(0)=0$;
- f est paire ;
- $f(3)=9$.

Exercice 5.2.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[0;9]$ ayant les popriétés suivantes :

- $f(0)=0$;
- $f(1)=3$ et $f'(1)=2$;
- $f(3)=6$ et $f'(3)=1$;
- $f(5)=7$ et $f'(5)=0$;
- $f(6)=6$ et $f'(6)=-4$.

Exercice 5.3.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[0;5]$ ayant les popriétés suivantes :

- $f(0)=1$;
- f est décroissante sur l'intervalle $[0;2]$;
- f admet en 2 un minimum égal à -3 ;
- $f(3)=-1$ et $f(5)=-1$;
- $f'(2)=0$, $f'(3)=1$ et $f'(5)=-1$;
- pour tout $x\in[2;5]$, $f(x)<0$.

Exercice 5.4.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[-4;4]-0$ ayant les popriétés suivantes :

- f est impaire ;
- $f(0,25)=4$ et $f(0,5)=2$;
- $f(1)=1$ et $f'(1)=-1$;
- $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation $y=x$ comme axe de symétrie.

Exercice 5.5.
Montrer que l'approximation affine de $f(x)=x^2$ en 1 de l'exemple 5.2 page précédente est la bonne.

Exercice 5.6.
On pose $f(x)=(1+x)^3$ et on cherche $g(x)$, une approximation affine de f au voisinage de 0.

1. Déterminer $g(x)$;
2. Calculer, de tête, $g(x)$ lorsque $x=0,1$, lorsque $x=0,01$ et lorsque $x=0,001$;
3. Calculer $f(x)$ pour chacune de ces valeurs et déterminer l'erreur commise lorsqu'on prend $g(x)$ comme valeur approchée de $f(x)$ pour chacune de ces valeurs de x.

Exercice 5.7.
Déterminer les approximations affines des fonctions suivantes au voisinage de 0 :

1. $f(x)=\frac{1}{1+x}$;
2. $g(x)=\sqrt{1+x}$;
3. Calculer, de tête, des valeurs approchées de : $\dfrac{1}{1,1}$, $\dfrac{1}{1,02}$, $\dfrac{1}{0,99}$, $\sqrt{1,1}$, $\sqrt{1,02}$ et $\sqrt{0,99}$.

Exercice 5.8.
On donne page ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f en y indiquant les droites tangentes aux points A, B et C.

1. Donner par lecture graphique $f(-2)$ et $f(6)$
2. Donner par lecture graphique $f'(-2)$, $f'(6)$ et $f'(2)$
3. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2.
   À l'aide d'une approximation affine de f, donner une estimation de $f(-1,9)$

Exercice 5.9.
La courbe $\mathscr{C}$ page suivante est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthogonal.

1. Déterminer graphiquement :
   (a) $f(0)$ et $f'(0)$;
   (b) $f(-1)$ et $f'(-1)$;
   (c) $f(2)$ et $f'(2)$;
   (d) L'équation de la tangente T_{-1} au point d'abscisse -1 ;
   (e) L'équation de la tangente T_2 au point d'abscisse 0.
2. La droite T tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2 et d'ordonnée -1 passe par le point A de coordonnées $(1;26)$
   (a) Déterminer par le calcul une équation de T.
   (b) En déduire $f'(-2)$.

FIG. 5.2 – Figure de l'exercice 5.8

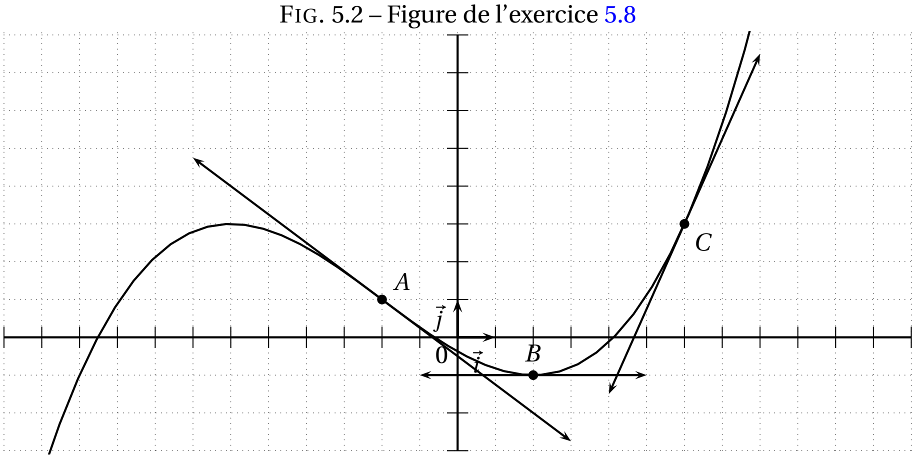
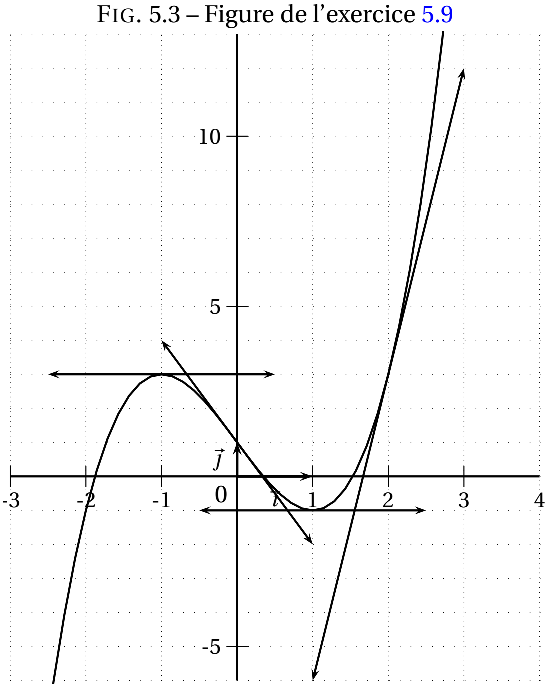


FIG. 5.3 – Figure de l'exercice 5.9



Devoir commun n°1

Généralités sur les fonctions – Géométrie dans l'espace – Second degré

Les exercices 1, 2 et 3 sont communs à toutes les classes.
L'exercice 4 est différent selon la classe.
La dernière feuille est une feuille d'annexes et est à rendre avec votre copie,
même si vous n'avez rien fait dessus.
Le barème est provisoire.

EXERCICE 1 — *8 points*

L'objectif de cet exercice est d'étudier la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 2}$ et de tracer sa représentation graphique.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 2}$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
2. Déterminer les coordonnées des points intersections de $\mathscr{C}$ avec les axes du repère.
3. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x - 4$.
   (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$, $f(x) = x - 4 - \dfrac{3}{x-2}$.
   (b) Déterminer les positions relatives de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ selon les valeurs de x.
4. Montrer que le point $\Omega(2\,;\,-2)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}$.
5. On considère la fonction g définie sur $]2\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = -\dfrac{3}{x-2}$.
   (a) Justifiez soigneusement que g est croissante.
   On pourra utiliser la composition des fonctions.
   (b) En utilisant l'expression de $f(x)$ la mieux adaptée, en déduire les variations de f sur $]2\,;\,+\infty[$.
6. (a) Compléter le tableau de valeurs fourni en annexe page 48.
   (b) Dans le repère fourni en annexe page 48, tracer $\mathscr{D}$ puis $\mathscr{C}$.

EXERCICE 2 — *3 points*

L'objectif de cet exercice est de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\mathscr{E} : -x^3 + 2x^2 + 5x - 6 = 0$.
On appelle $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de $\mathscr{E}$.

1. (a) Montrer que 1 est une solution de $\mathscr{E}$.
   (b) Déterminer trois réels a, b et c tels que $-x^3 + 2x^2 + 5x - 6 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
2. En déduire $\mathscr{S}$.

EXERCICE 3 — *3 points*

Deux promeneurs partent en même temps d'un point A. Le premier se dirige vers l'ouest et le deuxième vers le sud.
Au bout de trois heures, ils sont à soixante kilomètres l'un de l'autre.

1. Quelles distances ont-ils parcourues chacun, sachant que celui qui va vers le sud a fait 12 kilomètres de plus que l'autre ?
2. Quelles sont leurs vitesses moyennes ?

EXERCICE 4 ***Pour les élèves n'étant pas en 1S2** – 6 points*

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Soit le tétraèdre $ABCD$ fourni en annexe page 49.

I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$, K et L sont définis par : $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Soit M le symétrique de B par rapport à D.
   (a) Montrer que la droite (AD) est la médiane issue de A dans le triangle ABM.
   (b) En déduire que I, K et M sont alignés.
2. (a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{ML}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}$.
   (b) Montrer que les points M, J et L sont alignés.
3. Les points I, J, K et L sont-ils coplanaires ? *On justifiera sa réponse.*

Partie B

Sur la figure fournie en annexe page 49, construire la section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (IJK).

On ne demande pas de justification mais on laissera les traits de construction et on indiquera les éventuels parallélismes utilisés.

EXERCICE 4 ***Pour les élèves en 1S2 seulement** – 6 points*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -3x^2 + 12x - 8$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1. Factoriser, si c'est possible, $f(x)$.
2. Compléter le tableau de signes de la fonction f fourni en annexe page 50.
3. Compléter le tableau de variations de la fonction f fourni en annexe page 50.
4. (a) Écrire $f(x)$ sous forme canonique.
   (b) Déduire, en expliquant, la construction de la courbe $\mathscr{C}$ à partir de la parabole d'équation $y = x^2$.
   (c) Représenter graphiquement avec soin $\mathscr{C}$ dans le repère fourni en annexe page 82.
5. **Question bonus**[2] : On considère les droites Δ_m d'équation réduite : $y = mx - 5$, où m est un réel.
   (a) Montrer que les droites Δ_m passent par un point fixe indépendant de m.
   (b) Déterminer la(les) valeur(s) de m pour lesquelles la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ_m ont un unique point d'intersection.

[2] Difficile et peu payée, cette question est à ne traiter qu'une fois tout le reste terminé.

TAB. 5.1 – Tableau de valeurs de l'exercice 1

x	$2,5$	3	4	5	6	7	8
$f(x)$							

FIG. 5.4 – Repère de l'exercice 1

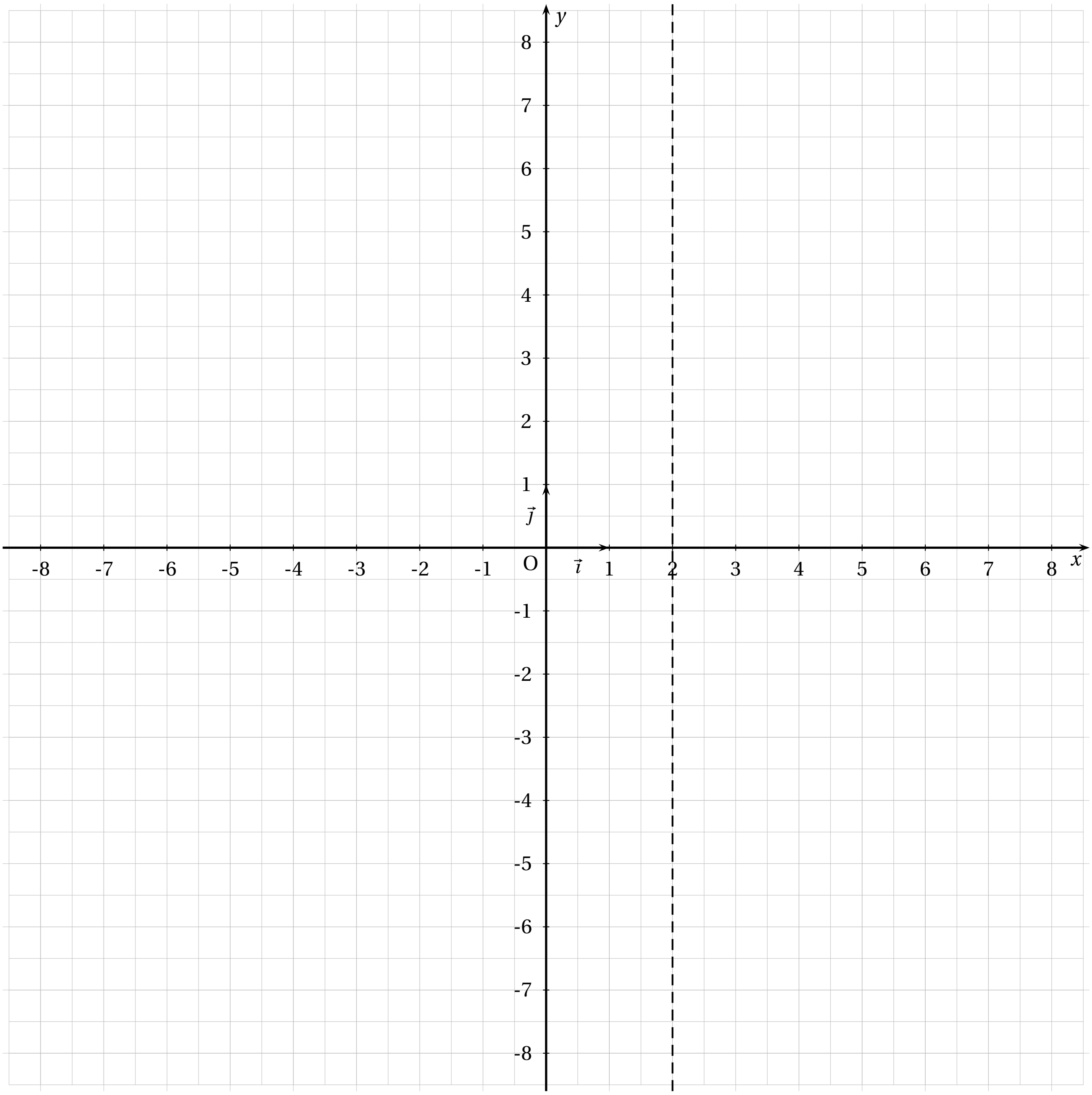


FIG. 5.5 – Figure de l'exercice 4, partie A

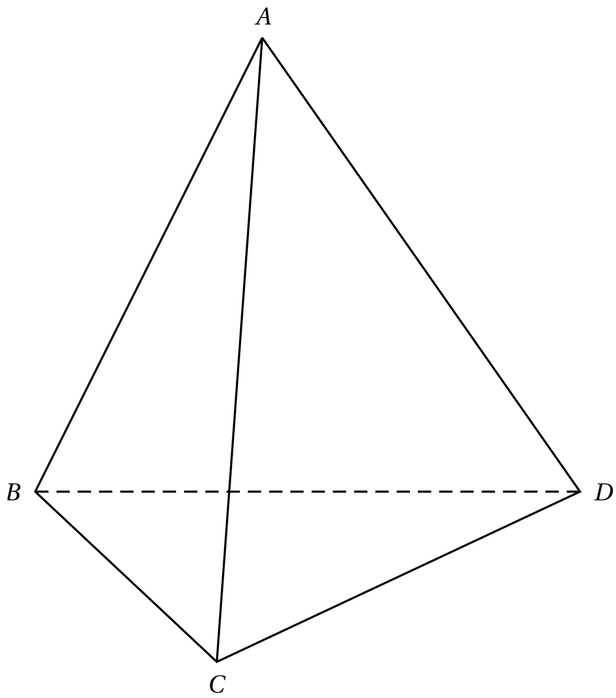


FIG. 5.6 – Figure de l'exercice 4, partie B

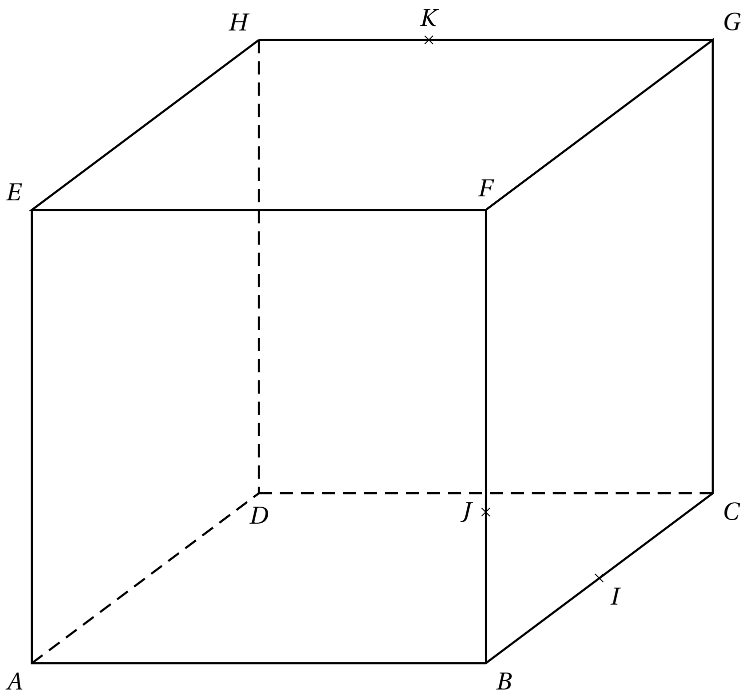


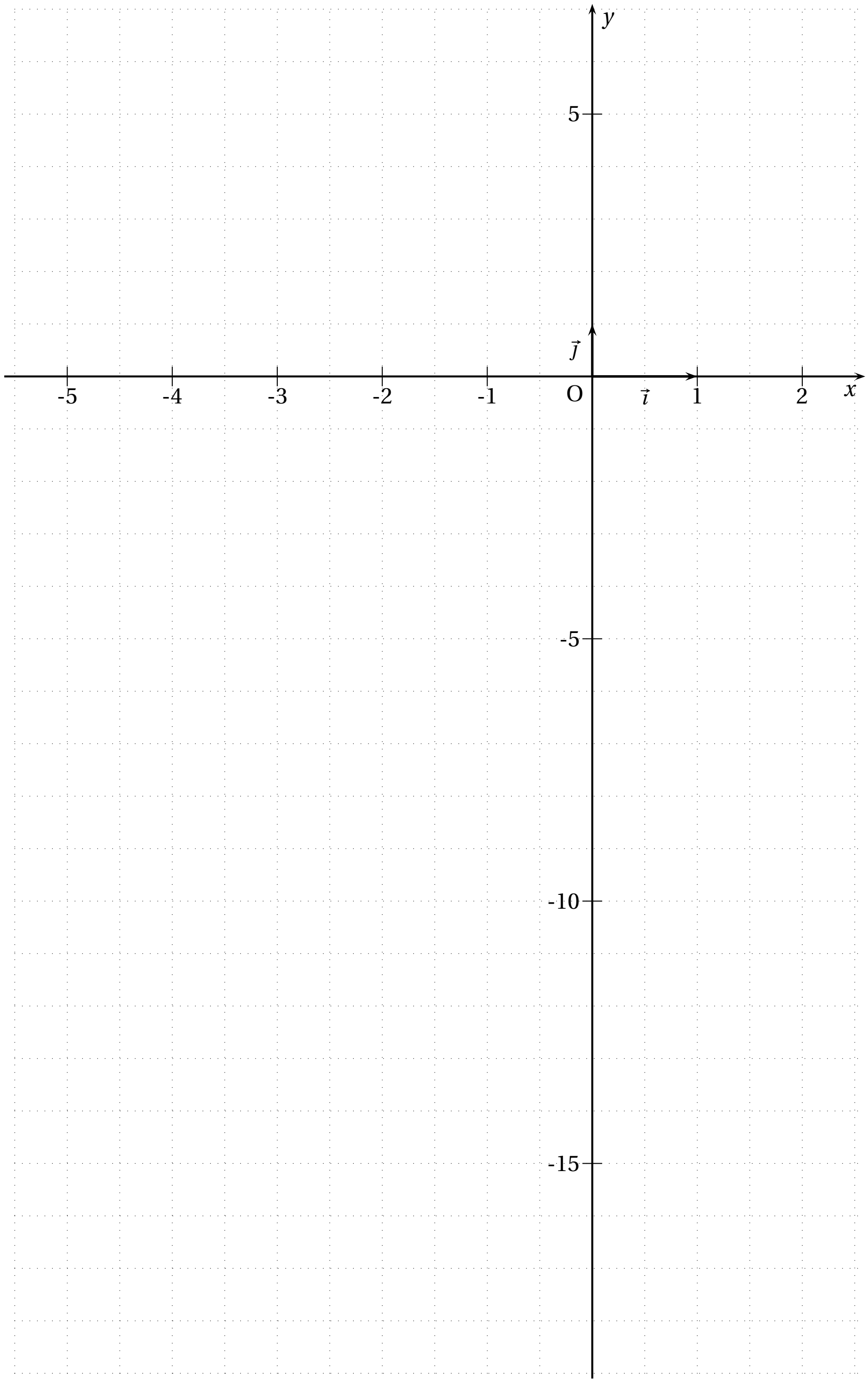
Tableau de signes de la fonction f

x	
$f(x)$	

Tableau de variations de la fonction f

x	
$f(x)$	

FIG. 5.7 – Repère de l'exercice 4 (1S2)



Devoir maison n°4

Approximation affine

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,1[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

1. (a) En utilisant la définition du nombre dérivé, démontrer que la fonction f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \frac{1}{2}$.
   (b) En déduire une approximation affine de f au voisinage de 0.
2. En mécanique classique, l'énergie cinétique E_c d'un corps en mouvement est proportionnelle à sa masse m et au carré de sa vitesse v. Plus précisément :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Dans la théorie de la relativité d'Einstein (utilisée principalement pour les vitesses proches de la vitesse de la lumière), l'énergie cinétique est donnée par la formule :

$$E_c = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)mc^2$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

   (a) Que peut-on dire de la quantité $\dfrac{v^2}{c^2}$ quand la vitesse v est très inférieure à la vitesse de la lumière c ?
   (b) En posant $x = \dfrac{v^2}{c^2}$ et à l'aide des questions précédentes, montrer que l'énergie cinétique telle que la donne la mécanique classique est une bonne approximation de celle que donne la mécanique relativiste quand la vitesse v est très inférieure à celle de la lumière c.

Chapitre 6

Produit scalaire : définitions et premières propriétés

Sommaire

Ce chapitre fait appel à la notion d'angle de vecteurs, traitée dans le chapitre 4.

6.1 Activités

Activité 6.1.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et A, B, C et D quatre points tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{u}+\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.
Prouver que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0$.

On va s'intéresser dans ce chapitre à la quantité $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$. Que devient-elle lorsque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont plus orthogonaux ? Peut-elle être positive ? Négative ?

Définition. On appelle ***produit scalaire de deux vecteurs*** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ***le nombre réel***, noté $\vec{u}.\vec{v}$, défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

La présence du coefficient $\frac{1}{2}$ sera justifiée ultérieurement.

Activité 6.2.
Le fichier 1SChp6Act2.ggb, disponible dans la rubrique Documents : 1S du site http://perpendiculaires.free.fr/ et qui s'ouvre avec le logiciel GeoGebra, présente une série de points fixes (de A jusqu'à L), un point libre M, les vecteurs $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AM}$.

1. (a) Créer le vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.
   On entrera simplement dans la zone de saisie « w=u+v ».
   (b) Créer les nombres $a = \|\overrightarrow{u}\|$, $b = \|\overrightarrow{v}\|$, $c = \|\overrightarrow{w}\|$ et $d = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(c^2 - a^2 - b^2\right)$.
   On entrera « Longueur[u] » pour obtenir la norme de $\overrightarrow{u}$ et les calculs pour d se taperont directement dans la zone de saisie.
2. Compléter le tableau page suivante en déplaçant le point M de façon à ce que le vecteur $\overrightarrow{v}$ soit égal à celui indiqué dans la troisième colonne.
3. Conjecturer des réponses aux questions suivantes :
   (a) Dans quel(s) cas un produit scalaire est-il positif ? Négatif ? Nul ?
   (b) Existe-t-il des points différents qui donnent le même produit scalaire ? À quelle configuration géométrique les points concernés semblent-ils appartenir ?
   (c) Que peut-on dire du produit scalaire de deux vecteurs colinéaires ?

TAB. 6.1 – Tableau à compléter pour l'activité 6.2

$\vec{u}$	$\|\vec{u}\|^2$	$\vec{v}$	$\|\vec{v}\|^2$	$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$	$\vec{u}.\vec{v}$
$\overrightarrow{AB}$		$\overrightarrow{AA}$			
		$\overrightarrow{AC}$			
		$\overrightarrow{AD}$			
		$\overrightarrow{AB}$			
		$\overrightarrow{AE}$			
		$\overrightarrow{AF}$			
		$\overrightarrow{AG}$			
		$\overrightarrow{AH}$			
		$\overrightarrow{AI}$			
		$\overrightarrow{AJ}$			
		$\overrightarrow{AK}$			
		$\overrightarrow{AL}$			

Activité 6.3.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ quelconque. Soit les vecteurs $\vec{u}(x\,;\,y)$, $\vec{v}(x'\,;\,y')$ et $\vec{w}(x''\,;\,y'')$..

1. Démontrer que $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.
2. Comparer $\vec{u}.\vec{v}$ et $\vec{v}.\vec{u}$.
3. Comparer $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})$ et $\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$.
4. Soit k un réel. Comparer $(k\vec{u}).\vec{v}$ et $k(\vec{u}.\vec{v})$.

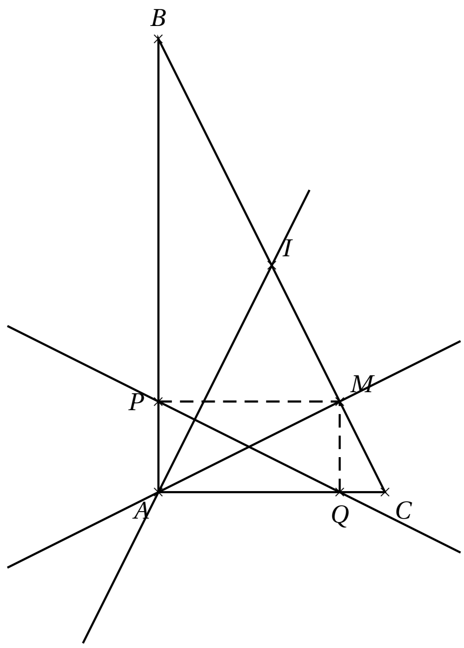
Activité 6.4.
Soit A, B et C trois points distincts du plan orienté tels que $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) = \alpha$.

On choisit le repère orthonormal direct $\left(A; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ tel que $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{AB}\right) = 0$.
H est le projeté orthogonal de C sur (AB), c'est-à-dire le pied de la perpendiculaire à (AB) passant par C.

1. Exprimer en fonction de AB, AC et α les coordonnées des points B, C et H.
2. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$.
3. Démontrer les conjectures de l'activité 6.2.

Activité 6.5.
Démontrer que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, alors $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$.
En déduire que si A, B et C sont trois points distincts, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$.

Activité 6.6.
ABC est un triangle rectangle en A. H est le pied de la hauteur issue de A ; I est le milieu de $[BC]$; P et Q sont les projetés orthogonaux de H respectivement sur (AB) et (AC).



- Montrer que $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{PQ} = \vec{0}$.
- Que peut-on en déduire pour les droites (AI) et (PQ) ?

Indications (à justifier) :

- $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI}$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$
- $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}$

6.2 Définitions

Rappelons la définition du produit scalaire.

Définition 6.1. On appelle *produit scalaire de deux vecteurs* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ *le nombre réel*, noté $\vec{u}.\vec{v}$, défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

Remarques.
- Le mot *scalaire* provient du latin *scala* qui signifie *échelle*. Il a plusieurs significations aussi bien en mathématiques qu'en physique. Il faut le comprendre ici comme un nombre et son nom souligne le fait que, **si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs, $\vec{u}.\vec{v}$ est lui un nombre**.
- On précisera systématiquement que c'est un produit *scalaire*, car vous verrez plus tard un autre type de produit de vecteurs qui ne donne pas un nombre mais un vecteur.

Théorème 6.1 (Autres expressions du produit scalaire)**.** *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.*
1. *Le plan étant muni d'un repère orthonormal où $\vec{u}(x\,;\,y)$ et $\vec{v}(x'\,;\,y')$ alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$*
2. *Si les deux vecteurs sont distincts du vecteur nul, $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\,\vec{v})$*
3. *Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v'}$ où $\vec{v'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur la direction donnée par $\vec{u}$.*

Remarques.
- Si l'un des vecteurs est égal au vecteur nul, l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ n'est pas défini.
- Si $\vec{u} = \vec{0}$, il n'a pas de direction.
- Dans tous les cas, si l'un des vecteurs est nul, $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Théorème 6.2 (Cas de trois points)**.** *Soit A, B et C trois points du plan.*
- *Lorsque $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$.*
- *Lorsque A et B distincts, soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) :*
  - $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$ *si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens.*
  - $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ *si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens opposé.*

Démonstrations des deux théorèmes. Voir activités. ♢

6.3 Propriétés

Théorème 6.3. *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.*
- *Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$.*
- *Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.*
- *$\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. On notera alors $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2$.*

Preuve.
- Posons $\vec{u} = \vec{0}$. Alors $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = 0$.
- Soit A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. On a alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
  $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\Leftrightarrow$ ABC rectangle en B $\Leftrightarrow$ $AB^2 + AC^2 = BC^2$ $\Leftrightarrow$ $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}+\vec{u}\|^2 \Leftrightarrow 0 = \|\vec{u}+\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$
- $\vec{u}.\vec{u} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|2\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(4\|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|^2\right) = \|\vec{u}\|^2$

♢

Remarque. La dernière ligne explique la présence du $\frac{1}{2}$. Il est là pour qu'on puisse avoir une similitude entre le produit des réels ($x \times x = x^2$) et le produit scalaire ($\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$). Sans lui on aurait $\vec{u}.\vec{u} = 2\|\vec{u}\|^2$, ce qui serait moins intuitif à manipuler dans les calculs.

Remarque. Les deux derniers points sont extrêmement importants. Le deuxième permet de démontrer bien des cas d'orthogonalité avec la souplesse des vecteurs. Le dernier permet de passer aisément des longueurs aux vecteurs et réciproquement, permettant ainsi de faire appel aux vecteurs, et à leur souplesse, dans bien des démonstrations concernant les longueurs.

Propriété 6.4 (Règles de calcul)**.** *Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs et k un réel.*
- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ *et* $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$
- $(k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$ *et* $\vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$

Preuve. Voir activité 6.3. ◊

Propriété 6.5 (Identités remarquables). *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.*

- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
- $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Preuve. En appliquant le deuxième point de la propriété précédente on obtient facilement ces résultats. ◊

Propriété 6.6 (Produit scalaire et coordonnées). *Le plan est muni d'un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (orthonormal). Soit $\vec{u}(x; y)$ un vecteur.*

$$x = \vec{u}.\vec{\imath} \qquad \textit{et} \qquad y = \vec{u}.\vec{\jmath}$$

Preuve. $\vec{u}.\vec{\imath} = x \times 1 + y \times 0 = x$ et $\vec{u}.\vec{\jmath} = x \times 0 + y \times 1 = y$ ◊

6.4 Formules de la médiane

Théorème 6.7 (Formules de la médiane). *Soit A et B deux points quelconques du plan et I le milieu du segment $[AB]$. Alors, pour tout point M du plan on a :*

- $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$;
- $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$;
- $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$.

Remarques.
- La droite (MI) étant, pour le triangle MAB, la médiane issue de A, ces formules sont appelées *formules de la médiane*.
- Ces formules ne sont pas à apprendre, par contre on doit savoir les retrouver en utilisant les carrés scalaires (voir la preuve ci-dessous).
- Ces formules sont particulièrement utiles quand on cherche tous les points M vérifiant, par exemple, $MA^2 + MB^2 = 4$ puisqu'elles permettent de passer d'une expression à deux inconnues (MA et MB) à une expression à une inconnue (MI).

Preuve. Montrons que $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$.

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 \\ &= 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 \\ &= 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\vec{0} + 2\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 \end{aligned}$$

Les autres démonstrations sont du même type et sont laissées en exercice pour le lecteur. ◊

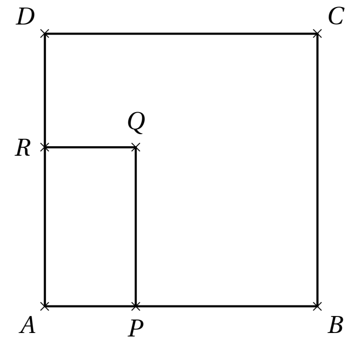
6.5 Exercices

Dans tous les exercices les repères sont orthonormaux

Exercice 6.1.

Soit $ABCD$ un carré de sens direct. On construit un rectangle $APQR$ de sens direct tel que :

- $P \in [AB]$ et $R \in [AD]$;
- $AP = DR$.

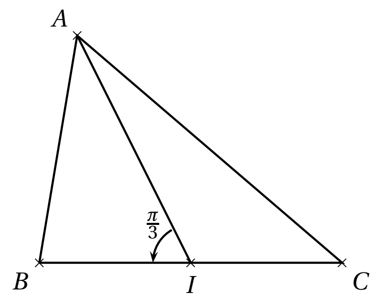


1. Justifier que $\overrightarrow{CQ}.\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{CQ}.\left(\overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AP}\right)$
2. En déduire que les droites (CQ) et (PR) sont perpendiculaires.

Exercice 6.2.

ABC est un triangle et I est le milieu de $[BC]$. On sait que $\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}\right) = \frac{\pi}{3}$ et que $BI = CI = 2$ et $AI = 3$

Calculer :



1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$;
2. $AB^2 + AC^2$;
3. $AB^2 - AC^2$;
4. AB et AC.

Exercice 6.3.

ABC est un triangle équilatéral de côté 5 cm. I est le milieu de $[BC]$.

Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$;
2. $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CI}$;
3. $\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AI}$.

Exercice 6.4.

ABC est un triangle dans lequel $AB = 2$ et $AC = 3$. De plus $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4$. Ce triangle est-il rectangle ?

Exercice 6.5.

$MNPQ$ est un carré avec $MN = 6$. I est le centre du carré.

Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{QP}$;
2. $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PN}$;
3. $\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{IP}$;
4. $\overrightarrow{QI}.\overrightarrow{NI}$.

Exercice 6.6.

$ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = 4$, $AD = 5$ et $AC = 7$. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$. En déduire BD

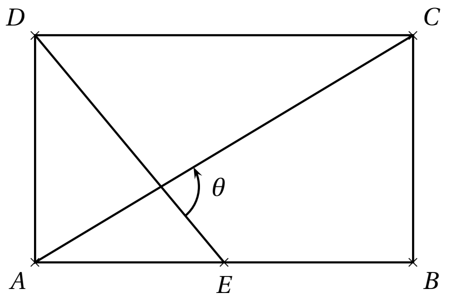
Exercice 6.7.

1. (a) Montrer que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4\vec{u}.\vec{v}$.
   (b) Montrer que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right)$
   (c) Que peut-on en déduire pour le parallélogramme et le losange ?
2. (a) Montrer que $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.
   (b) En déduire qu'un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires si et seulement si ses côtés sont égaux.

Exercice 6.8.

$ABCD$ est un rectangle tel que $AD = 3$ et $AB = 5$. E est le milieu de $[AB]$.

1. Calculer les longueurs AC et DE.
2. En exprimant chacun des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE}$.
3. En déduire la valeur de l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{AC}\right)$ en degrés à 0,01 près.



Exercice 6.9.

Soit le triangle ABC et K le projeté orthogonal de A sur (BC).

On donne : $AB = 6$, $BK = 4$ et $KC = 7$.

I est le milieu de $[BC]$ et G le centre de gravité du triangle ABC.

1. Faire une figure.
2. Calculer les produits scalaires suivants :
   (a) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$; (b) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$; (c) $\overrightarrow{IG}.\overrightarrow{IB}$;
   ainsi que la somme : $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{AC}$
3. Déterminer et représenter en rouge l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC} = 44$.
4. Déterminer et représenter en vert l'ensemble des points M du plan tels que $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{AC} = 0$

Exercice 6.10.

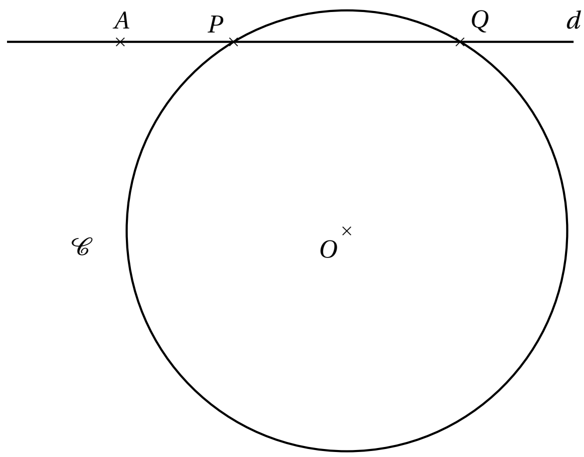
$\mathscr{C}$ est un cercle de centre O, de rayon r et A est un point fixé du plan. d est une droite passant par A et coupant $\mathscr{C}$ en deux points P et Q.

Le but du problème est d'établir la propriété suivante :

Quelle que soit la droite d passant par A, coupant le cercle $\mathscr{C}$ en deux points P et Q, le produit scalaire $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AQ}$ est constant.

1. Soit P' le point diamétralement opposé à P. Montrer que $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AP'}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AP'} = AO^2 - r^2$
3. Conclure.

Remarque. On appelle cette quantité la puissance d'un point par rapport à un cercle.



Exercice 6.11.

$[AB]$ est un segment de milieu I et $AB = 2$ cm.

1. Montrer que pour tout point M du plan : $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$
2. Trouver et représenter l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 = 14$.

Exercice 6.12.

$ABCD$ est un tétraèdre régulier de côté a. I est le milieu du côté $[AB]$ et J est le milieu du côté $[CD]$.

1. Calculer (en fonction de a) les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DA}$.
2. Calculer et interpréter le produit scalaire suivant : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$.
3. Calculer et interpréter le produit scalaire suivant : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ}$

Exercice 6.13.

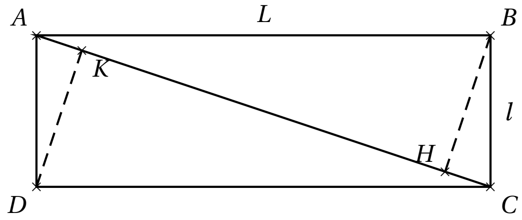
Le but de cet exercice est de démontrer, à l'aide du produit scalaire, que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Soit ABC un triangle. On note A', B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de A, B et C sur (BC), (AC) et (AB). On note $H = (BB') \cap (CC')$.

1. Que valent les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}$?
2. Calculer $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}$.
3. Conclure.

Exercice 6.14.

$ABCD$ est un rectangle de longueur L et de largeur l. Soient H et K les projetés orthogonaux des sommets B et D sur la diagonale (AC).



1. Calculer HK en fonction des longueurs des côtés L et l. (On pourra évaluer de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD}$).
2. Comment choisir L et l pour avoir $AC = 2HK$? Exprimer alors l'aire du parallélogramme $BHDK$ en fonction de l'aire du rectangle $ABCD$.

Exercice 6.15.

À quelle condition sur les points A, B et C a-t-on : $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2 = (AB+AC)^2$?

Exercice 6.16.

$ABCD$ est un losange de sens direct et de centre O On donne $AC = 10$ et $BD = 6$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.
2. On note P le projeté orthogonal de D sur la droite (AB). Calculer AP.

Devoir surveillé n°4

Angles orientés – Nombre dérivé

Exercice 1 *3 points*

Soient A et B deux points du plan et O le centre d'un cercle $\mathscr{C}$ passant par A et B. Soit M un point du cercle $\mathscr{C}$, distinct de A et de B.

1. (a) À l'aide des angles orientés du triangle MAO, établir l'égalité suivante :

$$2\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MO}\right)=\pi-\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OA}\right)+2k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}$$

   (b) En déduire que : $2\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MO}\right)=\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{OM}\right)+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

2. En déduire de la même manière $2\left(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MO}\right)$.
3. En déduire que $2\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Exercice 2 *2,5 points*

Parmi les 10 formules ci-dessous, certaines sont vraies, d'autres sont fausses. En face de chacune d'elle, sans justifer, indiquer Vrai ou Faux sachant que :

- une indication correcte rapporte 0,5 point ;
- une indication incorrecte enlève 0,25 point ;
- une absence d'indication n'apporte ni n'enlève aucun point ;
- un total négatif est ramené à zéro.

$\cos(\pi-\alpha)=\cos(\pi+\alpha)$	$\cos(\pi+\alpha)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos(-\alpha)$	$\tan(\pi-\alpha)=\cos(\alpha)$
$\tan(\pi-\alpha)=\dfrac{1}{\tan(\pi+\alpha)}$	$\sin(\pi+\alpha)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$
$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\dfrac{1}{\tan(\pi+\alpha)}$	$\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\cos(-\alpha)$	$\sin\frac{2\pi}{3}+\tan\frac{3\pi}{4}=-\frac{1}{2}$

Exercice 3 *4,5 points*

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes[1] :

   (a) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; (b) $\sin(2x)=\sin(\pi+3x)$; (c) $\sin 3x=\cos(x+\pi)$.

2. Résoudre graphiquement dans $]-\pi;\pi]$ l'inéquation : $2\sin x+1>0$.

Exercice 4 *3 points*

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;1[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$

1. En utilisant la définition du nombre dérivé, démontrer que la fonction f est dérivable en 0 et que $f'(0)=1$.
2. En déduire une approximation affine de f au voisinage de 0.
3. En déduire, par un calcul mental qu'on écrira sur sa copie, des valeurs approchées de :
   - $\dfrac{1}{0,999}$;
   - $\dfrac{1}{0,98}$;
   - $\dfrac{1}{1,003}$.

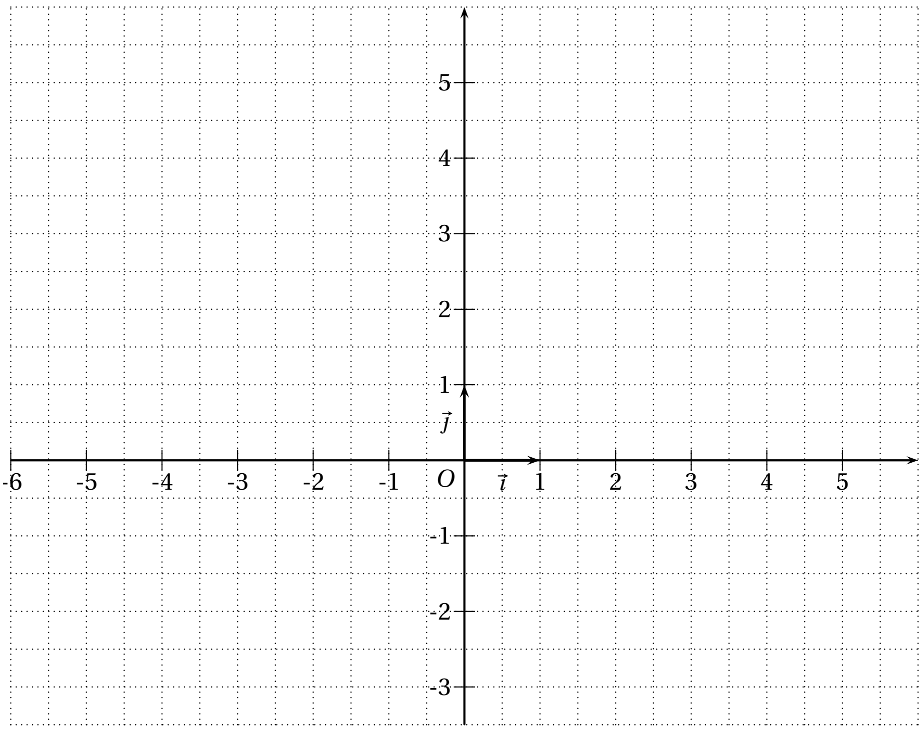
[1] On ne demande ni les points correspondants du cercle trigonométrique, ni les mesures principales des solutions.

EXERCICE 5 *3 points*

Tracer sur le repère ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction f vérifiant les conditions suivantes :

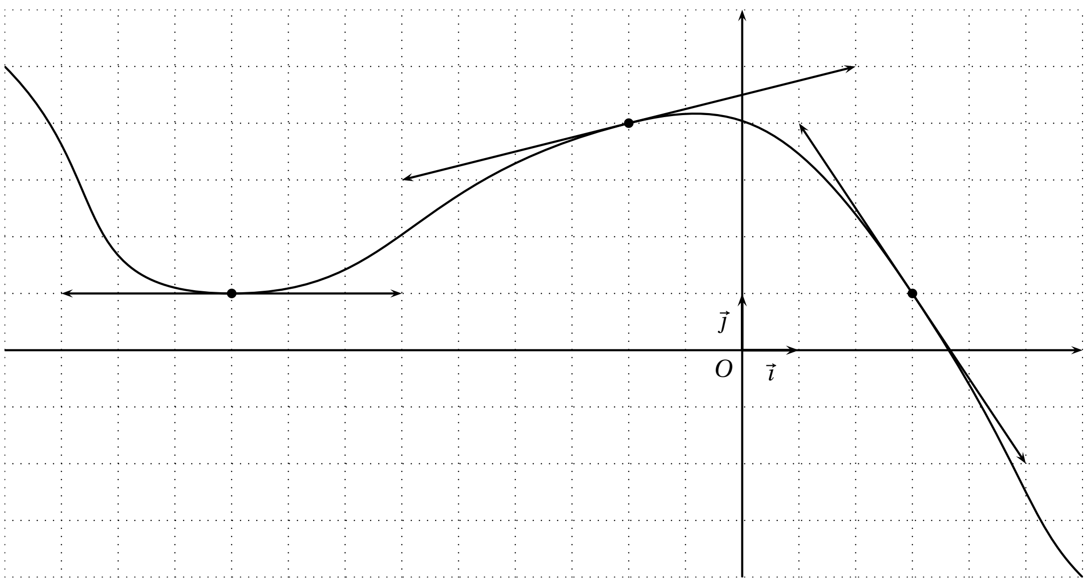
- f est définie sur $[-5\,;5]$;
- f est paire ;
- $f(0)=3$, $f(2)=1$ et $f(4)=2$;
- $f'(0)=0$, $f'(2)=-\frac{1}{2}$ et $f'(4)=3$.

On fera apparaître toutes les tangentes qu'on peut déduire de l'énoncé.



EXERCICE 6 *4 points*

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction définie f sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à cette courbe en certains points.



1. Donner par lecture graphique $f(3)$, $f(-2)$ et $f(-9)$.
2. Donner par lecture graphique $f'(3)$, $f'(-2)$ et $f'(-9)$.
3. (a) Déterminer l'équation réduite de T, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3.

   (b) À l'aide d'une approximation affine de f, donner une estimation de $f(3{,}01)$.

Devoir maison n°5

Lignes de niveau – Statistiques

Définition 6.2. Soit f une fonction qui, à tout point M du plan (ou de l'espace), associe un nombre $f(M)$.
On appelle ligne de niveau k l'ensemble des points M tels que $f(M) = k$.

On retrouve la notion de ligne de niveau en topographie (altitude), en météorologie (isobarre), en physique (courbe de niveau), etc. Par exemple, on peut associer, à chaque point d'une carte topographique, l'altitude de ce point. La ligne de niveau 10 sera l'ensemble des points situés à une altitude de 10 m, celle de niveau 20 sera l'ensemble des points situés à 20 m d'altitude, etc. Et on peut dessiner ces lignes sur la carte, ce qui donne à un randonneur une idée de la dénivélation, ou, dans le cas de cartes maritimes, cela permet au plaisancier d'éviter les hauts-fonds.

On retrouve la même chose sur les cartes météorologiques ou, à chaque point, est associé la pression atmosphérique en ce point et on fait apparaître sur la carte les lignes de niveau à intervalles réguliers (qu'on appelle *isobares*).

Nous allons nous intéresser ici à des lignes de niveau plus abstraites.

EXERCICE 1

Démontrer les deuxième et troisième formules de la médiane.

EXERCICE 2

A et B sont deux points du plan tels que $AB = 6$ cm.
Toutes les constructions seront à faire sur un même schéma.

1. Soit f la fonction qui à tout point M du plan associe le nombre $f(M) = MA^2 + MB^2$
   On note $\mathscr{F}_k$ la ligne de niveau k pour la fonction f, c'est-à-dire l'ensemble des points du plan tels que $f(M) = k$.
   (a) Montrer que $f(M) \geqslant 18$.
   Que peut-on en déduire pour $\mathscr{F}_k$ lorsque $k < 18$?
   (b) Déterminer $\mathscr{F}_{18}$ et la représenter.
   (c) Montrer $\mathscr{F}_{20}$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon. La représenter.
   (d) Déterminer et représenter $\mathscr{F}_{40}$.
   (e) Indiquer la nature des lignes de niveau k associées à f selon les valeurs de k.
   Bonus : Indiquer les caractéristiques précises de ces lignes de niveau.
2. Soit g la fonction qui à tout point M du plan associe le nombre $g(M) = MA^2 - MB^2$
   On note $\mathscr{G}_k$ la ligne de niveau k pour la fonction g, c'est-à-dire l'ensemble des points du plan tels que $g(M) = k$.
   (a) Montrer que $M \in \mathscr{G}_0$ si et seulement si $\overrightarrow{MI} \perp \overrightarrow{BA}$.
   En déduire $\mathscr{G}_0$ et la tracer.
   (b) On cherche maintenant à déterminer et représenter $\mathscr{G}_{-12}$.
      i. Montrer que $M \in \mathscr{G}_{-12}$ si et seulement si $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA} = -6$.
      ii. Soit M_0 un point appartenant à $\mathscr{G}_{-12}$ et à la droite (AB).
         A. Justifier que $\overrightarrow{IM_0}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraire.
         B. Déterminer IM_0.
         C. En déduire la position de M_0. Le construire.
      iii. En déduire que $\mathscr{G}_{-12}$ est une droite dont on précisera les caractéristiques et la tracer.
   (c) En s'inspirant de la question précédente, déterminer et tracer $\mathscr{G}_{24}$.
   (d) Indiquer la nature des lignes de niveau k associées à g selon les valeurs de k.
   Bonus : Indiquer les caractéristiques précises de ces lignes de niveau.
3. Soit h la fonction qui à tout point M du plan associe le nombre $h(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$
   On note $\mathscr{H}_k$ la ligne de niveau k pour la fonction h, c'est-à-dire l'ensemble des points du plan tels que $h(M) = k$.
   (a) Montrer que $h(M) \geqslant -9$.
   Que peut-on en déduire pour $\mathscr{H}_k$ lorsque $k < -9$?
   (b) Déterminer $\mathscr{H}_{-9}$ et la représenter.
   (c) Montrer $\mathscr{H}_0$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon. La représenter.
   (d) Déterminer et représenter $\mathscr{H}_{25}$.
   (e) Indiquer la nature des lignes de niveau k associées à h selon les valeurs de k.
   Bonus : Indiquer les caractéristiques précises de ces lignes de niveau.

EXERCICE 3

Soit S une série statistique quantitative comportant N données : $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N\}$ et $d(x)$ la fonction qui à un réel x associe :

$$d(x) = \frac{1}{N}\left[(x-x_1)^2 + \dots + (x-x_N)^2\right]$$

On peut voir d comme la fonction qui à un nombre x associe la moyenne des distances de ce nombre à chacune des valeurs de la série, la distance entre deux nombres x et y étant définie ici comme $(x-y)^2$.

On cherche la valeur centrale associée à cette distance, c'est à dire le nombre x_0 tel que $d(x_0)$ est le minimum de d, autrement dit le nombre le plus proche de toutes les valeurs de la série pour cette distance.

1. *Cas particulier*

   Cette partie nécessite un tableur (Calc de la suite bureautique gratuite Open Office, par exemple).

   Soit S la série constituée des moyennes de classe des élèves d'une Première S en mathématiques au premier trimestre.

   $$S = \{16,3\,;\, 9,4\,;\, 5,6\,;\, 10,1\,;\, 12,9\,;\, 10,7\,;\, 11,1\,;\, 7,6\,;\, 6\,;\, 13,3\,;\, 9,1\,;\, 9,1\,;\, 10,3\,;\, 13,3\,;\, 10,1\,;$$
   $$13,1\,;\, 7,3\,;\, 7\,;\, 8,9\,;\, 17,8\,;\, 10,3\,;\, 11,1\,;\, 15,6\,;\, 6,3\,;\, 13,9\,;\, 10,5\,;\, 9,2\,;\, 8,3\,;\, 8,6\,;\, 9,2\,;\, 14\}$$

   (a) On commence avec $x = 10$. Entrer la valeur de x dans la première case du tableur (A1).

   (b) Entrer la série S dans la deuxième colonne qu'on nommera x_i (de B2 à B...).

   (c) Indiquer au tableur dans troisième colonne, qu'on nommera $(x_i - x)^2$, le calcul à effectuer pour obtenir la distance du premier nombre de la série à x présent dans la case A1.

   (d) Copier coller ce calcul afin d'avoir dans la troisième colonne, les distances de chacun des nombres de la série à x.

   (e) En bas de cette colonne, indiquer au tableur le calcul à effectuer pour obtenir $d(x)$, la moyenne de ces distances.
   Vérifier que $d(10) \approx 9,25$.

   (f) Recopier sur sa copie et compléter le tableau suivant :

x	-5	0	5	10	15	20	25
$d(x)$							

   (g) En tatonnant, déterminer la valeur de x, au dixième près, telle que $d(x)$ est minimun.
   Fournir le fichier avec sa copie.

2. *Cas général*

   (a) Montrer que

   $$d(x) = x^2 - 2x\left(\frac{x_1 + \dots + x_N}{N}\right) + \frac{x_1^2 + \dots + x_N^2}{N}$$

   (b) En déduire que $d(x)$ admet un minimum.

   (c) Montrer que ce minimum est atteint en $x_0 = \overline{x}$, où $\overline{x}$ est la moyenne des valeurs de la série.
   Le vérifier dans le cas particulier du 1.

   (d) Montrer que le minimum de $d(x)$ est égal à V, la variance de la série.
   Le vérifier dans le cas particulier du 1.

   (e) Conclure.

Remarque. On admettra que, lorsque la distance entre deux nombres x et y est définie par $|x-y|$, le minimum de la fonction qui à x associe la moyenne des distances de x à chacune des valeurs de la série est atteint en $x_0 = m$ où m est la médiane de la série.

Chapitre 7

Statistiques

Sommaire

7.1 Rappels de Seconde

7.1.1 Vocabulaire

Définition 7.1 (population, individu, caractère, série statistique)**.**
- Population : C'est l'ensemble sur lequel porte une étude statistique (même s'il s'agit d'objets), si elle est trop grande, on s'intéresse à un échantillon de cette population ;
- Individu : C'est un élément de la population ;
- Caractère : C'est ce qu'on observe chez l'individu ;
- Série statistique : C'est l'ensemble des observations collectées.

Exemples 7.1. On peut s'intéresser à une classe (population), comportant des élèves (individus) et observer leur nombre de frères et soeurs (caractère) ou une chaîne d'usine produisant des bras de suspension pour voiture (population), et observer sur chaque pièce (individu) ses dimensions exactes (caractère) ou encore s'intéresser à la population française (population dont on prendra un échantillon) comportant des individus (individus) et estimer leur intention de vote (caractère) pour la prochaine présidentielle.

Définition 7.2 (quantitative, qualitative, discrète, continue)**.**
- La série statistique est dite *quantitative* quand le caractère observé est mesurable (nombre de frères et soeurs, dimensions d'une pièce) et *qualitative* sinon (candidat pour lequel un individu à l'intention de voter).
- Dans le cas d'une série quantitative, celle-ci est dite *discrète* si les valeurs pouvant être prises par le caractère sont limitées à un ensemble fini de valeurs (le nombre de frères et soeurs ne peut être qu'un élément de l'ensemble $\{0;1;\dots;10\}$) et *continue* si le caractère étudié peut prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle (les dimensions d'une pièce).

Définition 7.3 (effectif, fréquence, classe)**.** • Effectif d'une valeur : C'est le nombre de fois que la valeur d'un caractère revient dans la série ;
- Fréquence d'une valeur : C'est l'effectif de la valeur divisé par l'effectif total ; elle est comprise entre 0 et 1.
- Classes de valeurs : s'il y a trop de valeurs différentes, elles sont rangées par *classe* (intervalle), l'effectif de la classe étant alors le nombre de données de la série appartenant à cet intervalle.

Pour faire parler ces (souvent longues) séries, il est nécessaire de les résumer : on produit alors *des* statistiques. Tout résumé met en évidence certaines caractéristiques de la série mais engendre une *perte d'information*, toutes les données n'étant plus accessibles.

Le résumé peut être un graphique : en Seconde vous avez vu le *diagramme en bâtons* et l'*histogramme* (pour des séries rangées en classes). Nous en verrons un autre cette année.

Il peut aussi être numérique dans le cas d'une série satistique quantitative. Ces résumés numériques sont de deux types : les mesures centrales et les mesures de dispersion.

7.1.2 Mesures centrales

Elles visent à résumer la série par une seule valeur qu'on espère représentative de toutes les valeurs de la série.

En Seconde vous en avez vu trois : le mode, la moyenne, la médiane. Rappelons leur définition.

Définition 7.4 (Mode)**.** Le *mode* d'une série statistique est la donnée la plus fréquente de la série.

Remarques. • S'il y a plusieurs données arrivant à égalité, il y a plusieurs modes.
- Si les données sont rangées en classe, on parle de *classe modale*.
- Le mode est défini aussi bien pour les séries quantitatives que qualitatives.

Le mode est un résumé sommaire d'une série qui fournit un type d'information assez limité. Il pourra intéresser un publicitaire.

Définition 7.5 (Moyenne)**.** La *moyenne* d'une série statistique quantitative est le nombre $\overline{x}$ tel que la somme de toutes les valeurs de la série est inchangée si on remplace chaque valeur par $\overline{x}$

Propriété 7.1. *Soit une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n\}$. Alors la moyenne de S, notée $\overline{x}$, est $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$*

Remarque. Le symbole $\sum$ indique une somme. Ici il faut lire « somme de $i = 1$ à n des valeurs x_i » soit, en d'autres termes, $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

Preuve. Par définition de $\overline{x}$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = \underbrace{\overline{x} + \overline{x} + \ldots + \overline{x}}_{n} = n\overline{x}$, donc $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ ◊

La moyenne a des avantages calculatoires : si l'on connaît les moyennes et les effectifs de deux séries (ou deux sous-séries), on peut obtenir la moyenne de la série constituée l'agrégation de ces deux séries. Elle a le défaut d'être très sensible aux valeurs extrêmes.

Définition 7.6 (Médiane)**.** On appelle *médiane* d'une série statistique quantitative tout nombre m tel que :
- la moitié au moins des valeurs de la série est inférieure à m
- la moitié au moins des valeurs de la série est supérieure à m

Remarques. • Rappel : mathématiquement « inférieur » et « supérieur » signifient, en français, « inférieur ou égal » et « supérieur ou égal ».
- On admettra qu'un tel nombre existe toujours.
- Plusieurs valeurs peuvent parfois convenir pour la médiane.
- La médiane partage la série en deux sous-séries ayant *quasiment* le même effectif ; *quasiment* car si plusieurs valeurs de la série sont égales à la médiane, les données inférieures à la médiane et les données supérieures à la médiane ne seront pas forcément en nombre égal.
- Il faut comprendre la médiane comme « la valeur du milieu ».

Propriété 7.2. *Soit une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n\}$ telles que $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$.*

- *Si n est impair,* ***la*** *médiane m de S est le $\frac{n+1}{2}$-ième élément de la série : $m = x_{\frac{n+1}{2}}$*
- *Si n est pair, tout nombre compris entre le $\frac{n}{2}$-ième et le $\left(\frac{n}{2}+1\right)$-ième élément de la série est* ***une*** *médiane. On prend généralement $m = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}$*

La médiane a l'avantage de ne pas être influencée par les valeurs extrêmes. Elle n'a aucun avantage pratique dans les calculs, puisque pour connaître la médiane d'une série constituée de l'agrégation de deux séries, il faut nécessairement re-ordonner la nouvelle série pour trouver sa médiane, qui n'aura pas de lien avec les deux médianes des deux séries initiales.

7.1.3 Mesures de dispersion

En Seconde, les seules mesures de dispersion abordées sont les valeurs extrêmes (valeurs minimale et maximale) et l'étendue (différence entre les valeurs extrêmes de la série).

Un des objectifs de la première est de les compléter par d'autres mesures plus fines.

7.2 Un problème

7.2.1 Le problème

Le couple moyenne-médiane fournit de bonnes informations sur une série dans certains cas :

- Si la moyenne est supérieure à la médiane, on peut conjecturer les données supérieures à la médiane sont éloignées de celle-ci ou que les données inférieures à la médiane sont proches de celle-ci (le mode peut alors indiquer laquelle de ces deux possibilités est la plus probable) ; si la moyenne est très supérieure à la médiane on peut conjecturer que les deux facteurs jouent.
- Si la moyenne est inférieure à la médiane, on peut conjecturer les données supérieures à la médiane sont proches de celle-ci ou que les données inférieures à la médiane sont éloignées de celle-ci (le mode peut alors indiquer laquelle de ces deux possibilités est la plus probable) ; si la moyenne est très inférieure à la médiane on peut conjecturer que les deux facteurs jouent.

Dans ces cas là, avec seulement 2 nombres (médiane et moyenne), on peut avoir un bon résumé de la série.

Par contre si moyenne et médiane sont proches, la seule chose qu'on peut dire c'est les données inférieures et supérieures à la médiane se compensent pour la moyenne. Soit pas grand chose.

On va voir dans le problème qui suit qu'il nous faut d'autres outils pour faire résumer une série.

Problème 7.1.
Soit S_1, S_2 et S_3 les trois séries de notes suivantes :

S_1	2 ; 2 ; 4 ; 4 ; 6 ; 10 ; 14 ; 16 ; 16 ; 18 ; 18
S_2	2 ; 8 ; 9 ; 10 ; 10 ; 10 ; 11 ; 12 ; 18
S_3	2 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 6 ; 6 ; 7 ; 9 ; 10 ; 11 ; 13 ; 14 ; 14 ; 15 ; 15 ; 15 ; 15 ; 18

1. Pour chacune de ces séries, déterminer les valeurs extrêmes, la moyenne et la médiane.
   Que constate-t-on ?
2. Ces trois séries ont-elles la même allure ?
   Inventer des mesures permettant de témoigner des différences entre elles.

7.2.2 Résolution du problème

Les trois séries proposées ont les mêmes valeurs extrêmes, la même moyenne et la même médiane, cependant on peut observer qu'elles n'ont pas la même allure.

Dans S_1, deux blocs de notes extrêmes de part et d'autre des valeurs centrales et se compensent pour la moyenne.

Dans S_2, hormis les valeurs extrêmes, toutes les notes sont regroupées autour des valeurs centrales.

Dans S_3, deux gros blocs sont situés de part et d'autre des valeurs centrales, l'un autour de 5, l'autre autour de 15, et se compensent pour la moyenne et un petit bloc est centré sur 10.

Il s'agît donc d'inventer des mesures témoignant de la dispersion globale des données autour des valeurs centrales. Ce nouvel indicateur devra indiquer un écart important pour S_1, un écart réduit pour S_2 et un écart moyen pour S_3.

Première approche

Une autre façon de mesurer la dispersion d'une série est d'examiner comment sont réparties les plus petites valeurs d'une part, et les plus grandes valeurs d'autre part. Or on connait la valeur qui les sépare : c'est la médiane.

On s'intéresse alors, pour chaque série, aux deux sous-séries que constituent les données inférieures à la médiane et les données supérieures à la médiane.

Moyenne On peut en faire les moyennes qu'on peut appeler moyenne inférieure $\left(\overline{x^-}\right)$ et moyenne supérieure $\left(\overline{x^+}\right)$.

On obtient alors :

S_1	$\overline{x^-} \approx 4,7$; $\overline{x^+} \approx 15,3$
S_2	$\overline{x^-} = 7,8$; $\overline{x^+} = 12,2$
S_3	$\overline{x^-} = 6$; $\overline{x^+} = 14$

Ces indicateurs fournissent une bonne mesure de la dispersion de chacune des séries autour de la médiane.

Médiane On peut en faire les médianes qu'on peut appeler médiane inférieure (m^-) et médiane supérieure $\left(m^+\right)$.

On obtient alors :

S_1	$m^- = 4$; $m^+ = 16$
S_2	$m^- = 9$; $m^+ = 11$
S_3	$m^- = 5$; $m^+ = 5$

Ces indicateurs fournissent là encore une bonne mesure de la dispersion de chacune des séries autour de la médiane.

On notera que au moins 25% des données de la série sont comprises entre la valeur minimale et m^-, 25% entre m^- et m, 25% entre m et m^+ et enfin 25% entre m^+ et la valeur maximale.

Ces trois nombres partagent donc la série en quarts et sont appelés *quartiles*. m^- est le premier quartile, noté Q_1, m est le deuxième quartile, noté m, et m^+ le troisième quartiel, noté Q_3.

C'est cette seconde mesure de dispersion qui a été retenue par les statisticiens.

Une seconde approche

Une façon de procéder est de mesurer l'écart de chaque donnée avec les valeurs centrales que sont la médiane et la moyenne en faisant la différence entre chaque donnée et ces valeurs centrales.

Ainsi on obtient :

S_1	-8; -8; -6; -6; -4; 0; $+4$; $+6$; $+6$; $+8$; $+8$
S_2	-8; -2; -1; 0; 0; 0; $+1$; $+2$; $+8$
S_3	-8; -5; -5; -5; -5; -4; -4; -3; -1; 0; $+1$; $+3$; $+4$; $+4$; $+5$; $+5$; $+5$; $+5$; $+8$

Le problème est que la somme de ces écarts est nulle (ou proche de 0 dans des cas moins particuliers que ces séries) !

Valeur absolue Une première solution est de prendre la valeur absolue de chacun de ces écarts.

Cet indicateur donne 64 pour S_1, 22 pour S_2 et 80 pour S_3 et témoigne que S_2 est moins dispersée que les autres, par contre il fournit une mauvaise indication pour S_1 et S_3. Cela est dû au fait que si les données de S_1 sont plus dispersées que celles de S_3, il y en a moins, donc cet indicateur est faussé par les effectifs.

Pour contourner ce problème, il suffit de passer à la moyenne. Ainsi la moyenne des écarts aux valeurs centrales est $\frac{64}{11} \approx 5,8$ pour S_1, $\frac{22}{9} \approx 2,4$ pour S_2 et $\frac{80}{19} \approx 4,2$ pour S_3.

On obtient ainsi une bonne mesure de la dispersion.

On admettra que pour cette mesure de dispersion, c'est la médiane qui fournit la valeur la plus centrale.

Carré Une seconde solution est de prendre les carrés de chacun de ces écarts et d'en faire la moyenne pour compenser les différences d'effectifs comme précédemment.

On obtient $\frac{(-8)^2+(-8)^2+(-6)^2+\ldots+8^2}{11} \approx 39,3$ pour S_1, 15,3 pour S_2 et 21,7 pour S_3.

On obtient là encore ainsi une bonne mesure de la dispersion.

On démontre que pour cette mesure de dispersion, c'est la moyenne qui fournit la valeur la plus centrale.

C'est cette seconde mesure de dispersion qui a été choisie par les statisticiens. Elle est nommée *variance* de la série.

Dépendant des carrés des écarts à la moyenne, son unité peut parfois poser problème. Ainsi, si les données sont en mètre, la variance est en mètre carré. Par ailleurs, avec la mesure en valeur absolue, on obtenait des écarts à la médiane parlants (« les écarts à la médiane de S_1 sont en moyenne de 5,8 »est plus parlant que « la variance de S_1 est 39,3 »).

Pour toutes ces raisons, et d'autres encore, c'est la racine carrée de la variance qu'on fournit comme résumé et on appelle cette mesure de dispersion l'*écart-type* de la série.

Ainsi les écarts-types des séries S_1, S_2 et S_3 sont, respectivement, 6,3, 3,9 et 4,7.

Même si cela n'est pas tout à fait exact, on peut penser l'écart-type comme étant l'écart moyen à la moyenne de toutes les données de la série.

7.3 Médiane, quartiles et déciles

7.3.1 Définitions

Définition 7.7. Soit S une série statistique quantitative.
- On appelle *premier quartile*, noté Q_1, tout réel tel que
  - au moins 25% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à Q_1
  - au moins 75% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à Q_1
- On appelle *deuxième quartile* ou *médiane*, noté m (ou parfois Q_2), tout réel tel que
  - au moins 50% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à m
  - au moins 50% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à m
- On appelle *troisième quartile*, noté Q_3, tout réel tel que
  - au moins 75% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à Q_3
  - au moins 25% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à Q_3

De la même manière qu'on a défini les quartiles, on peut définir les *déciles* : ce sont les 9 nombres qui partagent la série en dixièmes (comme les trois quartiles partagent la série en quarts).

On s'intéressera à deux d'entre eux :

Définition 7.8. Soit S une série statistique quantitative.
- On appelle *premier décile*, noté D_1, tout réel tel que
  - au moins 10% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à D_1
  - au moins 90% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à D_1
- On appelle *neuvième décile*, noté D_9, tout réel tel que
  - au moins 90% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à D_9
  - au moins 10% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à D_9

On admettra que de tels nombres existent toujours.

Définition 7.9. Soit une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ telles que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. On appelle
- *étendue* de la série la différence $e = x_n - x_1$ (différence entre les termes extrêmes de la série) ;
- *écart interquartile* la différence $Q_3 - Q_1$;
- *intervalle interquartile* l'intervalle $[Q_1 ; Q_3]$.
- *écart interdécile* la différence $D_9 - D_1$;
- *intervalle interdécile* l'intervalle $[D_1 ; D_9]$.

Remarque. Toutes ces mesures statistiques sont dans la même unité que les valeurs de la série.

7.3.2 Propriétés

Comme pour la médiane, selon le nombre n de données dans la série, il y a parfois plusieurs possibilités pour Q_1 et Q_3 et parfois une seule, selon que n est ou n'est pas multiple de 4, ce qui peut compliquer leur recherche.

Heureusement, une formule permet de trouver une valeur covenable dans tous les cas :

Théorème 7.3. *Soit une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ telles que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Les réels :*

$$D_1 = x_{\left(E\left(\frac{n}{10}\right)+1\right)} \qquad Q_1 = x_{\left(E\left(\frac{n}{4}\right)+1\right)} \qquad m = x_{\left(E\left(\frac{n}{2}\right)+1\right)} \qquad Q_3 = x_{\left(E\left(\frac{3n}{4}\right)+1\right)} \qquad D_9 = x_{\left(E\left(\frac{9n}{10}\right)+1\right)}$$

où $E(x)$ est la partie entière de x, c'est-à-dire l'entier n tel que $n \leq x < n+1$, définissent toujours des valeurs convenables pour le premier décile, le premier quartile, la médiane, le troisième quartile et le neuvième décile.

On l'admettra.

Remarques.
- $E(2,3) = 2$ et $E(3) = 3$.
- Les réels obtenus avec le théorème sont toujours des éléments de la série.

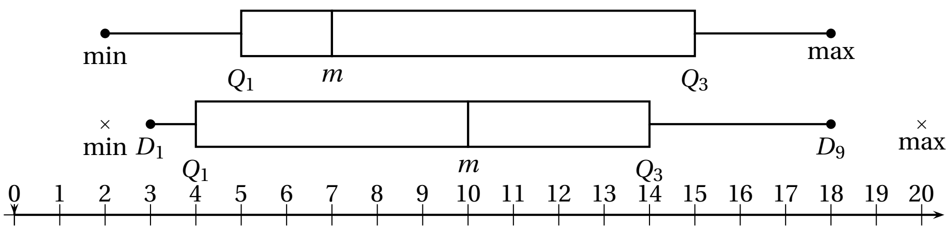
Propriété 7.4. *Soit une série statistique quantitative comportant n données :* $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ *avec* $n \geq 5$.
On ne change les déciles, les quartiles et la médiane si on remplace x_1 *par n'importe quel nombre de l'intervalle* $]-\infty\,; x_1]$ *et* x_n *par n'importe quel nombre de l'intervalle* $[x_n\,; +\infty[$.

Preuve. Comme on ne change pas le nombre de valeurs de la série, il y en aura toujours autant inférieures et supérieures à D_1, Q_1, m, Q_3 et D_9. ♢

7.3.3 Diagramme en boite

On peut représenter graphiquement les valeurs extrêmes, les quartiles et la médiane par un diagramme en boite, appelé aussi boite à moustaches, conçues de la manière suivante :

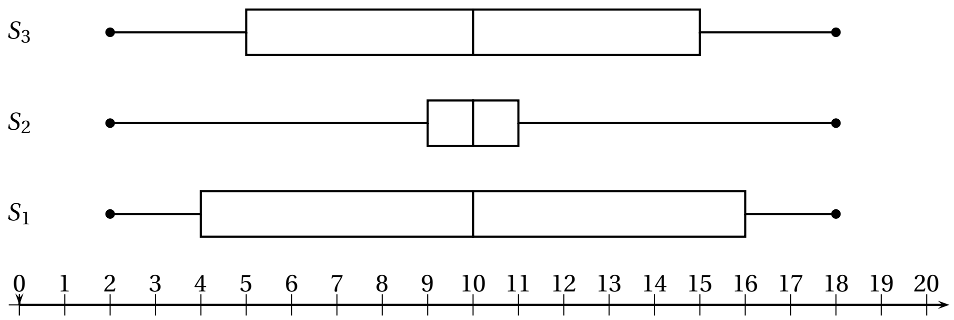
- au centre une boite allant du premier au troisième quartile, séparée en deux par la médiane ;
- de chaque côté une moustache allant du minimum au premier quartile pour l'une, et du troisième quartile au maximum pour l'autre.



Ces diagrammes permettent une interprétation visuelle et rapide de la dispersion des séries statistiques. Ils permettent également d'apprécier des différences entre des séries (lorsqu'elles ont des ordres de grandeurs comparables).

Remarques.
- La hauteur des boites est arbitraire (on les fait parfois proportionnelles à l'effectif total de la série).
- La boite contient les 50% des données centrales.
- On coupe parfois les moustaches de part et d'autre à la hauteur du premier et neuvième décile ; on fait alors apparaître les minimum et maximum par un point (voir la seconde boite du schéma précédent).

Exemple 7.2. Pour nos trois séries, on obtient :



7.3.4 Effet d'une transformation affine des données

Théorème 7.5. *Soit S une série statistique quantitative comportant n données :* $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ *telles que* $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$*, où* Q_1*,* Q_3*,* m *et* Q *sont respectivement les premier et troisième quartile, la médiane et l'écart interquartile et* S' *la série* $S' = \{y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n\}$*, où* Q'_1*,* Q'_3*,* m' *et* Q' *sont respectivement les premier et troisième quartile, la médiane et l'écart interquartile et telle que* $y_i = ax_i + b$ *pour tout i,* $a \neq 0$ *et b étant deux réels.*
- *Si* $a > 0$*, alors* $Q'_1 = aQ_1 + b$*,* $m' = am + b$ *et* $Q'_3 = aQ_3 + b$ *sont respectivement des premier quartile, médiane et troisième quartile de* S'.
- *Si* $a < 0$*, alors* $Q'_1 = aQ_3 + b$*,* $m' = am + b$ *et* $Q'_3 = aQ_1 + b$ *sont respectivement des premier quartile, médiane et troisième quartile de* S'.
- $Q' = |a|Q$.

Preuve.
- Si $a > 0$, $f(x) = ax + b$ est une fonction affine croissante et $y_1\,; \dots\,; y_n$ sont rangés dans le même ordre que $x_1\,; \dots\,; x_n$. Q_1 étant un premier quartile de S, $f(Q_1) = Q'_1$ est tel que 25% au moins des données de S' sont inférieures à Q'_1, et 75% sont lui sont supérieures. Il en va de même pour $f(m) = m'$ et $f(Q_3) = Q'_3$.
- Si $a < 0$, f est décroissante et $y_1\,; \dots\,; y_n$ sont rangés l'ordre inverse de $x_1\,; \dots\,; x_n$. Q_3 étant le troisième quartile de S, $f(Q_3) = Q'_1$ est tel que 25% au moins des données de S' sont inférieures à Q'_1, et 75% sont lui sont supérieures (l'ordre est inversé. Il en va de même pour $f(m) = m'$ et $f(Q_1) = Q'_3$.
- La preuve du dernier point est laissée en exercice.

♢

7.4 Moyenne, variance et écart-type

7.4.1 Définitions

Définition 7.10. Soit S une série statistique quantitative comportant N données : $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N\}$.
On appelle :

- *moyenne* de S, notée $\overline{x}$, le nombre tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i = N\overline{x} \Leftrightarrow \overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$.
- *variance* de S, notée V, le nombre $V = \frac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\left(\overline{x} - x_i\right)^2$
- *écart-type* de S, noté s, le nombre $s = \sqrt{V}$.

Les formules de la définition sont équivalentes aux suivantes :

Propriété 7.6. *Soit S une série statistique quantitative comportant n données :* $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N\}$.
Dans le cas où n_i est l'effectif de la valeur x_i et où $f_i = \frac{n_i}{N}$ est sa fréquence, les formules deviennent :

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_i n_i x_i = \sum_i f_i x_i$$

$$V = \frac{1}{N}\sum_i n_i\left(\overline{x} - x_i\right)^2 = \sum_i f_i\left(\overline{x} - x_i\right)^2$$

Preuve.
- La valeur x_i ayant pour effectif n_i, pour chaque valeur on a :
  $\underbrace{x_i + x_i + \ldots + x_i}_{n_i} = n_i x_i$
  et donc la somme de toutes les valeurs est bien égale à la somme des $n_i x_i$.
- On a :
  $\overline{x} = \frac{1}{N}\displaystyle\sum_i n_i x_i = \frac{1}{N}\left(n_1 x_1 + \ldots + n_N x_N\right) = \frac{n_1}{N}x_1 + \ldots + \frac{n_N}{N}x_N = f_1 x_1 + \ldots + f_N x_N$
- La démonstration est identique pour la variance.

♢

Rappelons ce que nous avons vu dans le problème d'introduction.

La variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne. Elle mesure donc la dispersion des valeurs autour de la moyenne. Elle n'est pas très parlante car elle s'exprime dans le carré de l'unité du caractère.

L'écart-type a l'avantage de s'exprimer dans la même unité que le caractère.

L'écart-type permet de comparer la dispersion de deux séries, quand l'ordre de grandeur des données des deux séries est le même. Contrairement à l'écart interquartile, il tient compte de l'ensemble de la population.

7.4.2 Propriétés

On dispose d'une formule plus pratique pour calculer la variance :

Théorème 7.7. *Soit S une série statistique quantitative comportant N données :* $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N\}$, *$n_i$ l'effectif de la donnée x_i et f_i sa fréquence. Alors on a :*

$$V = \left(\frac{1}{N}\sum_i n_i x_i^2\right) - \overline{x}^2 = \left(\sum_i f_i x_i^2\right) - \overline{x}^2$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{N}\sum_i n_i\left(\overline{x} - x_i\right)^2 = \frac{1}{N}\sum_i n_i\left(\overline{x}^2 - 2\overline{x}x_i + x_i^2\right) \\
&= \frac{1}{N}\left[n_1\left(\overline{x}^2 - 2\overline{x}x_1 + x_1^2\right) + \ldots + n_N\left(\overline{x}^2 - 2\overline{x}x_N + x_N^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{N}\left[(n_1 + \ldots + n_N)\overline{x}^2 - 2\overline{x}(x_1 + \ldots + x_N)\ + n_1 x_1^2 + \ldots + n_N x_N^2\right]
\end{aligned}$$

Or $n_1 + \ldots + n_N = N$ car c'est la somme des effectifs de chaque valeur et $x_1 + \ldots + x_N = N\overline{x}$ par définition de la moyenne.
On a donc :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{N}\left[N\overline{x}^2 - 2\overline{x}(N\overline{x}) + n_1x_1^2 + \ldots + n_Nx_N^2\right] = \frac{1}{N}\left[N\overline{x}^2 - 2N\overline{x}^2 + n_1x_1^2 + \ldots + n_Nx_N^2\right] \\ &= \frac{1}{N}\left[-N\overline{x}^2 + n_1x_1^2 + \ldots + n_Nx_N^2\right] = -\overline{x}^2 + \frac{1}{N}\left(n_1x_1^2 + \ldots + n_Nx_N^2\right) \\ &= -\overline{x}^2 + \frac{1}{N}\sum_i n_ix_i^2 \end{aligned}$$

On démontre la formule avec les fréquences de la même manière que dans la démonstration de la propriété 6. ◊

7.4.3 Effet d'une transformation affine des données

Théorème 7.8. *Soit S une série statistique quantitative comportant N données : $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_N\}$ de moyenne $\overline{x}$, de variance V_x et d'écart-type s_x et S' la série $S' = \{y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_N\}$ de moyenne $\overline{y}$, de variance V_y et d'écart-type s_y telle que $y_i = ax_i + b$ pour tout i, $a \neq 0$ et b étant deux réels. Alors :*

$$\overline{y} = a\overline{x} + b \qquad V_y = a^2V_x \qquad s_y = |a|s_x$$

Preuve.

- On a :
$$\overline{y} = \frac{y_1 + \ldots + y_N}{N} = \frac{ax_1 + b + \ldots + ax_N + b}{N} = \frac{a(x_1 + \ldots + x_N) + Nb}{N} = a\frac{x_1 + \ldots + x_N}{N} + b = a\overline{x} + b$$
- On a :
$$V_y = \frac{1}{N}\sum_i \left(y_i - \overline{y}\right)^2 = \frac{1}{N}\sum_i \left(ax_i + b - a\overline{x} - b\right)^2 = \frac{1}{N}\sum_i a^2\left(x_i - \overline{x}\right)^2 = a^2\frac{1}{N}\sum_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2 = a^2V_x$$
- $s_y = \sqrt{V_y} = \sqrt{a^2V_x} = |a|s_x$.

◊

7.5 Exercices

Exercice 7.1.
On a relevé le prix de vente d'un CD et le nombre de CD vendus chez différents fournisseurs. Les résultats forment une série statistique à une variable donnée par le tableau ci-dessous.

Prix de vente (en €)	15	16	17	18	19
Nombre de CD vendus	83	48	32	20	17

1. Quelles sont les différentes valeurs de la série.
2. Donner la fréquence correspondant à chacune de ces valeurs.
3. Donner la moyenne et l'écart-type de la série. Que représentent ces nombres ?
4. Représenter la série par un diagramme à bâtons.

Exercice 7.2.
Dans une classe de 30 élèves, la moyenne des 20 filles est 11,5 et la moyenne des 10 garçons est 8,5. Donner la moyenne de classe.

Exercice 7.3.
On donne la série suivante : 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 15, 15, 17.

1. Représenter le diagramme en boîte correspondant en coupant les moustaches aux premier et neuvième décile.
2. Quel est l'écart interquartile de la série ?
3. Quel est l'intervalle interdécile de la série ?

Exercice 7.4.
Le tableau ci-dessous donne une répartition des salaires mensuels en euros des employés dans une entreprise.

Salaire	[1 000 ; 1 200[	[1 200 ; 1 500[	[1 500 ; 2 000[	[2 000 ; 3 000[	[3 000 ; 10 000[
Effectif	326	112	35	8	3

1. Quel est le nombre d'employés de l'entreprise ?
2. Quel est le nombre d'employés touchant un salaire mensuel supérieur ou égal à 1 200 € ?
3. Quel est le salaire moyen des employés de l'entreprise ?

Exercice 7.5.

Un entomologiste a fait des relevés sur la taille de 50 courtilières adultes.
33, 35, 36, 36, 37, 37, 37, 38, 38, 38, 39, 39, 39, 39, 40, 40, 40, 40, 40, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 43, 43, 43, 43, 44, 44, 44, 44, 45, 45, 45, 46, 46, 47, 47, 48, 48, 50.

1. Organiser les relevés dans le tableau d'effectifs suivant :

Valeur	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Effectif																		
Effectif cumulé croissant																		

2. Représenter les données par un diagramme à bâtons. Un diagramme circulaire serait-il intéressant ?
3. Calculer la moyenne de la série. Déterminer sa médiane. Déterminer les premier et troisième quartiles puis les premier et neuvième déciles.
4. Construire le diagramme en boîte correspondant.

Exercice 7.6.

Huit sprinters effectuent deux 100 m. Leurs temps sont donnés dans le tableau suivant :

Sprinter	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
Sprint 1	10"14	10" 17	9"94	10" 05	10"25	10" 09	9" 98	10"32
Sprint 2	10"41	9"97	9" 96	10" 12	10" 19	10" 24	10"12	10" 17

Soit (x_i) les temps respectifs des sprinters A, B, ..., H au sprint 1 et (yi) les temps respectifs des sprinters A, B, ..., H au sprint 2.

1. Calculer les moyennes $\overline{x}$ et $\overline{y}$ des séries (x_i) et (y_i).
2. Calculer les écarts-types s_x et s_y des séries (x_i) et (y_i).
3. Lequel des deux sprints a été le plus homogène ?

Exercice 7.7.

Soit S une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ telles que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, où Q_1, Q_3, m et Q sont respectivement les premier et troisième quartile, la médiane et l'écart interquartile et S' la série $S' = \{y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n\}$, où Q'_1, Q'_3, m' et Q' sont respectivement les premier et troisième quartile, la médiane et l'écart interquartile et telle que $y_i = ax_i + b$ pour tout i, $a \neq 0$ et b étant deux réels.
Démontrer que $Q' = |a|Q$.

Exercice 7.8.

Le tableau suivant donne les effectifs des notes obtenues dans une classe en Mathématiques et en Physique :

Notes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Maths	0	0	0	0	1	0	1	1	3	4	4	1	3	2	2	1	1	0	0	0	0
Physique	0	1	0	0	2	0	1	2	1	1	4	2	2	0	3	2	1	0	1	0	1

Le but de l'exercice est de comparer la dispersion des notes en Maths et en Physique.

1. Utilisation des quartiles
   (a) Calculer médiane m_e et quartiles Q_1 et Q_3 en Maths
   (b) Calculer médiane m'_e et quartiles Q'_1 et Q'_3 en Physique
   (c) Représenter les diagrammes en boîte des notes en Maths et en Physique. Interpréter.
2. Utilisation des écarts-types
   (a) Calculer la moyenne $\overline{m}$ des notes en Maths et la moyenne des notes $\overline{m'}$ en Physique. Interpréter.
   (b) Calculer l'écart-type s des notes en Maths et l'écart-type s' des notes en Physiques. Interpréter. (*On considérera que les notes en Maths et les notes en Physique sont des grandeurs comparables et qu'il n'y a pas lieu de relativiser les écarts-types*)

Exercice 7.9.

Quarante candidats passent un examen (noté de 0 à 20). Leur moyenne est de 9,5 et l'écart-type est égal à 2.
On veut transformer toutes les notes à l'aide d'une fonction affine afin d'obtenir une moyenne de 10 et un écart-type de 3 (on dit qu'on procède à une péréquation affine).
Notons (xi) les notes initiales et (yi) les notes obtenues après changement affine.
On a donc : $\overline{x} = 9$; $s_x = 2$. On pose : $y_i = ax_i + b$ où a (avec $a > 0$) et b sont à déterminer afin d'avoir $\overline{y} = 10$; $s_y = 3$.

1. Exprimer $\overline{y}$ en fonction de a, b et $\overline{x}$.
2. Exprimer s_y en fonction de a et s_x.

3. En déduire les valeurs de a et b. Quelle est la nouvelle note d'un candidat ayant initialement 5,6 ? (On arrondira à 10^{-1})
4. Quelles doivent être les valeurs extrêmes des x_i afin que cette péréquation soit réalisable ? (On arrondira à 10^{-1})

Exercice 7.10.

Le tableau suivant donne les effectifs des notes obtenues dans une classe en Mathématiques et en Sciences de la vie et de la terre :

Note	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Maths	0	1	0	2	0	1	3	0	5	0	2	1	1	0	0	0	2	1	1	0	2
SVT	0	1	0	0	0	0	0	4	4	1	0	3	1	4	2	0	1	0	0	0	1

1. (a) Déterminer les rangs des quartiles et de la médiane des deux séries puis donner leurs valeurs.
   (b) Faire le diagramme en boite des deux séries sur une même échelle puis commenter le diagramme.
2. (a) Déterminer la moyenne des notes de Mathématiques et la comparer à la médiane en expliquant ce qui cause cet écart.
   (b) Déterminer la moyenne des notes de Sciences de la vie et de la terre. L'écart avec la moyenne est-il le même ? Pourquoi ?
   (c) Déterminer les écarts types des deux séries (arrondis au dixième) et commenter vos résultats.
   (d) Le professeur de mathématiques désire appliquer un changement affine ($y = ax + b$ avec $a > 0$) à chacune des notes de façon à ce que la moyenne et l'écart type des notes de mathématique soient égaux à ceux des notes de Sciences et vie de la terre.
      i. Combien doivent valoir a et b ? *On donnera les résultats à* 10^{-2} *près.*
      ii. Ce changement affine est-il possible ?

Exercice 7.11. 1. Calculer, pour chaque mois de l'année, le jour médian ainsi que les jours qui correspondent au premier quartile et au troisième quartile.
2. Même question pour une année entière de 365 jours.

Exercice 7.12.

Le tableau suivant donne les temps de cinq sportifs qui ont couru un 1 500 m et un 5 000 m.

	Coureur 1	Coureur 2	Coureur 3	Coureur 4	Coureur 5
1 500 m	3'58"17	4'05"48	4'12"97	4'08"29	4'00"12
5 000 m	14'58"12	14'47"08	15'37"85	13'57"70	14'48"34

On veut déterminer quelle est la course la plus homogène.

Le problème est que les données de chaque série ne sont pas du même ordre de grandeur. En effet un écart moyen de la première série de 30 s sera proportionnellement plus important qu'un écart moyen de 1 min pour la seconde de 1 min.

Pour palier à cette difficulté on utilise l'écart-type relatif, noté C_v, appelé coefficient de variation définit par $C_v = \frac{s}{\overline{x}}$ et un écart interquartile relatif, définit par $\frac{Q_3 - Q_1}{m}$.

1. Utilisation des coefficients de variation
   (a) Calculer le temps moyen $\overline{m}$, l'écart-type s puis le coefficient de variation $C_v = \frac{s}{\overline{m}}$ pour le 1 500 m. (*On pourra convertir tous les temps en secondes*).
   (b) Faire de même pour le 5 000 m.
   (c) Conclure.
2. Utilisation de l'interquartile relatif
   (a) Déterminer la médiane m_e et les quartiles Q_1 et Q_3 pour le 1 500 m. En déduire l'interquartile relatif $\frac{Q_3 - Q_1}{m_e}$.
   (b) Faire de même pour le 5 000 m.
   (c) Conclure.
3. Donner une explication à la contradiction entre 1.c) et 2.c).

Exercice 7.13.

Démontrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(x_i - x_j\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(x_i - x_j\right)^2 = 2n^2 V(x)$$

Chapitre 8

Fonction dérivée

Sommaire

8.1 Activités

Activité 8.1 (Plusieurs nombres dérivés).
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4$.

1. Déterminer les valeurs des nombres dérivés en a dans les cas suivants :
   - $a = -2$;
   - $a = -1$;
   - $a = 0$;
   - $a = 0,5$;
   - $a = 1$.
2. Cas général : déterminer, en fonction de a, la valeur du nombre dérivé.

On obtient ainsi une fonction, qui dépend de f, qui à tout réel x associe le nombre dérivé de f en x. Une telle fonction est appelée *fonction dérivée de f* et est notée f'. Ainsi, pour $f(x) = -x^2 + 4$, $f'(x) = -2x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Activité 8.2 (Fonctions dérivées de quelques fonctions usuelles).
Déterminer les fonctions dérivées des fonctions usuelles suivantes :

- $f(x) = k$;
- $f(x) = mx + p$;
- $f(x) = x^2$;
- $f(x) = x^3$.

Activité 8.3 (Variations d'une fonction).
Reprenons la fonction de l'activité 8.1 : $f(x) = -x^2 + 4$ et rappelons que le nombre dérivé en x est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse x.

1. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice graphique et par lecture graphique, les variations de f en fonction de x.
2. Comment cela se traduit-il pour les coefficients directeurs des tangentes à la courbe ?
3. En déduire un lien entre les variations de f et la fonction dérivée f'.

Activité 8.4 (Extremum local).
On s'intéresse à la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$

1. Montrer que $f'(x) = 3x^2 - 3$.
2. Etudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
3. Dresser le tableau des variations de f, en faisant apparaître une ligne indiquant le signe de f'.
4. Qu'observe-t-on en -1 et en 1, pour f ? Comment cela se traduit-il pour f' ?

On dit que f admet en -1 et en 1 des extremums locaux.

8.2 Fonction dérivée

Définition 8.1. On dit qu'une fonction f est dérivable sur un ensemble I lorsqu'elle est dérivable en tout nombre de cet ensemble et on note f' la fonction qui a tout nombre x de cet ensemble associe le nombre dérivé de f en x. Cette fonction s'appelle la *fonction dérivée de* f.

8.3 Fonctions dérivées des fonctions usuelles

On admettra[1] que les fonctions usuelles ont les fonctions dérivées suivantes :

Propriété 8.1. *Les fonctions dérivées des fonctions usuelles sont données par le tableau suivant :*

Fonction f	*définie sur*	*Fonction dérivée* f'	*définie sur*
$f(x) = k$ *(constante)*	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^+ =]0;+\infty[$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$

Remarque. Si l'on remarque que $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ et que $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$, on a alors :
$f(x) = x^n$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$ a pour fonction dérivée $f'(x) = nx^{n-1}$.
Ainsi, pour obtenir la fonction dérivée de $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$, on peut appliquer l'une ou l'autre formule :

$$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -\frac{2}{x^{2+1}} = -\frac{2}{x^3} \text{ ou } f'(x) = nx^{n-1} = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

8.4 Opérations sur les fonctions dérivées

Propriété 8.2. *Soient u et v définies et dérivables sur un même intervalle I.*

Fonction	*Fonction dérivée*	*Exemple*
ku *avec* $k \in \mathbb{R}$	ku'	*Si* $f(x) = 4x^3$ *alors* $f'(x) = 4 \times \left(3x^2\right) = 12x^2$
$u + v$	$u' + v'$	*Si* $f(x) = x + \frac{1}{x}$ *alors* $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$
$u \times v$	$u'v + uv'$	*Si* $f(x) = x\sqrt{x}$ *alors* $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ *avec* $x \neq 0$
u^n *avec* $n \in \mathbb{N}^*$	$nu'u^{n-1}$	*Si* $f(x) = \left(x^2 - 1\right)^4$ *alors* $f'(x) = 4(2x)\left(x^2-1\right)^3 = 8x\left(x^2-1\right)^3$
$\dfrac{1}{v}$ *avec* $v(x) \neq 0$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	*Si* $f(x) = \frac{1}{3x^2+2x+1}$ *alors* $f'(x) = -\frac{6x+2}{\left(3x^2+2x+1\right)^2}$
$\dfrac{u}{v}$ *avec* $v(x) \neq 0$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	*Si* $f(x) = \frac{2x-1}{3x+2}$ *alors* $f'(x) = \frac{(2)(3x+2)-(2x-1)(3)}{(3x+2)^2} = \frac{7}{(3x+2)^2}$

Preuve.

- Montrons que $(ku)' = ku'$

$$\frac{ku(a+h) - ku(a)}{h} = \frac{k[u(a+h) - u(a)]}{h} = k\frac{u(a+h) - u(a)}{h}$$

Donc, lorsque h *tend* vers 0, $\dfrac{ku(a+h) - ku(a)}{h}$ *tend* vers la même chose que $k\dfrac{u(a+h) - u(a)}{h}$, c'est-à-dire ku'

- Montrons que $(u + v)' = u' + v'$

$$\frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h) + v(a+h) - u(a) - v(a)}{h} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \frac{v(a+h) - v(a)}{h}$$

Donc, lorsque h *tend* vers 0, $\dfrac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h}$ *tend* vers la même chose que $\dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} + \dfrac{v(a+h) - v(a)}{h}$, c'est-à-dire $u' + v'$

[1]Certaines démonstrations ont été faites en activité ou seront faites en exercice

- Montrons que $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$$\frac{\frac{1}{u(a+h)} - \frac{1}{u(a)}}{h} = \frac{\frac{u(a)-u(a+h)}{u(a+h)u(a)}}{h} = \left(\frac{u(a)-u(a+h)}{h}\right)\frac{1}{u(a+h)u(a)}$$

  Lorsque que h *tend* vers 0, $\frac{u(a)-u(a+h)}{h}$ *tend*, par définition, vers $-u'(a)$ et $\frac{1}{u(a+h)u(a)}$ *tend* vers $\frac{1}{u^2(a)}$, donc $\frac{\frac{1}{u(a+h)} - \frac{1}{u(a)}}{h}$ *tend* vers $-\frac{u'(a)}{u^2(a)}$
- On admettra que $(uv)' = u'v + uv'$
- Montrons que $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

  On a vu que $(uv)' = u'v + uv'$, or $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$, donc $\left(\frac{u}{v}\right)' = u' \times \frac{1}{v} + u \times \left(-\frac{v'}{v^2}\right) = \frac{u'v}{v^2} - \frac{uv'}{v^2}$
- On admettra les autres propriétés.

◊

Remarque. Seules les deux premières formules sont intuitives, les autres sont à apprendre par coeur.
En particulier la dérivée d'un produit (ou d'un quotient) n'est pas égal au produit (ou au quotient) des dérivées. Un exemple : cherchons la dérivée de $(x+2) \times (x+3)$
On peut l'obtenir en développant : $(x+2) \times (x+3) = x^2 + 5x + 6$ dont la dérivée est $2x+5$.
Or la dérivée de chaque facteur est 1, et $1 \times 1 \neq 2x+5$!
La formule, elle, donne la bonne dérivée $(x+2)'(x+3) + (x+2)(x+3)' = 1 \times (x+3) + (x+2) \times 1 = 2x+5$.

8.5 Dérivée des fonctions de la forme $f(x) = g(mx+p)$

On admettra le résultat suivant :

Propriété 8.3. *Soit $f(x) = g(mx+p)$ où m et p sont des réels et g une fonction définie et dérivable, alors f est dérivable et $f'(x) = mg'(mx+p)$*

Exemple 8.1. Soit f définie sur $\left[\frac{1}{3};+\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{3x-1}$.
On a $f(x) = g(3x-1)$ avec $g(X) = \sqrt{X}$.
Or $g'(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}}$ pour $X > 0$.
Donc $f'(x) = 3g'(3x-1) = 3\frac{1}{2\sqrt{3x-1}} = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$ pour $x \in \left]\frac{1}{3};+\infty\right[$

8.6 Variations d'une fonction

On a vu que la tangente à la courbe au point d'abscisse x est la droite la plus proche de la courbe au voisinage du point de la courbe d'abscisse x.

Il est *naturel* de penser que lorsque la tangente *monte*, la courbe *monte* et que lorsque la tangente *descend*, la courbe *descend*, et réciproquement ou, plus mathématiquement, que lorsque la fonction affine dont la tangente est la représentation graphique est croissante (respectivement décroissante), f est aussi croissante (respectivement décroissante) et réciproquement.

Or la croissance et la décroissance d'une fonction affine dépendent du signe de son coefficient directeur, ici $f'(x)$. Ainsi, étudier les variations de f revient donc à étudier le signe de sa fonction dérivée selon les valeurs de x.

On admettra donc le résultat suivant :

Théorème 8.4. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée*
- *$f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I \Leftrightarrow f$ croissante sur I*
- *$f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I \Leftrightarrow f$ décroissante sur I*
- *$f'(x) = 0$ pour tout $x \in I \Leftrightarrow f$ constante sur I*

On admettra aussi la propriété suivante :

Propriété 8.5. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ (respectivement $f'(x) < 0$), alors f est strictement croissante sur I (resp. strictement décroissante)*

Remarque. On notera qu'on n'a pas l'équivalence ($\Leftrightarrow$) dans ce cas, une fonction pouvant être strictement croissante avec une dérivée qui s'annule seulement en quelques valeurs. C'est le cas, par exemple, de la fonction cube, dont la dérivée s'annule seulement en 0.

8.7 Extremum local

Par ailleurs, lorsque la fonction change de sens de variation en a, on dit qu'elle admet un extremum local en a (minimum ou maximum). On a donc :

Propriété 8.6. *Soit f une fonction définie et dérivable su un intervalle I contenant a et f' sa fonction dérivée.*
f' s'annule et change de signe en $a \Leftrightarrow f$ admet un extremum local en a

On l'admettra

On a un maximum lorsque $f'(x)$ est positive avant a et négative après, et un minimum lorsque $f'(x)$ est négative avant a et positive après.

Remarque. *Local* signifie qu'aux alentours de a ce sera un extremum mais, qu'ailleurs, il se peut que f prenne des valeurs supérieures ou inférieures à cet extremum comme on a pu le voir dans l'activité 8.4 page 75.

8.8 Exercices et problèmes

8.8.1 Exercices

Exercice 8.1.

Montrer que la fonction racine carrée est dérivable en tout nombre appartenant à $]0;+\infty[$ mais pas en 0

Exercice 8.2.

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 4$
2. $f(x) = \sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$
3. $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2+1}$
4. $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$
5. $f(x) = (2x+3)(3x-7)$
6. $f(x) = \dfrac{2x+4}{3x-1}$ pour $x \neq \frac{1}{3}$
7. $f(x) = \left(2x^2+3x+1\right)^5$

Exercice 8.3.

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \left(x^2+x+1\right)^2$
2. $f(x) = (x-1)^2(3-x)^3$
3. $f(x) = (x-1)^4(x+1)^4$
4. $f(x) = x^3\left(1+\sqrt{x}\right)$
5. $f(x) = 4x^2\sqrt{x}$
6. $f(x) = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^4$
7. $f(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)$
8. $f(x) = \sqrt{2-x}$

Exercice 8.4.

Dériver les fonctions f et g définies ci-dessous :

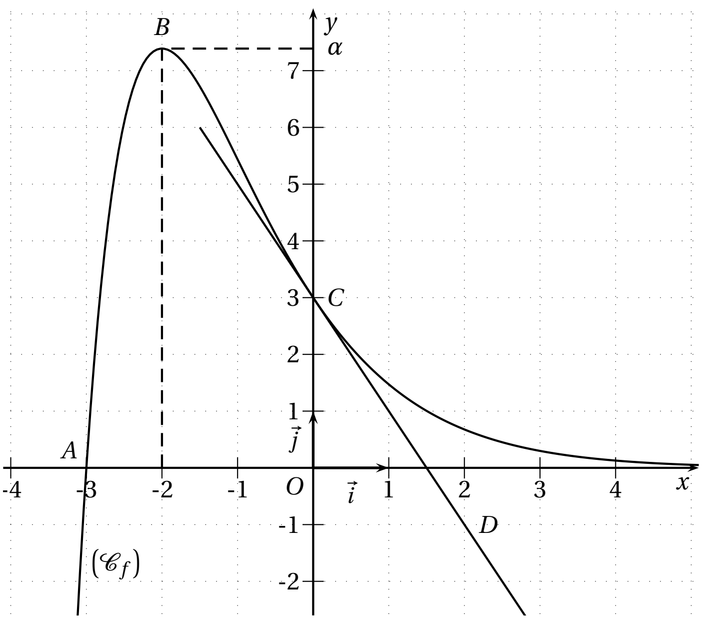
1. $f(x) = \dfrac{x}{x+\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$;
2. $g(x) = \left(\dfrac{1}{1+x}\right)^3$ sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.

Exercice 8.5.

La courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ de la figure ci-contre est une partie de la courbe représentative, relativement à un repère orthogonal, d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\,;\,+\infty[$.

On donne les renseignements suivants :

- les points $A(-3;0)$, $B(-2;\alpha)$ où $\alpha \approx 7{,}39$ et $C(0;3)$ sont des points de la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$;
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ en $+\infty$.
- la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[-2;+\infty[$;
- la droite tangente à la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ en son point C passe par le point $D(2;-1)$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse à l'aide des renseignements ci-dessus ou du graphique.

1. $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
2. Pour tout x élément de l'intervalle $[-2\,;\,+\infty[$, on a : $f'(x) \leqslant 0$.
3. Soit une fonction g telle que $g' = f$ sur l'intervalle $[-4\,;\,+\infty[$, alors la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[-2\,;\,+\infty[$.

Exercice 8.6.

Questionnaire à choix multiples

Pour chaque question, une seule des trois réponses est exacte

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-5\,;\,+\infty[$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-5		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-4,5$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1. Sur l'intervalle $]-5\,;\,+\infty[$, l'équation $f(x) = -2$
   - admet une seule solution
   - admet deux solutions
   - admet quatre solutions.
2. On sait que $f'(2) = 0$. L'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est :
   - $y = 4$
   - $y = 4(x-2)$
   - $x = 4$.
3. On sait que l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point de coordonnées $(1\,;\,2)$ est $y = 3x - 1$.
   On a :
   - $f(2) = 1$
   - $f'(1) = -1$
   - $f'(1) = 3$.
4. Sur l'intervalle $[-1\,;\,0]$, la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$
   - est croissante
   - est décroissante
   - n'est pas monotone.

Exercice 8.7.

On a représenté ci-contre, dans un repère orthonormal, la courbe représentative Γ d'une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La courbe Γ passe par les points $O(0\,;\,0)$ et $A(2\,;\,2)$.

La droite (AB) est la tangente en A à la courbe Γ. La tangente à Γ au point C d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $g(0)$, $g(2)$, $g'(1)$ et $g'(2)$.
2. Une des représentations graphiques page suivante, représente la fonction dérivée g' de g. Déterminer laquelle.
3. Une des représentations graphiques page suivante, représente une fonction h telle que $h' = f$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer laquelle.

Vous justifierez vos choix à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques.

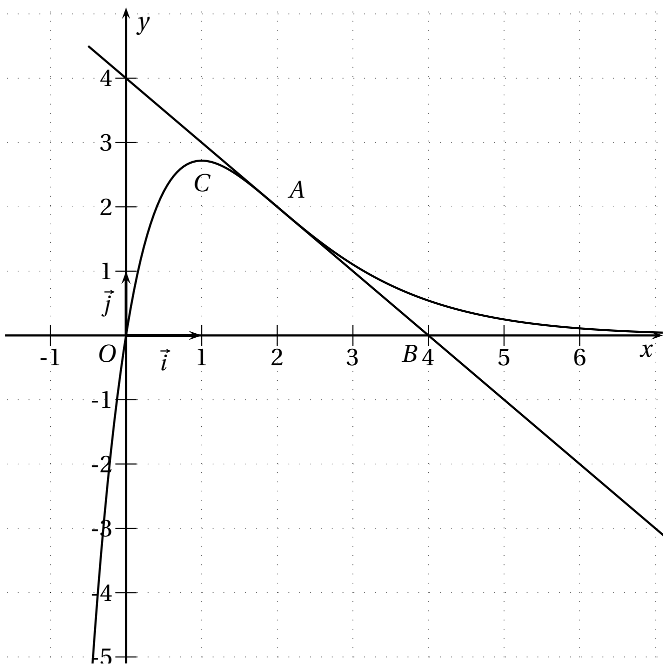
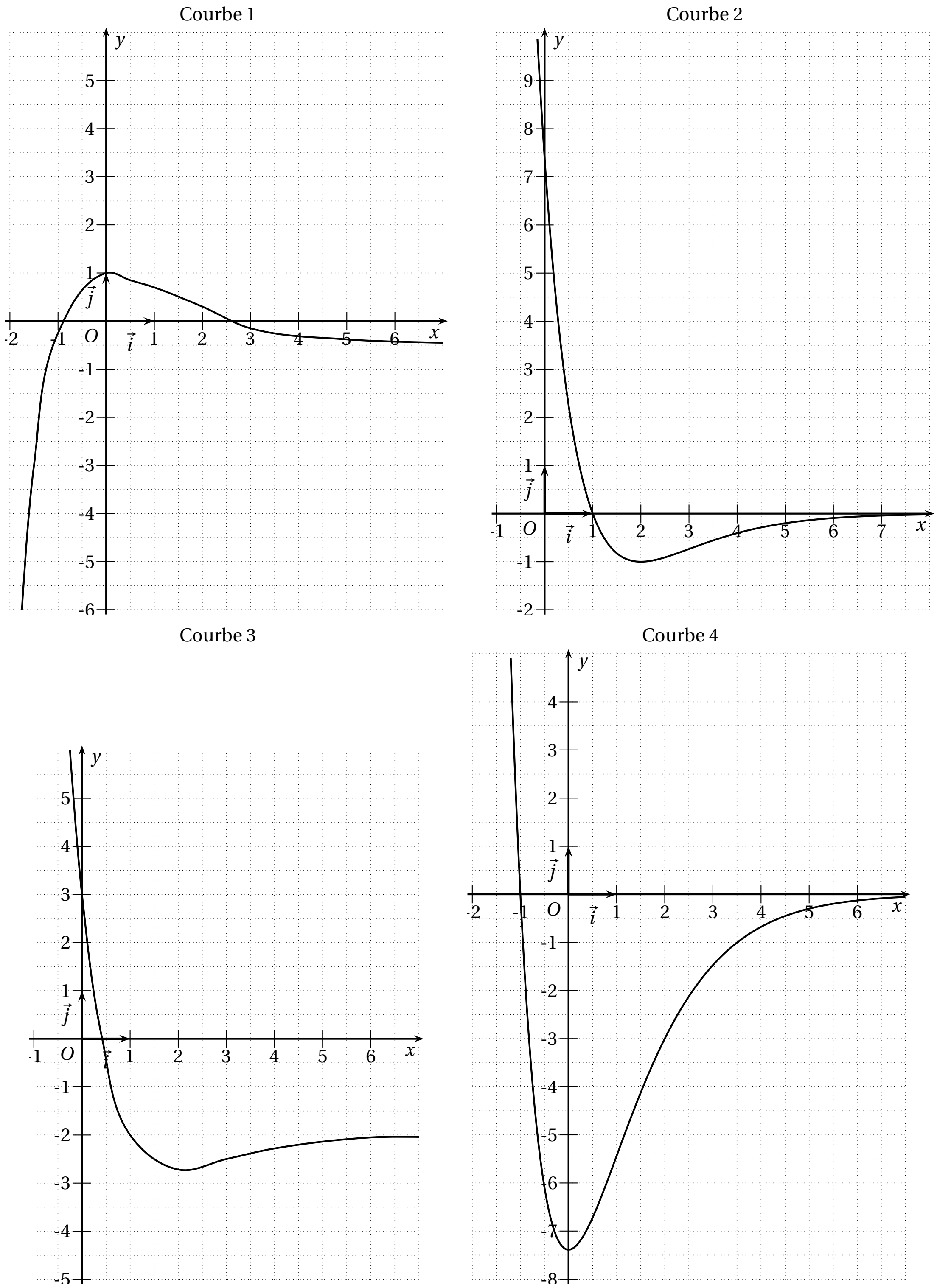


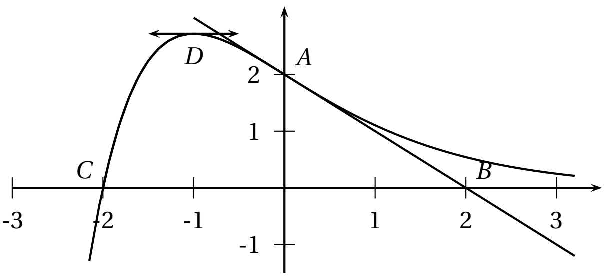
FIG. 8.1 – Courbes de l'exercice 8.7



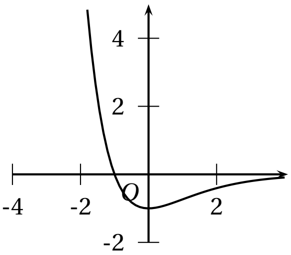
Exercice 8.8.

On a représenté ci-dessous la courbe représentative Γ, dans un repère orthonornal, d'une fonction f définie sur ℝ. La courbe Γ passe par les points $A(0\ ;\ 2)$ et $C(-2\ ;\ 0)$ et la droite (AB) est la tangente en A à Γ. La tangente à Γ en son point D d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.

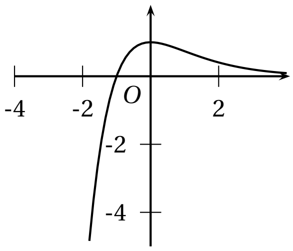
1. Déterminer, à l'aide des renseignements fournis par l'énoncé, les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente la fonction dérivée f' de f et une autre représente une fonction h telle que $h' = f$ sur ℝ. Déterminer la courbe associée à Ia fonction f' et celle qui est associée à la fonction h.
Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix



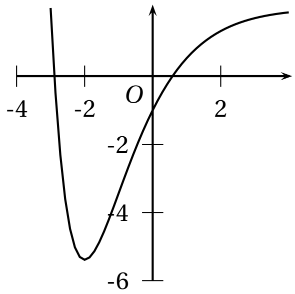
Courbe 1



Courbe 2



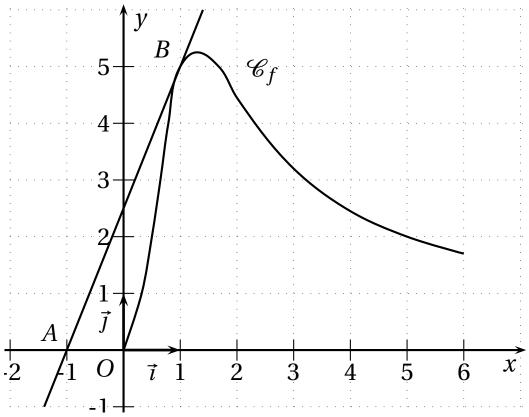
Courbe 3



Exercice 8.9.

La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;6]$. Soit A le point du plan de coordonnées $(-1\,;0)$ et B le point du plan de coordonnées $(1\,;5)$. Le point B appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
La droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B.

1. Déterminer $f'(1)$, où f' est la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0;6]$.
2. L'une des trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, et $\mathscr{C}_3$ représentées sur les figures 1, 2 et 3 page suivante représente la fonction f'. Laquelle ? *Justifier votre réponse.*



Exercice 8.10.

Soit $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ définie sur ℝ.

1. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
2. En déduire les variations de f.
3. Dresser le tableau des variations de f en y indiquant le signe de la fonction dérivée.
4. Montrer que f admet un extremum.

Exercice 8.11.

On donne $f(x) = 8x^3 - 15x^2 + 18x - 7$ définie sur $[0;2]$.

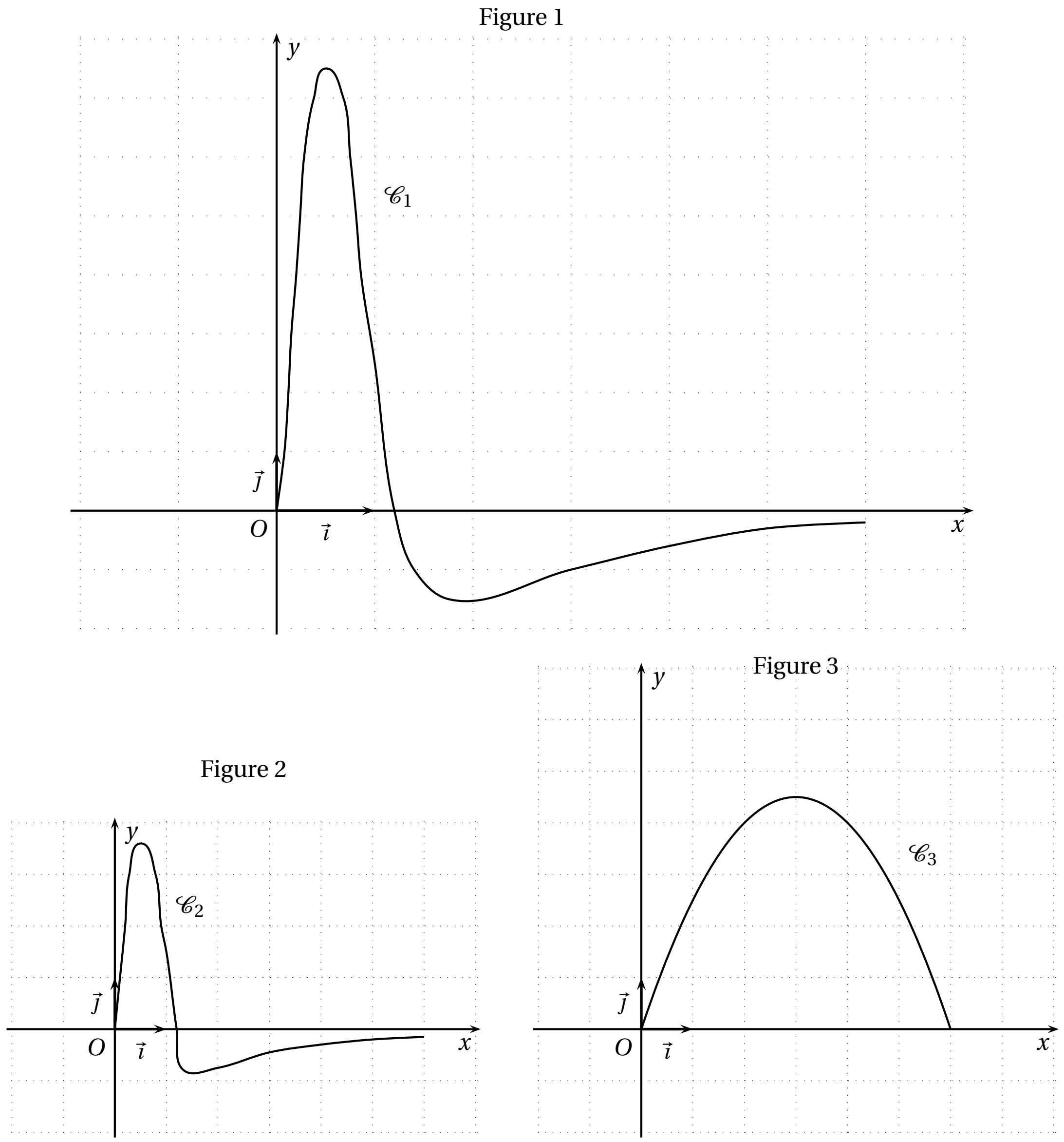
1. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
2. En déduire les variations de f.
3. Dresser le tableau des variations de f.
4. Tracer les tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisse 0, 1 et 2 ainsi qu'aux extremums locaux, puis la courbe de f.

Exercice 8.12.

On considère la fonction f définie sur ℝ par : $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

1. Calculer la dérivée f' de f. Étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f en précisant les éventuels extremums.
2. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-1;3]$.
3. Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'interception de la courbe avec l'axe des abscisses.

FIG. 8.2 – Courbes de l'exercice 8.9



Exercice 8.13.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$ On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f. Étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
3. Tracer T et $\mathscr{C}$.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2;3]$.
5. Donner une valeur approchée de α, par défaut, à 10^{-1} près.

Exercice 8.14.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = \dfrac{1}{x} + x$

1. Déterminer $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
2. Étudier le signe de la dérivée g'.
3. Dresser le tableau des variations de g.
4. Déterminer si g admet des extremums locaux.
5. Tracer la représentation graphique de la fonction g

Exercice 8.15.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$.
On note $\mathscr{C}$ sa représentation grahique.

1. Calculer la dérivée f' de f.
2. Soit A le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées de A, puis une équation de la tangente T_A à la courbe $\mathscr{C}$ en A.
3. Soit B le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées. Calculer les coordonnées de B, puis une équation de la tangente T_B à la courbe $\mathscr{C}$ en B.
4. Tracer dans un même repère T_A, T_B et $\mathscr{C}$.

Exercice 8.16.
On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 3x$ et $g(x) = x^3 - 3x$.

1. Calculer la dérivée f' de f, étudier son signe et dresser le tableau des variations de f.
2. Faire de même pour g.
3. (a) Tracer soigneusement, dans un repère, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentant les fonctions f et g. (On se limitera à l'intervalle $[-2;2]$ et on prendra un pas de 0,5).
   (b) Á l'aide du graphique, déterminer le nombre de points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et leurs coordonnées.
   (c) Retrouver ces résultats par le calcul.

Exercice 8.17.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

1. Démontrer que f est une fonction impaire.
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f et étudier son signe.
3. Dresser le tableau des variations de f en précisant la valeur M de son maximum et la valeur m de son minimum.
4. Tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-4;4]$.

Exercice 8.18.
On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1$ et $g(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

1. Calculer la dérivée f' de f, étudier son signe et en déduire le tableau des variations de f.
2. Calculer la dérivée g' de g, étudier son signe et en déduire le tableau des variations de g.
3. (a) Tracer soigneusement, dans un repère, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentant les fonctions f et g. (On se limitera à l'intervalle $[-3;5]$ et on prendra un pas de 0,25).
   (b) Á l'aide du graphique, déterminer le nombre de points d'intersections entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et leurs coordonnées.
   (c) Retrouver ces résultats par le calcul.

Exercice 8.19.
Question préliminaire : factoriser le polynôme $P(x) = x^2 + 2x - 3$
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x^2 + 1$ et $g(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Étudier la parité des fonctions f et g.
2. Calculer les dérivées f' et g'. Étudier leur signe.
3. Dresser les tableaux des variations des fonctions f et g.
4. Tracer les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions f et g. (On se limitera à l'intervalle $[-3;3]$).
5. Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$. (On pourra utiliser la question préliminaire).

Exercice 8.20.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x-1}$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

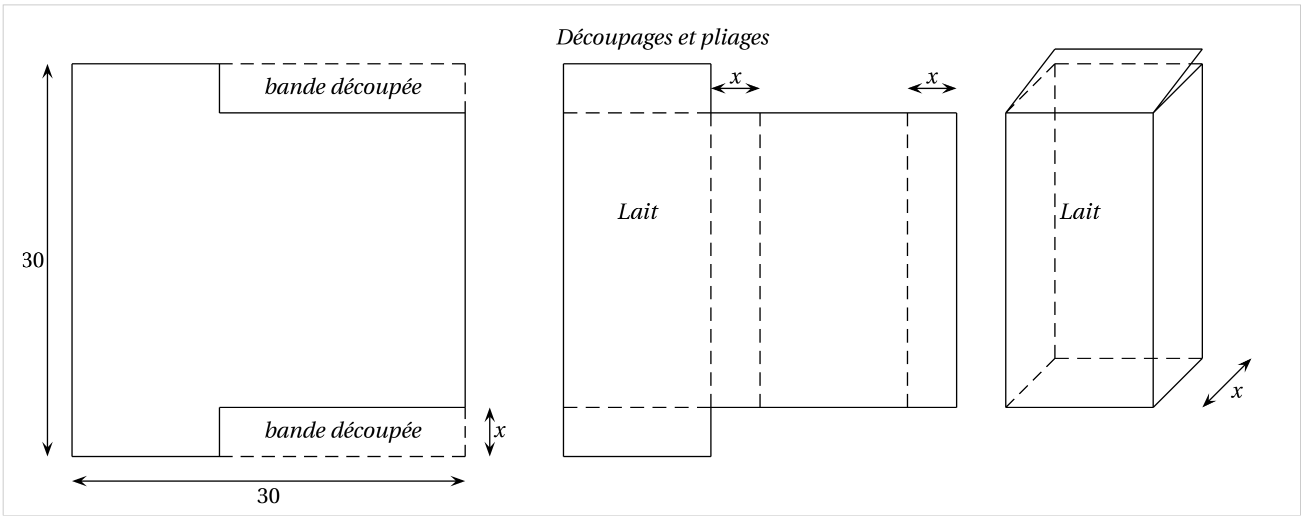
1. Préciser l'ensemble de dérivabilité de la fonction f et déterminer $f'(x)$.
2. Étudier le sens de variation de f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.
4. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
5. Peut-on trouver des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$?
6. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente a pour coefficient direteur -3.
7. (a) Déterminer une approximation affine locale au voisinage de 2.
   (b) En déduire une valeur aprochée de $f(2,003)$ et de $f(1,996)$.
8. Démontrer que le point $\Omega(1;-1)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}$

8.8.2 Problèmes

Problème 8.1.
On considère un rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm.

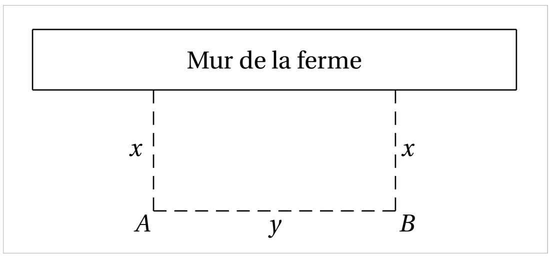
1. Déterminer ses dimensions (Longueur L et largeur l) sachant que son aire S est égale à $\frac{3}{4}$ cm^2
2. On recherche maintenant les dimensions du rectangle de façon que son aire S soit maximale.
   (a) Exprimer S en fonction de l
   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2-x)$.
   Calculer la dérivée f' et étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f. Tracer sa représentation graphique $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0;2]$.
   (c) En déduire les dimensions du rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm et l'aire S est maximale.

Problème 8.2.
1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$
   (a) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0;20]$. Dresser le tableau des variations de f.
   (b) Déterminer une équation de la tangente Δ à la représentation graphique de f au point d'abscisse 0.
   (c) Déterminer, par calcul, les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
   (d) Tracer Δ et la représentation graphique de f pour $x \in [0;20]$.
2. Un fabricant envisage la production de briques de lait en carton obtenues en découpant deux bandes de même largeur dans une feuille carrée (voir la figure de la présente page). Le côté de la feuille carrée mesure 30 cm et on désigne par x la mesure (en centimètres) de la largeur des bandes découpées. On suppose que $0 < x < 15$.
   (a) Démontrer que le volume (en cm^3) de la boîte est $V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.
   (b) Pour quelle valeur de x le volume $V(x)$ est-il maximal ? Préciser la valeur de ce volume maximal en litres.



Problème 8.3.
Un fermier décide de réaliser un poulailler (de forme rectangulaire) le long du mur de sa maison. Ce poulailler devra avoir une aire de 392 m^2. Où doit-on placer les piquets A et B pour que la longueur de la clôture soit minimale ?
La figure ci-dessous représente le poulailler accolé à la ferme en *vue de dessus*. On appelle x la distance séparant chaque piquet au mur et y la distace entre les deux piquets A et B. (On a donc $x > 0$ et $y > 0$).

1. Sachant que l'aire du poulailler est de 392 m^2, exprimer y en fonction de x.
2. Démontrer que la longueur $l(x)$ du grillage est : $l(x) = \dfrac{2x^2+392}{x}$
3. Calculer la dérivée l' de l. en déduire le tableau des variations de l.
4. En déduire les dimensions x et y pour lesquelle la clôture a une longueur minimale. Préciser cette longueur.



Problème 8.4.

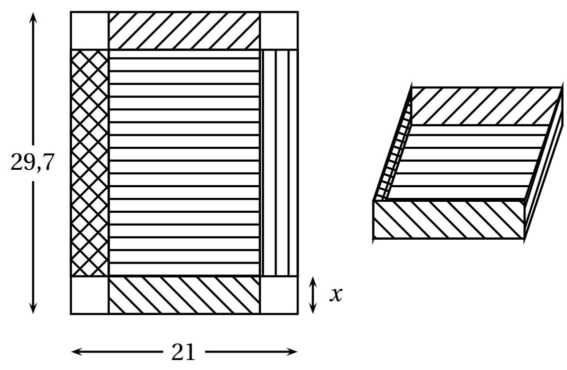
Un camion doit faire un trajet de 150 km. Sa consommation de gasoil est de $6+\dfrac{v^2}{300}$ litres par heure, où v désigne sa vitesse en km/h. Le prix du gasoil est de 0,9 € le litre et on paie le chauffeur 12 € par heure.

1. Soit t la durée du trajet en heure. Exprimer t en fonction de la vitesse v.
2. Calculer le prix de revient $P(v)$ du trajet en fonction de v.
3. Quelle doit être la vitesse v du camion pour que le prix de revient $P(v)$ de la course soit minimal ?

Problème 8.5.

On dispose d'une feuille de dimensions 21 cm × 29,7 cm avec laquelle on veut fabriquer une boite sans couvercle. Pour cela on découpe aux quatre coins de la feuille un carré de côté x. On obtient le patron de la boite. On se propose d'étudier le volume de la boite en fonction de x.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
2. On appelle $V(x)$ le volume de la boite.
   (a) Montrer que $V(x) = x(29,7-2x)(21-2x)$.
   (b) Étudier les variations de V.
   (c) En déduire la (ou les) valeur(s) de x pour laquelle (lesquelles) le volume de la boite est maximum. *On donnera le(s) résultat(s) au millimètre.*



Problème 8.6.

Quel doit être le format (hauteur, rayon) d'une boite de conserve cylindrique pour que, pour un volume donné, la quantité de métal pour la concevoir, qu'on supposera proportionnelle à sa surface, soit minimale.

Problème 8.7.

Soit $\mathscr{C}$ la représentation graphique d la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+ax+b}{x-2}$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Déterminer a et b tels que la droite d'équation $y = 8$ soit tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3.
3. Déterminer l'abscisse de l'autre point de $\mathscr{C}$ où la tangente est horizontale.

Problème 8.8.

Une parabole $\mathscr{P}$ admet, dans un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, une équation du type :

$$y = ax^2 + bx + c \text{ avec } a \neq 0$$

Déterminer les coefficients a, b et c sachant que $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse 3, l'axe des ordonnées au point B d'ordonnées 2 et qu'elle admet en ce point la droite d'équation $y = 2x+2$ pour tangente.
Indiquer l'abscisse du second point d'intersection de $\mathscr{P}$ avec l'axe des abscisses.

Nom : *Vendredi 18 janvier – 2h00*

Devoir surveillé n°5

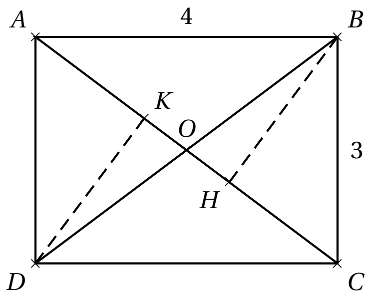
Produit scalaire – Statistiques – Fonction dérivée

EXERCICE 1 *Question de cours – 2 points*

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Soient $\overrightarrow{u}\,(x\,;\,y)$ et $\overrightarrow{v}\,(x'\,;\,y')$.
Montrer que $\dfrac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\right)=xx'+yy'$

EXERCICE 2 *6 points*

$ABCD$ est un rectangle indirect de longueur 4 cm, de largeur 3 cm et de centre O.
Soient H et K les projetés orthogonaux des sommets B et D sur la diagonale (AC).



1. En décomposant judicieusement à l'aide de la relation de CHASLES les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BD}$, calculer $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD}$.
2. En exprimant d'une autre manière le produit scalaire $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD}$, déterminer HK.
3. En exprimant d'une autre manière le produit scalaire $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD}$, déterminer $\cos\left(\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{BD}\right)$.
   En déduire la mesure de l'angle géométrique $\widehat{AOD}$.
4. (a) Montrer que $MA^2-MC^2=4\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OM}$.
   (b) Montrer que $DA^2-DC^2=-7$.
   (c) En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2-MC^2=-7$.

EXERCICE 3 *5,5 points*

Le tableau suivant donne les effectifs des notes obtenues dans une classe en Mathématiques et en Sciences de la vie et de la terre :

Note	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Maths	0	1	0	2	0	1	3	0	5	0	2	1	1	0	0	0	2	1	1	0	2
SVT	0	1	0	0	0	0	0	4	4	1	0	3	1	4	2	0	1	0	0	0	1

1. (a) Déterminer les rangs des quartiles et de la médiane des deux séries puis donner leurs valeurs.
   (b) Faire le diagramme en boite des deux séries sur une même échelle puis commenter le diagramme.
2. (a) Déterminer la moyenne des notes de Mathématiques et la comparer à la médiane en expliquant ce qui cause cet écart.
   (b) Déterminer la moyenne des notes de Sciences de la vie et de la terre. L'écart avec la moyenne est-il le même ? Pourquoi ?
   (c) Déterminer les écarts types des deux séries (arrondis au dixième) et commenter vos résultats.
   (d) Le professeur de mathématiques désire appliquer un changement affine ($y=ax+b$ avec $a>0$) à chacune des notes de façon à ce que la moyenne et l'écart type des notes de mathématique soient égaux à ceux des notes de Sciences et vie de la terre.
      i. Combien doivent valoir a et b ? *On donnera les résultats à* 10^{-2} *près.*
      ii. Ce changement affine est-il possible ?

EXERCICE 4 *3 points*

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

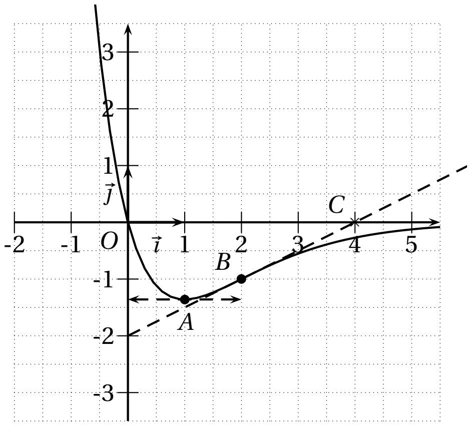
1. $f(x)=\left(x^2+2x-3\right)(2x+1)$ définie sur $\mathbb{R}$.
2. $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+2}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.
3. $f(x)=\sin(2x+\pi)$ définie sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 5 *3,5 points*

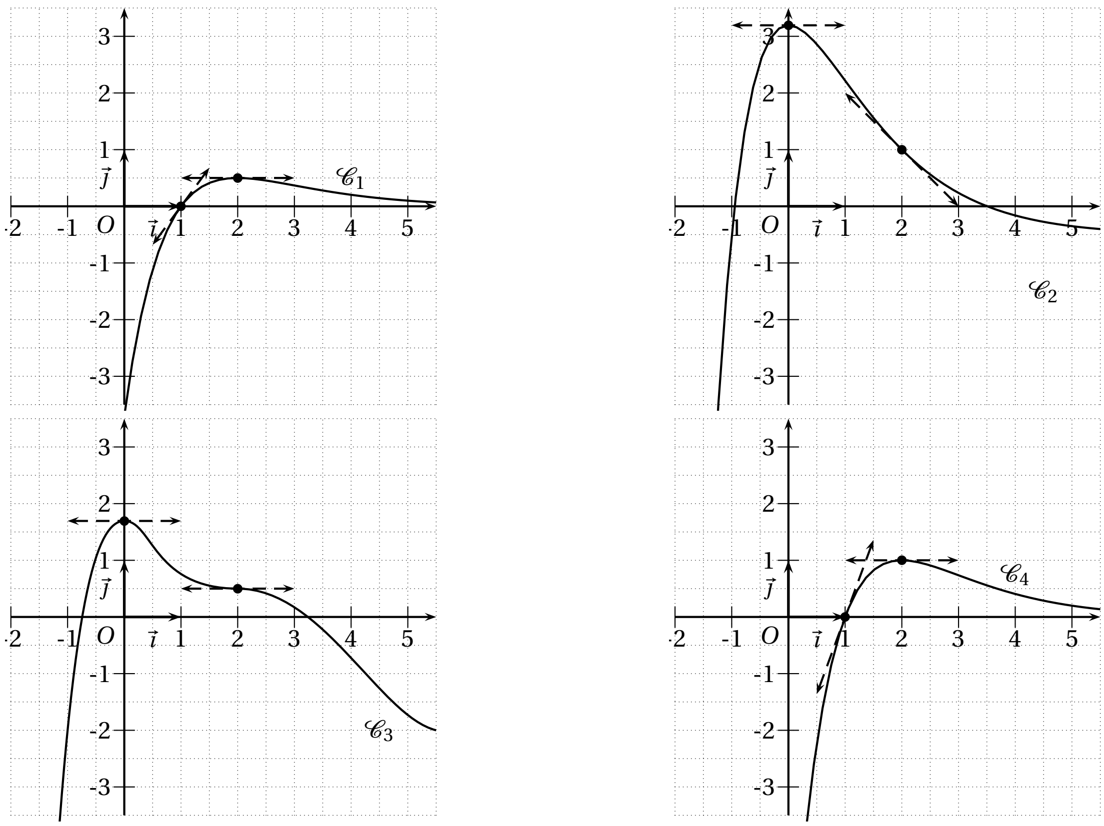
La courbe $(\mathscr{C})$ de la figure ci-contre est une partie de la courbe représentative, relativement à un repère orthogonal, d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On donne les renseignements suivants :

- la courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1 ;
- le point $B(2\,;\,-1)$ appartient à $(\mathscr{C})$;
- la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point B passe par le point $C(4\,;\,0)$;



1. Déterminer graphiquement $f(2)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
2. Une des représentations graphiques ci-dessous, représente la fonction dérivée f' de f, une autre représente une fonction h telle que $h' = f$. En justifiant vos choix *à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques* :
   (a) déterminer la courbe associée à la fonction f'.
   (b) déterminer la courbe associée à la fonction h.



Chapitre 9

Équations cartésiennes

Sommaire

Ce chapitre fait appel à la notion de produit scalaire, traitée dans le chapitre 6.

9.1 Dans le plan

9.1.1 Équations cartésiennes d'une droite

Théorème 9.1. *Le plan est muni d'un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.*
- *Toute droite du plan admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$.*
- *L'ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$ est une droite*

Preuve.
- On a vu en Seconde que toute droite du plan non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $y = mx + p$. Donc toute droite du plan non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $-mx + y - p = 0$. En posant $(a; b; c) = (-m; 1; -p)$ on obtient le premier point.
  Par ailleurs toute droite parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $x = k$ donc admet aussi une équation de la forme $x - k = 0$. En posant $(a; b; c) = (1; 0; -k)$ on obtient le premier point.
- Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan vérifiant $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$.
  Si $b \neq 0$ on a $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + p$ donc $\mathscr{D}$ est une droite (non parallèle à l'axe des ordonnées).
  Si $b = 0$ on a forcément $a \neq 0$ donc $x = -\frac{c}{a} = k$ donc $\mathscr{D}$ est une droite (parallèle à l'axe des ordonnées).

◇

Définition 9.1. Le plan est muni d'un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
- On appelle *vecteur directeur* d'une droite $\mathscr{D}$ tout vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$ tel que il existe A et B (distincts) appartenant à la droite avec $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.
- On appelle *vecteur normal* à une droite $\mathscr{D}$ tout vecteur $\vec{n} \neq \vec{0}$ orthogonal à un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

Remarque. On a déjà vu qu'on pouvait définir la droite passant A et de direction celle de $\vec{v}$ comme l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = k\vec{v}$.

Théorème 9.2. *Le plan est muni d'un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$* ***orthonormal****. Soit $\vec{n} = (a; b)$ un vecteur non nul.*
- *Toute droite de vecteur normal $\vec{n}$ admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$.*
- *Toute droite admettant une équation de la forme $ax + by + c = 0$ admet $\vec{n} = (a; b)$ comme vecteur normal.*

Preuve.
- Soit $A(x_a; y_a)$ un point de la droite $\mathscr{D}$ de vecteur normal $\vec{n}$.
  Pour tout $M(x; y) \in d$ distinct de A on a $\overrightarrow{AM}$ directeur de $\mathscr{D}$ donc $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$ donc $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.
  Or $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = a(x - x_a) + b(y - y_a) = ax + by + c$ avec $c = -ax_a - by_a$.
  Donc $\mathscr{D}$ admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$.

- Soit $A(x_a\,;\,y_a)$ et $B(x_b\,;\,y_b)$ deux points distincts de $\mathscr{D}$ donc vérifiant $ax+by+c=0$ avec $(a\,;\,b)\neq(0\,;0)$.
  Supposons $b\neq 0$.
  On a alors $A\left(x_a\,;-\frac{a}{b}x_a-\frac{c}{b}\right)$ et $B\left(x_b\,;-\frac{a}{b}x_b-\frac{c}{b}\right)$, donc $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} x_b-x_a \\ -\frac{a}{b}(x_b-x_a)\end{pmatrix}$.
  Alors $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=a(x_b-x_a)-\frac{a}{b}(x_b-x_a)\times b=a(x_b-x_a)-a(x_b-x_a)=0$.
  Donc $\overrightarrow{AB}\perp\vec{n}$: $\vec{n}$ est bien normal à $\mathscr{D}$.
  Supposons $b=0$.
  On a alors $A\left(-\frac{c}{a}\,;\,y_a\right)$ et $B\left(-\frac{c}{a}\,;\,y_b\right)$, donc $\overrightarrow{AB}=(0\,;\,y_b-y_a)$ et $\vec{n}=(a\,;0)$.
  $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=0$.
  Donc $\overrightarrow{AB}\perp\vec{n}$: $\vec{n}$ est bien normal à $\mathscr{D}$.

$\diamondsuit$

Théorème 9.3. *Le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$* ***orthonormal****. Toute droite admettant une équation de la forme $ax+by+c=0$ admet $\vec{v}=(-b;\,a)$ comme vecteur directeur.*

Preuve. $\vec{n}=(a;\,b)$ est normal à la droite or $\vec{v}.\vec{n}=a(-b)+ab=0$ alors $\vec{v}\perp\vec{n}$ et donc $\vec{v}$ est directeur de la droite. $\diamondsuit$

Théorème 9.4 (Distance d'un point à une droite)**.** *Le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$* ***orthonormal****.*
Soit $\mathscr{D}$: $ax+by+c=0$ une droite et $M(\alpha\,;\,\beta)$ un point quelconque du plan.
La distance de M à $\mathscr{D}$, notée $d(M,\mathscr{D})$ est

$$d(M,\mathscr{D})=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Preuve. $\mathscr{D}$ admet $\vec{n}=(a\,;\,b)$ comme vecteur normal.
Soit $P=(x_p\,;\,y_p)$ un point quelconque de $\mathscr{D}$. On a $\overrightarrow{OP}=(x_p\,;\,y_p)$ et $\overrightarrow{OP}.\vec{n}=ax_p+by_p$.
Mais $ax_p+by_p+c=0$ donc $\overrightarrow{OP}.\vec{n}=ax_p+by_p=-c$.
Considérons maintenant H le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$.
Comme H est un point de la droite, $\overrightarrow{OH}.\vec{n}=-c$.
Par ailleurs $\overrightarrow{OM}.\vec{n}=a\alpha+b\beta$.
Enfin $\overrightarrow{HM}.\vec{n}=\left(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OM}\right).\vec{n}=\overrightarrow{OM}.\vec{n}-\overrightarrow{OH}.\vec{n}=a\alpha+b\beta+c$.
Mais $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{n}$, étant tous deux normaux à D, sont colinéaires donc $\overrightarrow{HM}.\vec{n}=HM\times\|\vec{n}\|$ ou $\overrightarrow{HM}.\vec{n}=-HM\times\|\vec{n}\|$ donc $|\overrightarrow{HM}.\vec{n}|=HM\times\|\vec{n}\|=|a\alpha+b\beta+c|$.
Comme $\|\vec{n}\|=\sqrt{a^2+b^2}(\neq 0)$ il vient $HM=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\diamondsuit$

9.1.2 Équation cartésienne d'un cercle

Théorème 9.5. *Le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$* ***orthonormal****.*
Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $\Omega(x_0\,;\,y_0)$ et de rayon r.
Alors tout point de M de $\mathscr{C}$ a ses coordonnées qui vérifient $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.

Preuve. Par définition $\Omega M=r$ or, comme ΩM est une longueur :
$\Omega M=r\Leftrightarrow\Omega M^2=r^2\Leftrightarrow(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ $\diamondsuit$

Théorème 9.6. *Le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$* ***orthonormal****.*
Soit $A(x_a\,;\,y_a)$ et $B(x_b\,;\,y_b)$ et $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$.
Alors tout point M de $\mathscr{C}$ a ses coordonnées qui vérifient $(x-x_a)(x-x_b)+(y-y_a)(y-y_b)=0$.

Preuve. Soit M un point quelconque du plan. On a $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=(x-x_a)(x-x_b)+(y-y_a)(y-y_b)$.
Si $M=A$ ou $M=B$ alors $\overrightarrow{MA}=\vec{0}$ ou $\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$.
Si M distinct de A et de B alors le triangle AMB est rectangle en M donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$. $\diamondsuit$

9.2 Dans l'espace

9.2.1 Généralités

De la même façon qu'on a défini un repère pour le plan, on définit un repère dans l'espace de la façon suivante :

Définition 9.2. Un quadruplet $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ est un repère de l'espace si O et les points I, J et K tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$ ne sont pas coplanaires.

Remarques.
- O est appelé *origine du repère* et $\left(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k}\right)$ est appelée la *base du repère.*
- Si les droites (OI), (OJ) et (OK) sont perpendiculaires, le repère est dit *orthogonal.*
- Si le repère est **orthogonal et que** $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\|$, le repère est dit *orthonormal* (ou orthonormé).

Propriété 9.7 (Définition, existence et unicité des coordonnées de vecteurs et de points)**.** *Le plan est muni d'un repère* $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
- *Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ tel que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.*
- *Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.*

On l'admettra.

On notera indifférement $\vec{u}(x; y; z)$, $\vec{u} = (x; y; z)$, $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ou $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

La notation en ligne prend moins de place mais celle en colonne est très pratique pour les calculs sur les coordonnées de vecteurs.

On notera $M(x; y; z)$.

Remarque. Par définition les coordonnées de M et de $\overrightarrow{OM}$ sont donc les mêmes.

Propriété 9.8 (Coordonnées du milieu, coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$)**.** *Si A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A; y_A; z_A)$ et $(x_B; y_B; z_B)$:*
- $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$;
- *les coordonnées de I, milieu de $[AB]$, sont :* $(x_I; y_I; z_I) = \left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.

Preuve.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A + \frac{1}{2}(x_B - x_A) \\ y_A + \frac{1}{2}(y_B - y_A) \\ z_A + \frac{1}{2}(z_B - z_A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \\ \frac{z_A + z_B}{2} \end{pmatrix}$.

  Or les coordonnées de I et de $\overrightarrow{OI}$ sont les mêmes.

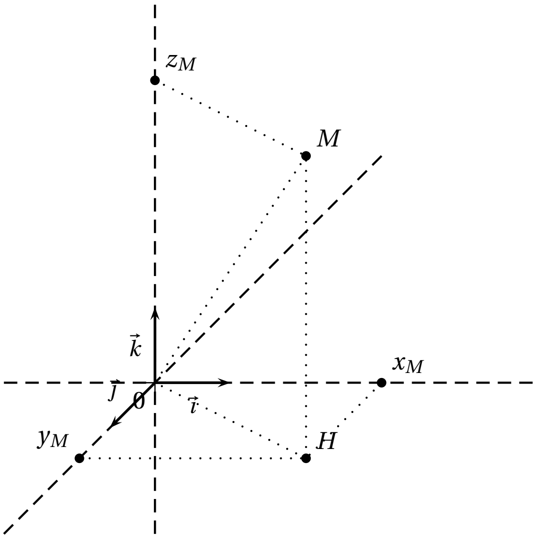
◊

Propriété 9.9 (Distance et norme dans un repère orthonormal)**.** *Soit $\vec{u} = (x; y; z)$, $A(x_A; y_A; z_B)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$.*
Si le repère est orthonormal *alors :*
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
- $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Preuve. On considère le représentant du vecteur $\vec{u}$ d'origine O et d'extrémité M (voir la figure 9.1 page suivante).
$\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{OM}\| = OM$.
Les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ sont les mêmes que celles de $\vec{u}$, donc $x_M = x$, $y_M = y$ et $z_M = z$.
Le repère étant orthonormal, sur le dessin ci-dessous, on a OMH rectangle en H, donc $OM^2 = MH^2 + OH^2$.
Or $MH^2 = z_M^2$. Par ailleurs, le repère étant orthonormal, $OH^2 = x_M^2 + y_M^2$.
Finalement $OM^2 = x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 \Leftrightarrow OM = \sqrt{x_M^2 + y_M^2 + z_M^2} \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Par ailleurs $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$, donc, en posant $x = x_B - x_A$, $y = y_B - y_A$ et $z = z_B - z_A$, on obtient le second point. ◊

Propriété 9.10 (Condition d'orthogonalité dans un repère orthonormal)**.** *Soit $\vec{u} = (x; y; z)$ et $\vec{v} = (x'; y'; z')$.*
Si le repère est orthonormal *alors* $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$

FIG. 9.1 – Schéma pour la preuve de la propriété 9.9



Preuve. Soit M et N tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$.

$$\begin{aligned}
\vec{u}\perp\vec{v} &\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{ON} \Leftrightarrow OMN \text{ rectangle en } O \Leftrightarrow OM^2 + ON^2 = MN^2 \\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 \text{ car repère orthonormal} \\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 - 2xx' + x'^2 + y^2 - 2yy + y'^2 +' z^2 - 2zz' + z'^2 \\
&\Leftrightarrow 0 = -2xx' - 2yy' - 2zz' \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0
\end{aligned}$$

◇

9.2.2 Équations de quelques surfaces

L'espace est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Équations de plans

Conformément au programme, on se limitera aux plans parallèles aux axes de coordonnées.

Propriété 9.11.
- *Une équation du plan $\mathscr{P}$ parallèle au plan (xOy) est ....*
- *Une équation du plan $\mathscr{Q}$ parallèle au plan (xOz) est ....*
- *Une équation du plan $\mathscr{R}$ parallèle au plan (yOz) est ....*

On l'admettra.

Exercice.
Dans un dessin en perspective, représenter des plans $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{R}$ vérifiant les conditions de la propriété précédente et, par lecture graphique, compléter la propriété.

Équations de sphères

Propriété 9.12. *Si le repère est orthonormal, une équation de la sphère $\mathscr{S}$ de centre O et de rayon r est $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.*

Preuve. Par définition, la sphère de centre O et de rayon r est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels que $OM = r$. Étant dans un repère orthonormal, on a :
$OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2 + (z_M - z_O)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$.
$r \geq 0$ car c'est une longueur donc $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. ◇

Remarque. Une autre équation possible est, par exemple, $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2r^2$, c'est pour cela que $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ est *une* équation de la sphère.

Exercice.
Déterminer une équation de la sphère $\mathscr{S}$ de centre $A(2,1-4)$ et de rayon 3.

Équations de cylindres de révolution

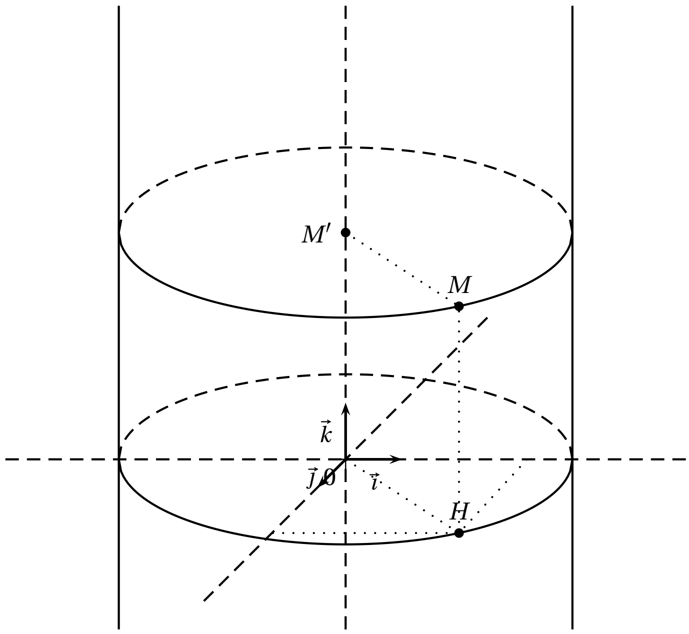
Propriété 9.13. *Si le repère est orthonormal, le cylindre de révolution $\mathscr{C}$ de rayon r de centre O admet pour équation :*
- $x^2+y^2=r^2$ *s'il a pour axe* (Oz) ;
- $x^2+z^2=r^2$ *s'il a pour axe* (Oy) ;
- $y^2+z^2=r^2$ *s'il a pour axe* (Ox).

Preuve lorsque l'axe est (Oz). Le cylindre d'axe (Oz) et de rayon r est par définition l'ensemble des points M tels que $M'M=r$ (voir schéma 9.2 de la présente page).

Soit $M(x;y;z)$ et H son projeté orthogonal sur (xOy) (voir schéma de la présente page). On a $MM'=OH$ Or $OH=\sqrt{x^2+y^2}$.

On a donc : M sur le cylindre $\Leftrightarrow MM'=r \Leftrightarrow OH=r \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=r \Leftrightarrow x^2+y^2=r^2$ ◇

FIG. 9.2 – Schéma pour la preuve de la propriété 9.13

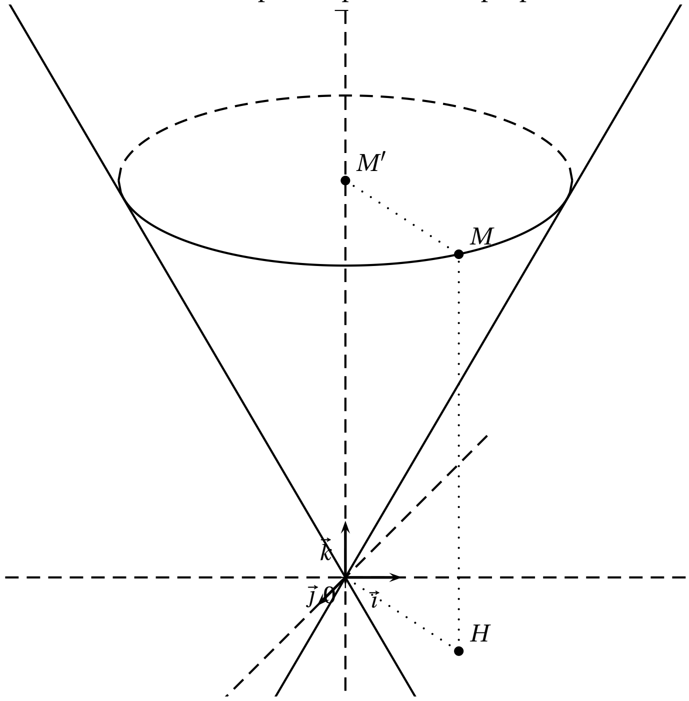


Équation d'un cône de sommet O et d'angle θ

Propriété 9.14. *Si le repère est orthonormal, le cône de révolution $\mathscr{C}$ de sommet O et d'angle θ admet pour équation :*
- $x^2+y^2=z^2\tan^2\theta$ *s'il a pour axe* (Oz) ;
- $x^2+z^2=x^2\tan^2\theta$ *s'il a pour axe* (Oy) ;
- $y^2+z^2=x^2\tan^2\theta$ *s'il a pour axe* (Ox).

Démonstration lorsque l'axe est (Oz). Le cône de sommet O, d'axe (Oz) et dont la directrice fait un angle aigu θ avec l'axe est, par définition, l'ensemble des points M tels que l'angle entre (Oz) et (OM) est θ (voir schéma 9.3 page suivante).
Soit H, le projeté de M sur (xOy) et M' le projeté de M sur (Oz). On a $OH=\sqrt{x^2+y^2}=MM'$.
Or OMM' est rectangle en M' donc $\tan\theta=\frac{MM'}{OM'}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\Leftrightarrow x^2+y^2=z^2\tan^2\theta$ ◇

FIG. 9.3 – Schéma pour la preuve de la propriété 9.14



9.3 Exercices

Dans tous les exercices dans le plan, celui-ci est muni d'un repère orthonormal.

Exercice 9.1.

On donne $A(1;2)$, $B(2;1)$ et $C(-3;0)$. Déterminer les équations des droites suivantes :

1. $\mathscr{D}$ passant par C et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$;
2. $\mathscr{D}'$ passant par C et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$;
3. Δ parallèle à $\mathscr{D}$ passant par A ;
4. Δ' parallèle à $\mathscr{D}'$ passant par B.

Exercice 9.2.

Examiner si les équations suivantes sont des équations de cercle et, le cas échéant, préciser le centre et le rayon du cercle :

1. $x^2+y^2-2x-6y+5=0$;
2. $x^2+y^2-x-3y+3=0$;
3. $x^2+y^2-x+8y+10=0$.

Exercice 9.3.

Déterminer l'équation du cercle de centre $\Omega(5;1)$ et tangent à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x+y-4=0$.

Exercice 9.4.

On considère un triangle ABC avec $A(-1;2)$, $B(3;1)$ et $C(2;4)$.

1. Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[AB]$.
2. Déterminer une équation de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

Exercice 9.5.

On donne $\Omega(2;-3)$.

1. Déterminer l'équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon $r=5$.
2. Démontrer que le point $A(-2;0)$ est un point du cercle $\mathscr{C}$.
3. Déterminer une équation cartésienne de la tangente en A au cercle $\mathscr{C}$.

Exercice 9.6.

Soit $A(3;5)$. Chercher une équation de la tangente en A au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon OA.

Exercice 9.7.

Trouver une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(1;2)$ et de rayon 3 et déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.

Exercice 9.8.

Soient $A(3;1)$ et $B(-2;4)$. Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan dont les coordonnées $(x;y)$ vérifient :

$$(x-3)(x+2)+(y-1)(y-4)=0$$

Exercice 9.9. 1. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ passant par $A(2;1)$ et $B(1;3)$ et dont le centre Ω est situé sur la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x+y+1=0$. *Indication : chercher d'abord les coordonnées de* Ω

2. Même question pour le cercle $\mathscr{C}'$ passant par $C(4;2)$ et $D(2;6)$ et dont le cercle Ω' est situé sur la droite d'équation $x+y+2=0$.

Exercice 9.10.
Déterminer :

1. l'équation du cylindre de révolution $(\mathscr{R})$, d'axe (Oy) et de rayon $\sqrt{2}$;
2. l'équation du cône de révolution $(\mathscr{C})$, de sommet O, d'axe (Oy) et contenant $A(1;1;0)$;
3. l'équation du cylindre de révolution $(\mathscr{C})$ d'axe (Ox) contenant $B(2;1;-3)$.

Exercice 9.11.
Quelle est la nature de l'intersection du plan $(\mathscr{P})$ et de la sphère $(\mathscr{S})$ donnés par les équations suivantes :

1. $(\mathscr{P}) : x=3$ et $(\mathscr{S}) : x^2+y^2+z^2=3$
2. $(\mathscr{P}) : y=2$ et $(\mathscr{S}) : x^2+y^2+z^2=4$
3. $(\mathscr{P}) : z=4$ et $(\mathscr{S}) : x^2+y^2+z^2=25$

Exercice 9.12.
Dans chacun des cas suivants, indiquer la nature de $(\mathscr{C})$ et la nature de l'intersection du plan $(\mathscr{P})$ et de $(\mathscr{C})$:

1. $(\mathscr{P}) : z=0$ et $(\mathscr{C}) : x^2+y^2=z^2$
2. $(\mathscr{P}) : y=0$ et $(\mathscr{C}) : x^2+z^2=y^2$
3. $(\mathscr{P}) : z=0$ et $(\mathscr{C}) : y^2+z^2=x^2$

Devoir surveillé n°6

Fonction dérivée – Équations cartésiennes

EXERCICE 1

f est la fontion définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 11x + 28}{x - 3}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.
On donne en annexe page suivante un repère dans lequel une partie de $\mathscr{C}$ est déjà tracée.
On complètera le schéma avec les éléments rencontrés au fur et à mesure de l'exercice (points, tangentes, etc.).

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ et on note f' la fonction dérivée de f.
   (a) Justifer que $f'(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x et établir le tableau de variation de la fonction f (on indiquera les extremums locaux de f).
2. (a) Déterminer, s'il y en a, les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
   (b) Soit T la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Déterminer une équation de T.
3. (a) Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.
   (b) **Bonus (*à ne traiter qu'une fois le reste terminé*)** : Démontrer que le point Ω de coordonnées $(3\,;\,-5)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$.
4. Compléter le tracé de $\mathscr{C}$.

EXERCICE 2

Cet exercice est à traiter sur l'énoncé.
Pour chacune des questions suivantes il y a plusieurs propositions de réponse dont une seule est correcte.
Indiquer laquelle sachant que :

- une bonne indication rapporte 1 point ;
- une mauvaise indication rapporte $-0,5$ point ;
- une absence d'indication rapporte 0 point ;
- un total négatif à l'exercice est ramené à 0.

Dans tout l'exercice le plan est muni d'un repère orthonormé.

1. La droite d'équation $x + 2y + 1 = 0$ admet comme **vecteur directeur** :
   (a) $\vec{u} = (1\,;\,2)$; (b) $\vec{u} = (-1\,;\,2)$; (c) $\vec{u} = (-2\,;\,1)$.
2. La droite d'équation $2x - y + 2 = 0$ admet comme **vecteur normal** :
   (a) $\vec{v} = (2\,;\,-1)$; (b) $\vec{v} = (-2\,;\,-1)$; (c) $\vec{v} = (1\,;\,2)$.
3. Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équations respectives $3x + y - 1 = 0$ et $x + \frac{1}{3}y + 1 = 0$ sont
   (a) parallèles ; (b) perpendiculaires ; (c) sécantes (et non perpendiculaires).
4. La droite passant par $A(1\,;\,2)$ et ayant pour vecteur normal $\vec{u} = (-1\,;\,1)$ admet comme équation :
   (a) $-x + y + 1 = 0$; (b) $x - y + 1 = 0$; (c) $x + y - 3 = 0$.
5. L'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan vérifiant l'équation $x^2 - 2x + y^2 + 2y + 3 = 0$ est :
   (a) vide ; (b) réduit à un point ; (c) un cercle.

EXERCICE 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$fourni en annexe page 99.
On considère les points $A(-1\,;\,5)$, $B(3\,;\,1)$ et $C(0\,;\,-4)$, la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x+4y+12 = 0$ et Δ la médiatrice du segment $[AB]$.

1. Dans le repère, placez A, B et C, tracez $\mathscr{D}$ et Δ.
2. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}_1$ de diamètre $[AB]$. Le tracer.
3. Le but de cette question est de déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}_2$ passant par A et B et dont le centre Ω se trouve sur la droite $\mathscr{D}$.
   (a) Montrer que $\Omega \in \Delta$.
   (b) Montrez qu'une équation de Δ est : $x - y + 2 = 0$.
   (c) Montrer que Ω a pour coordonnées $(-4\,;\,-2)$.
   (d) En déduire une équation de $\mathscr{C}_2$. On précisera quel est son rayon.
   (e) Tracer $\mathscr{C}_2$.
4. Le but de cette question est de déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}_3$ de centre C et tangent à Δ.
   (a) Montrer que le rayon r de $\mathscr{C}_3$ est $r = 3\sqrt{2}$.
   (b) En déduire une équation de $\mathscr{C}_3$.
   (c) Tracer $\mathscr{C}_3$.

FIG. 9.4 – Annexe de l'exercice 1

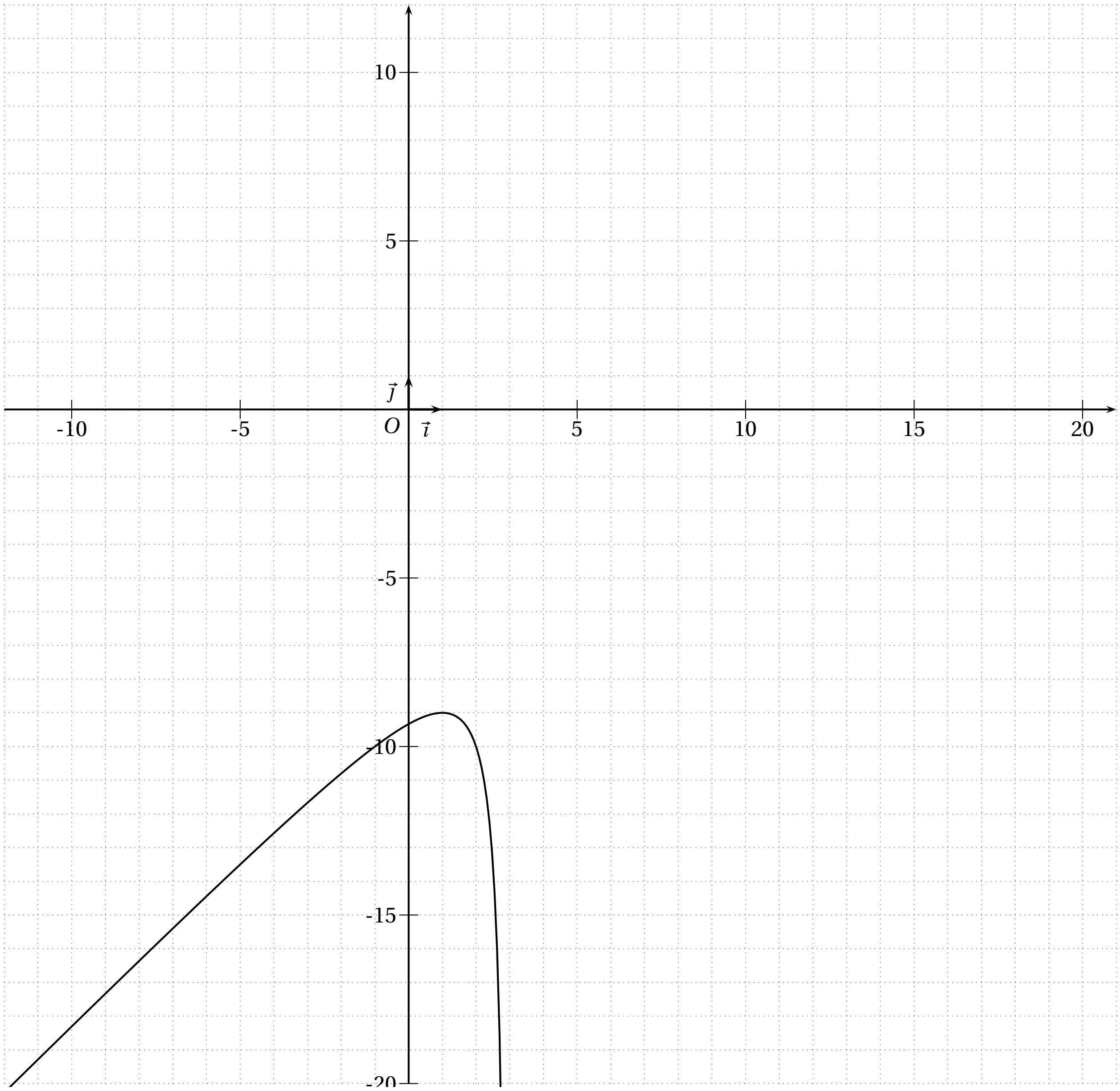
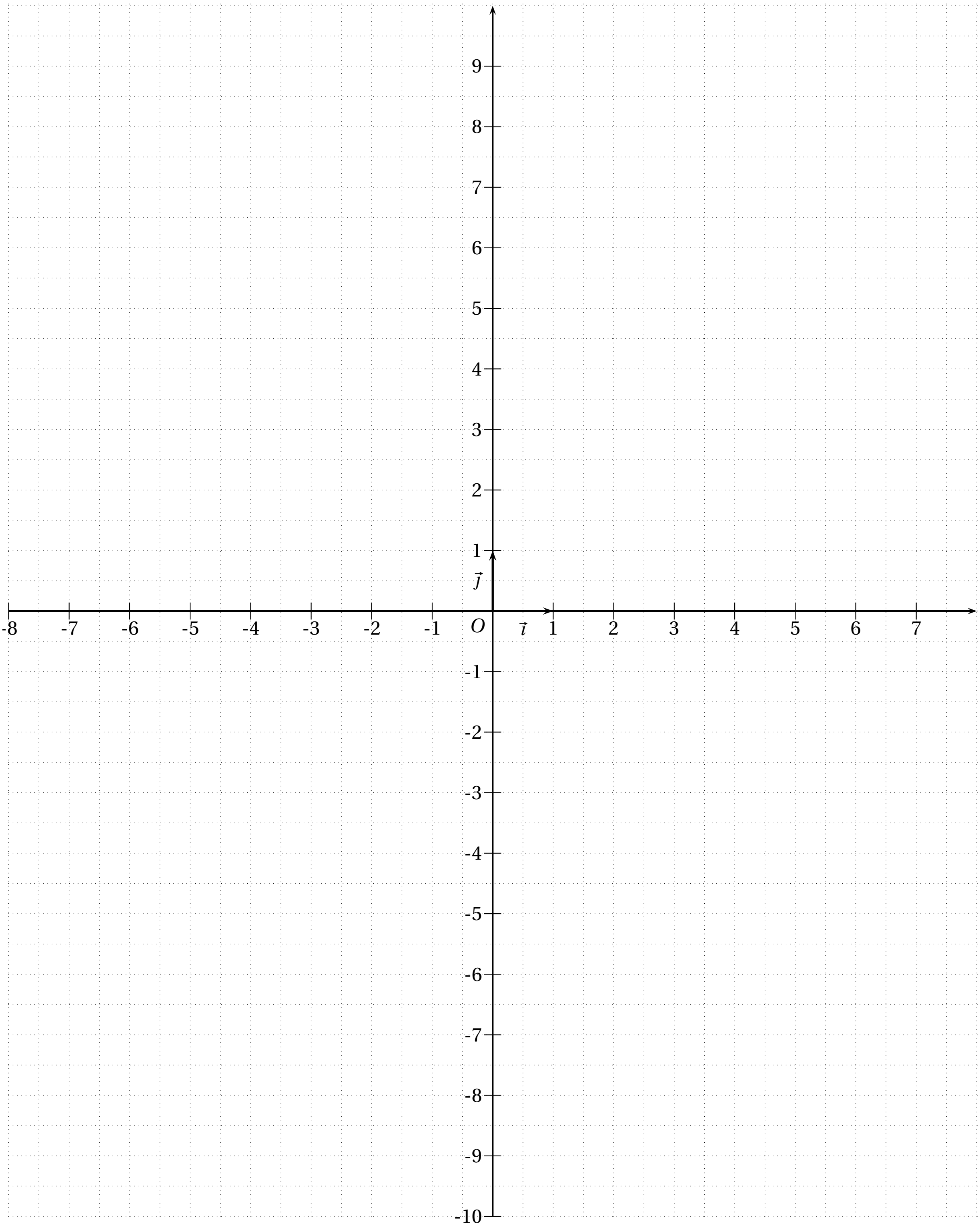


FIG. 9.5 – Annexe de l'exercice 3



Chapitre 10

Suites : généralités

Sommaire

10.1 Activité

10.1.1 Notations

On s'intéresse, dans cette activité, aux effectifs d'une population donnée à chacune de ses générations successives. Ces effectifs sont notés P_n, où n entier naturel, est appelé rang.
Ainsi P_0 est l'effectif de la population de rang 0, c'est-à-dire la population initiale, P_1 celui de la population de rang 1, c'est-à-dire de la première génération, P_2 celui de la population de rang 2, etc.
P_n étant l'effectif d'une génération quelconque (de rang n), P_{n+1} sera l'effectif de la génération suivante et P_{n-1} sera l'effectif de la génération précédente.

10.1.2 Modèles

On cherche à modéliser l'évolution d'une population (animale ou végétale) en fonction du temps.

Première approche : croissance de type $P_{n+1} = aP_n$

La première approche consiste à considérer que l'accroissement de cette population d'une année à l'autre est proportionnel à l'effectif de cette population. Plus précisément, si on note P_n l'effectif de la population à la génération n et P_{n+1} l'effectif de la population à la génération suivante, on a $P_{n+1} = aP_n$ où a est un coefficient positif. Par exemple, si l'on sait que la population double d'une génération à la suivante, on aura $P_{n+1} = 2P_n$. Ou bien si la population diminue de 10 % d'une génération à la suivante, on aura $P_{n+1} = \frac{90}{100}P_n = 0,9P_n$.

1. Déterminer a quand la population, d'une génération à l'autre :

- augmente de 3,5% ;
- augmente de 10 % ;
- augmente de 25 % ;
- diminue de 3,5 % ;
- diminue de 25 % ;
- diminue de 90 %.

2. On suppose pour la suite que la population initiale est de 500 individus.
   En utilisant le tableur, calculer, dans le premier cas, les 20 premières valeurs de P_n et faire une représentation graphique de ces valeurs.

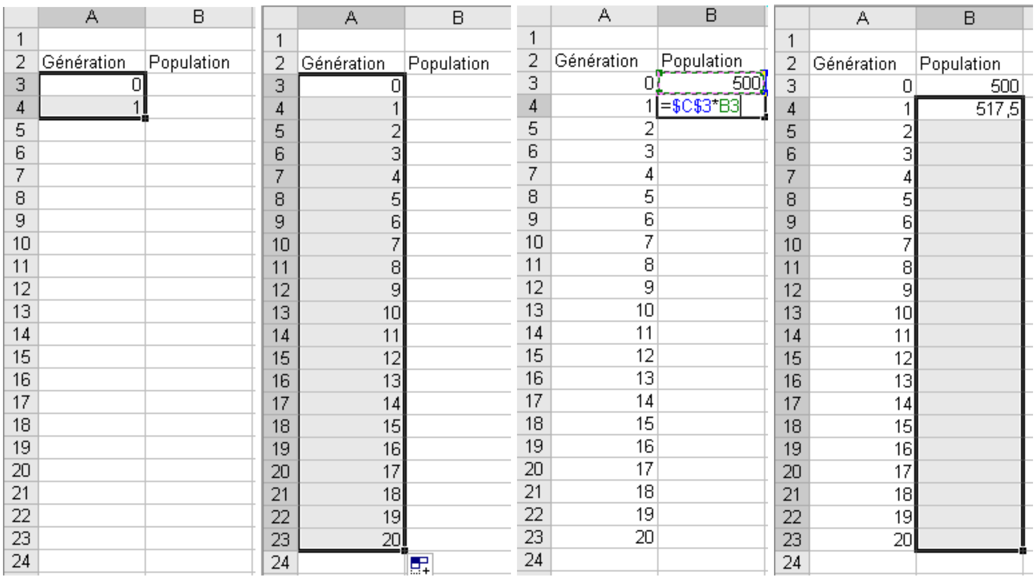
   On pourra procéder comme suit :

   Colonne A : entrer 0 et 1 dans les cases deux premières cases ; sélectionner ces deux cases ; placer le pointeur sur le carré en bas à droite de la sélection ; cliquer et tirer vers le bas : le tableur complète automatiquement.

   Colonne C : entrer la valeur de a dans une case (par exemple en $C3$).

   Colonne B : entrer 500 dans la première case et la formule de calcul dans la deuxième case en indiquant *les références absolues de la case contenant* (c'est-à-dire avec des \$) a (suivi de ENTRÉE) ; sélectionner la case de la formule ; placer le pointeur sur le carré en bas à droite de la sélection ; cliquer et tirer vers le bas : le tableur complète automatiquement.

   Sélectionner ensuite les deux colonnes A et B puis utiliser l'assistant graphique (nuage de points)



3. Que peut-on conjecturer pour l'évolution de la population ? Va-t-elle tendre vers un état d'équilibre et si oui lequel ?
4. Mêmes questions avec les autres valeurs de a.
5. En faisant ainsi varier les valeurs de a, regrouper, par intervalles, celles pour lesquelles l'évolution de la population serait du même type.

Cette croissance ou décroissance est dite *exponentielle pure*.

Deuxième approche : croissance de type $P_{n+1} = aP_n + b$

L'évolution précédente peut être modifiée par des facteurs extérieurs qui peuvent influer sur la population, comme des migrations régulières d'individus ou l'intervention de l'homme, ce qui peut se traduire par une « injection » de nouveaux individus à chaque nouvelle génération. On aura ainsi $P_{n+1} = aP_n + b$ où b est le nombre d'individus (qu'on suppose ici constant) ajoutés à chaque nouvelle génération. Par exemple, dans une réserve naturelle comportant une espèce en voie de disparition où chaque nouvelle génération est moins nombreuse que la précédente, on peut décider d'y injecter, à chaque génération, une certaine quantité d'invididus. Ainsi, si, constatant que sans l'intervention de l'homme la population diminue de moitié d'une génération à l'autre, on décide d'introduire 100 individus à chaque nouvelle génération, on aura alors $P_{n+1} = \frac{P_n}{2} + 100 = 0,5P_n + 100$.

1. On suppose, dans toute cette partie, que, sans l'intervention de l'homme, la population baisse d'une génération à l'autre de 20%.

   Montrer que $P_{n+1} = 0,8P_n$.
2. Pour compenser cela, à chaque génération on introduit b individus provenant d'une autre réserve.

   On a alors $P_{n+1} = 0,8P_n + b$.

   En utilisant le tableur, calculer les 20 premières valeurs de P_n en prenant $P_0 = 500$ et $b = 50$ et faire une représentation graphique de ces valeurs.

   On pourra procéder comme suit :

Colonne A : même chose que précédemment.

Colonne C : entrer la valeur de b dans une case (par exemple en C3).

Colonne B : entrer 500 dans la première case et la formule de calcul dans la deuxième case en indiquant *les références absolues de la case contenant* b ; puis même chose que précédemment.

Sélectionner ensuite les deux colonnes puis utiliser l'assistant graphique.

3. Que peut-on conjecturer pour l'évolution de la population ? Va-t-elle tendre vers un état d'équilibre et si oui lequel ?
4. Mêmes questions avec :
   - $b = 0$;
   - $b = 100$;
   - $b = 200$.
5. En faisant ainsi varier les valeurs de b, regrouper, par intervalles, celles pour lesquelles l'évolution de la population serait du même type.

Ce type de croissance est dite *décroissance exponentielle et apport constant*, l'apport étant la valeur de b.

Troisième approche : croissance de type $P_{n+1} = aP_n\left(1 - \frac{P_n}{M}\right)$

En réalité, un certain nombre de facteurs viennent freiner les types de croissance des approches précédentes. Le cas le plus fréquent est celui où le territoire sur lequel vit cette population est limité et ne permet pas de faire vivre plus de M individus, et où la génération n peut consommer la plupart des ressources si elle est proche de ce maximum en ne laissant rien à la génération suivante (la $n+1$) qui sera alors en nombre très faible. Étant en nombre très faible, le territoire pourra alors se reconstituer et leurs descendants (la génération $n+2$) seront en nombre beaucoup plus important.

Les biologistes modélisent cette situation par la relation $P_{n+1} = aP_n\left(1 - \frac{P_n}{M}\right)$ où a est un coefficient qui dépend du territoire.

On considère qu'ici $p_0 = 500$ et $M = 1000$.

1. On suppose que P_n est proche du maximum M. De quelle valeur sera proche $\frac{P_n}{M}$? Et $\left(1 - \frac{P_n}{M}\right)$? Que peut-on en déduire pour P_{n+1} ?
2. En utilisant le tableur, calculer les 50 premières valeurs de P_n en prenant $a = 2,8$ et faire une représentation graphique de ces valeurs.

   Utiliser une case de la colonne C pour a comme précédemment
3. Que peut-on conjecturer pour l'évolution de la population ? Va-t-elle tendre vers un état d'équilibre et si oui lequel ?
4. Mêmes questions avec :
   - $a = 1$;
   - $a = 2$;
   - $a = 3,1$;
   - $a = 3,5$;
   - $a = 4$.
5. En faisant varier ainsi les valeurs de a, regrouper, par intervalles, celles pour lesquelles l'évolution de la population serait du même type.

Vous pourrez ainsi observer aisément l'influence de a sur le comportement de la suite et constater que ce comportement peut être très sensible aux petites variations du coefficient a. Par exemple :

- $a = 3,558$;
- $a = 3,5688$;
- $a = 3,588$;
- $a = 3,630123$;
- $a = 3,671151$;

10.2 Petit historique sur les suites

Par Frédéric Demoulin

L'un des premiers travaux portant sur les suites de nombres semble provenir d'un certain ARCHIMÈDE[1].

Dans son traité *La mesure du cercle*, pour trouver une valeur approchée de π, il avait eu la brillante idée de considérer des polygones réguliers inscrits et circonscrits à un cercle de rayon 1 : d'abord deux triangles équilatéraux, puis deux carrés, deux pentagones, etc.

Comme on peut le voir sur la figure 10.1, plus le nombre de côtés du polygone inscrit au cercle est grand et plus son périmètre est proche de la circonférence du cercle tout en lui restant inférieur. De même, plus le nombre de côtés du polygone circonscrit au cercle est grand et plus son périmètre est proche de la circonférence du cercle tout en lui restant supérieur. Les périmètres de ces polygones forment ainsi deux suites de nombres qui encadrent la circonférence du cercle, en l'occurence 2π.

[1] Très brillant scientifique grec de Sicile, mathématicien, physicien et ingénieur (287 av. J.C. – 212 av. J.C.).

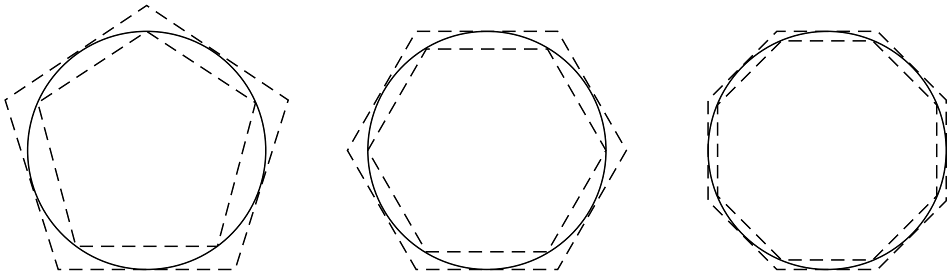


FIG. 10.1 – Exemples de polygones réguliers inscrits et circonscrits à un cercle : pentagone, hexagone et octogone.

Comme ARCHIMÈDE, de nombreux autres grands scientifiques (FIBONACCI, LUCAS, BERNOULLI, NEWTON, MOIVRE, CAUCHY, WALLIS, pour ne citer qu'eux…) vont, historiquement, s'intéresser aux suites dans le but d'approcher des valeurs numériques.

Au cours du XVII^e et du XVIII^e siècle, l'intuition et le génie de mathématiciens tels EULER ou BERNOULLI amènent à l'établissement de nombreux résultats relatifs aux suites, reléguant parfois au second plan les limites de validité de leurs découvertes.

Il faut donc attendre le début du XIX^e siècle pour qu'AUGUSTIN LOUIS CAUCHY[2] pose les fondements rigoureux de la théorie des suites. CAUCHY prend ainsi sa revanche sur les illustres mathématiciens du XVII^e et du XVIII^e. Deux événements décisifs viennent alors donner un élan supplémentaire aux suites : l'introduction de la notation indicielle[3] qui consiste à repérer chaque terme d'une suite par une même lettre affectée d'un indice et le point de vue de PEANO[4] qui définit une suite comme étant une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Plus récemment, dans la seconde moitié du XX^e siècle, le développement des outils de calcul va logiquement donner un nouvel essor à l'étude des suites. À l'heure actuelle, les domaines d'application des suites sont bien vastes : Analyse numérique, Mathématiques financières, Physique… ou encore Biologie comme on a pu le voir en activité d'introduction.

10.3 Définition et notations

Définition 10.1. Une suite numérique u est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une fonction qui à tout entier naturel n associe un réel, noté $u(n)$ ou, plus généralement, u_n.
Ainsi $u : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n \end{cases}$

Exemples 10.1.
1. La suite des carrés des nombres entiers est $0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16$; etc. On peut écrire ces termes sous la forme $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 4$; $u_3 = 9$; etc. On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) de terme général $u_n = n^2$.
2. La suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ n'est définie que pour $n \geq 1$, on la note $(u_n)_{n\geq 1}$.
3. La suite de terme général $u_n = \sqrt{n-5}$ n'est définie que pour $n \geq 5$, on la note $(u_n)_{n\geq 5}$.

Remarques (Vocabulaire, notations).
- n est l'indice (ou le rang) et u_n est le terme de rang n.
- Lorsque la suite n'est définie qu'à partir d'un certain rang k, on note la suite : $(u_n)_{n\geq k}$. Si elle est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui sera le cas de toutes les suites étudiées, sauf indication contraire, on n'écrit pas $(u_n)_{n\geq 0}$ mais plus simplement (u_n). C'est un abus d'écriture mais qui évite les surcharges de notation.
- *Attention :* (u_n) désigne la suite alors que u_n désigne le terme de rang n.

10.4 Modes de génération d'une suite

10.4.1 Relevés chronologiques

Dans la « vie courante », les principales suites rencontrées sont obtenues par des relevés, en général chronologiques, en économie, ou des mesures en physique.

En mathématiques, nous nous intéresserons essentiellement aux suites définies mathématiquement (par des formules) dont l'objet sera la modélisation des suites précédentes et à l'étude de leurs propriétés mathématiques.

[2] Mathématicien français réputé pour sa finesse et sa rigueur (1789 – 1857).
[3] La notation indicielle est due, semble-t-il, au grand mathématicien et astronome italien JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736 – 1813).
[4] Mathématicien italien, la définition axiomatique des entiers naturels porte son nom (1858 – 1932).

10.4.2 Définition par une formule explicite

Une suite *explicite* est une suite dont le terme général s'exprime en fonction de n. Elle est du type $u_n = f(n)$ où f est une fonction.

On a donc la définition suivante :

Définition 10.2. Soit f une fonction définie au moins sur $\mathbb{R}^+$. On peut alors définir une suite (u_n) de la façon suivante : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.

Remarques.
- On peut donc caculer directement n'importe quel terme de la suite à partir de l'indice n. C'est le côté agréable des suites explicites.
- Si f n'est définie que sur $[k;+\infty[$, avec $k > 0$, la suite n'est alors définie que pour $n \geq k$.

Exemples 10.2.
1. La suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 2n-1$. On a $u_n = f(n)$ avec $f : x \mapsto 2x-1$. Par exemple $u_4 = 2 \times 4 - 1 = 7$.
2. Les suites de l'exemple précédent sont toutes des suites explicites. Les deux dernières sont définies, respectivement, pour $n \geq 1$ et pour $n \geq 5$.

10.4.3 Définition par récurrence

Une suite *récurrente* est définie par la donnée des premiers termes et la relation liant les termes de la suite (en général consécutifs).

Plus généralement, on peut définir une suite récurrente de la façon suivante :

Définition 10.3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$.
On peut alors définir une suite (u_n) par la donnée de $u_0 \in I$ et de la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Exemple 10.3. $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$ donne :
- $u_0 = 4$;
- $u_1 = 2u_0 - 5 = 3$;
- $u_2 = 2u_1 - 5 = 1$;
- etc.

Remarques.
- Contrairement aux suites explicites, on ne peut pas, *a priori*, calculer un terme quelconque de la suite, sans avoir obtenu, avant, tous les termes le précédant.
  De nombreux exercices seront consacrés à obtenir, malgré tout, des moyens de calculer directement un terme donné, c'est-à-dire à transformer, lorsque c'est possible, la suite récurrente en une suite explicite.
- Toutes les fonctions f ne conviennent pas. Par exemple si $u_0 = 3$ et $f(x) = \sqrt{x-2}$, c'est-à-dire $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 2}$, on a $u_1 = \sqrt{u_0 - 2} = \sqrt{1} = 1$. Par contre on ne peut pas calculer u_2, donc la suite n'est pas définie.

10.5 Représentation graphique d'une suite

Dans tout ce paragraphe, on rapporte le plan à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

10.5.1 Cas général

Définition 10.4. Dans un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la représentation graphique d'une suite (u_n) est l'ensemble des points M_n de coordonnées $(n; u_n)$.

Remarque. Contrairement à une fonction, la représentation graphique d'une suite n'est pas une courbe mais un nuage de points car la suite n'est définie que pour $n \in \mathbb{N}$. $u_{1,5}$ n'a, mathématiquement, pas de sens et donc le point $(1,5; u_{1,5})$ non plus.

10.5.2 Exemple

Prenons comme exemple la suite (u_n) définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par $u_n = n - 1,5$. Le terme général de cette suite est définie par une formule explicite, on a $u_n = f(n)$ où $f : x \mapsto x - 1,5$.

Calculons les premiers termes.

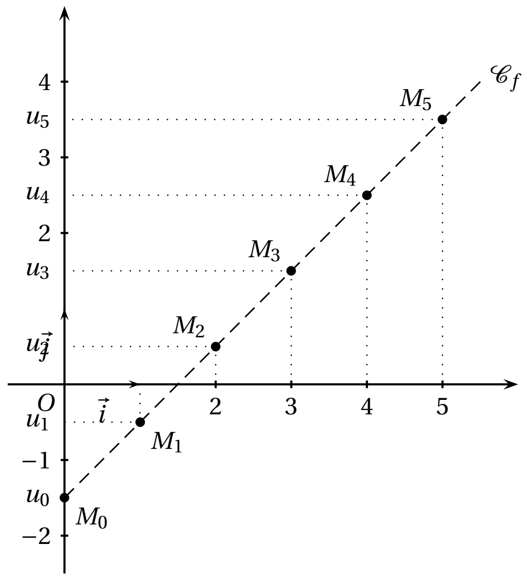
On a : $u_0 = 0 - 1,5 = -1,5$; $u_1 = 1 - 1,5 = -0,5$; $u_2 = 2 - 1,5 = 0,5$; $u_3 = 3 - 1,5 = 1,5$; $u_4 = 4 - 1,5 = 2,5$; $u_5 = 5 - 1,5 = 3,5$.

On peut regrouper ces résultats dans un tableau.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	$-1,5$	$-0,5$	$0,5$	$1,5$	$2,5$	$3,5$

La représentation graphique de la suite (u_n) est l'ensemble des points $M_0(0;-1,5)$, $M_1(1;-0,5)$, $M_2(2;0,5)$, etc. (voir schéma de la présente page)

FIG. 10.2 – $u_n = n - 1,5$



10.5.3 Cas particulier : cas d'une suite récurrente

Dans le cas d'une suite récurrente, on ne cherche pas en général à représenter graphiquement la suite au sens de la définition ci-dessus (on pourrait très bien le faire).

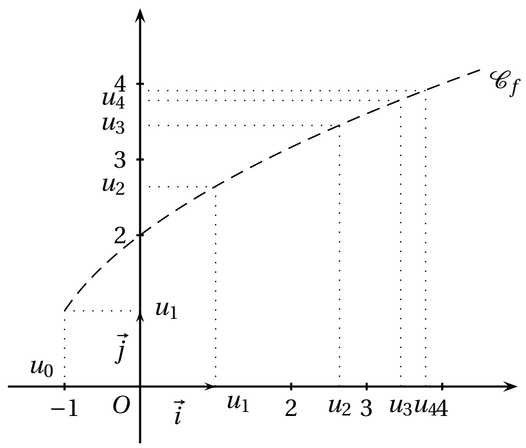
On préfère représenter ses premiers termes sur un axe (celui des abscisses par exemple) en s'appuyant sur la courbe représentative de la fonction définissant la relation de récurrence.

On procède alors ainsi :

1. On trace la représentation graphique de f ;
2. On place le premier terme u_0 sur l'axe des abscisses ;
3. On utilise $\mathscr{C}_f$ pour construire $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées ;
4. On reporte u_1 sur l'axe des abscisses ;
5. On utilise $\mathscr{C}_f$ pour construire $u_2 = f(u_1)$ sur l'axe des ordonnées ;
6. etc.

Exemple 10.4. Prenons comme exemple la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$. Le terme général de cette suite est définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \mapsto \sqrt{3x+4}$.

On obtient alors le diagramme suivant :



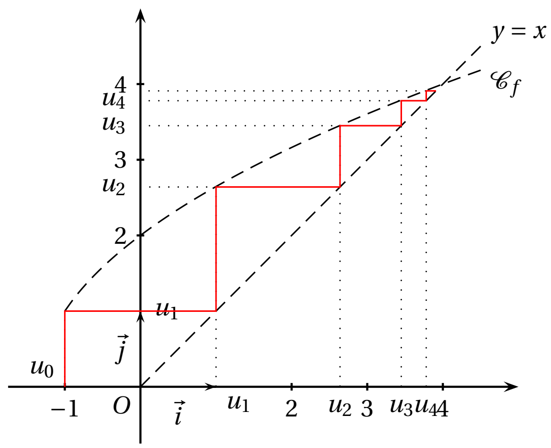
Toutefois le report de u_n depuis l'axe des ordonnées jusqu'à l'axe des asbcisses peut se faire de façon plus efficace (et moins fastidieuse) en utilisant la droite d'équation $y = x$, appelée *première bissectrice*, qui permet dans la pratique d'échanger abscisse et ordonnée.

On procède alors ainsi :

1. On trace les représentations graphiques de f et de la première bissectrice d'équation $y = x$.
2. On place le premier terme u_0 sur l'axe des abscisses.
3. On utilise $\mathscr{C}_f$ pour construire $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées.
4. On reporte u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la première bissectrice.
5. On utilise $\mathscr{C}_f$ pour construire $u_2 = f(u_1)$ sur l'axe des ordonnées.
6. etc.

On obtient alors un diagramme « en escalier »ou en « escargot ». On peut alors faire des conjectures en termes de variation, de comportement asymptotique, etc.

Exemple 10.5. Avec la suite de l'exemple précédent, on obtient la construction suivante :



Ici la suite semble être croissante et, plus n devient grand, plus ses termes semblent se rapprocher de 4.

10.6 Monotonie d'une suite

10.6.1 Définitions

Une suite est une fonction particulière, on retrouve donc naturellement la notion de sens de variation pour une suite.

Définition 10.5. Soit (u_n) une suite, n_0 un entier naturel. On dit que :
- la suite (u_n) est *croissante* à partir du rang n_0 si, pour tout entier $n \geq n_0$: $u_{n+1} \geq u_n$;
- la suite (u_n) est *décroissante* à partir du rang n_0 si, pour tout entier $n \geq n_0$: $u_{n+1} \leq u_n$;
- la suite (u_n) est *stationnaire* à partir du rang n_0 si, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n = u_{n+1}$.

Définition 10.6. Soit (u_n) une suite, n_0 un entier naturel. On dit que (u_n) est *monotone* à partir du rang n_0 si son sens de variation ne change pas à partir du rang n_0 (elle reste croissante à partir du rang n_0 ou décroissante à partir du rang n_0)

Étudier la monotonie d'une suite c'est donc étudier ses variations.

Remarques.
- On obtient les définitions de *strictement* croissante, décroissante ou monotone en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.
- Si la suite est définie et stationnaire à partir du rang n_0, alors la suite (u_n) est *constante*

10.6.2 Méthodes

Signe de la différence $u_{n+1} - u_n$

Pour étudier le sens de variation d'une suite, on peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$. Cette méthode est très générale et fonctionne tout le temps.

Exemple 10.6. Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n^2 - n$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - (n+1) - n^2 + n = n^2 + 2n + 1 - n - 1 - n^2 + n = 2n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2n \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq u_n$.
La suite (u_n) est croissante.

Comparaison de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1

Pour étudier le sens de variation d'une suite *à termes strictement positifs*, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
Cette méthode est particulièrement adaptée aux suites dont le terme général contient une puissance ou un produit.

Exemple 10.7. Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \frac{2^n}{n}$. La suite (u_n) est à termes strictement positifs car $n \in \mathbb{N}^*$.
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{2^n \times 2}{2^n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{2n}{n+1}.$$

Or, $\frac{2n}{n+1} \geq 1 \Leftrightarrow 2n \geq n+1 \Leftrightarrow n \geq 1$, donc, pour tout $n \geq 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ donc $u_{n+1} \geq u_n$ car $u_n > 0$.
La suite (u_n) est croissante à partir du rang 1.

Variations de la fonction associée

Pour étudier les variations d'une suite définie par une formule explicite, on peut étudier les variations de la fonction associée. On s'appuie alors sur le théorème suivant.

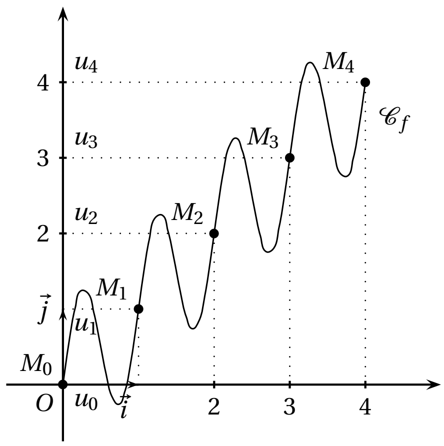
Théorème 10.1. *Soit (u_n) la suite définie par la relation $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie au moins sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ (ou $]a;+\infty[$) avec $a \in \mathbb{R}^+$ et n_0 le premier entier supérieur à a.*
Si la fonction f est monotone sur $[a;+\infty[$ (ou $]a;+\infty[$), alors la suite (u_n) est monotone à partir du rang n_0 et a même sens de variation que f.

Preuve. Voyons le cas où f est croissante sur $[a;+\infty[$, les autres cas se démontrant de manière analogue.
Supposons f croissante sur $[a;+\infty[$. Pour tout $n \in [n_0;+\infty[$, on a $n_0 \leq n < n+1$ donc $f(n) < f(n+1)$ donc $u_n < u_{n+1}$.
La suite (u_n) est donc croissante à partir de n_0. ◊

Cette méthode concerne donc uniquement les suites définies par une formule explicite, elle est intéressante lorsque les variations de la fonction associée sont simples à déterminer.

Exemple 10.8. Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ par $u_n = \sqrt{n-2}$. On a $u_n = f(n)$ où $f : x \mapsto \sqrt{x-2}$, définie sur $[2;+\infty[$.
La fonction f est une fonction associée à la fonction racine et, comme la fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}^+$, d'après les propriétés des fonctions asociées, f est croissante sur $[2;+\infty[$.
D'après le théorème précédent, la suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang 2.

Remarque. La réciproque du théorème est fausse. En effet, considérons la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n + \sin(2\pi n)$. On a $u_n = f(n)$ où $f : x \mapsto x + \sin(2\pi x)$, définie sur $[0;+\infty[$.
Étudions les variations de la suite (u_n). En remarquant que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\sin(2\pi n) = 0$, il vient $u_{n+1} - u_n = 1 > 0$, la suite (u_n) est donc strictement croissante.
Qu'en est-il des variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$?



Comme on peut le voir graphiquement, la fonction f n'est pas monotone sur $[0;+\infty[$. Moralité, pour étudier les variations d'une fonction, on ne pourra pas introduire une suite et s'appuyer sur les variations de cette dernière.

10.7 Exercices

Exercice 10.1.

On connaît les premiers termes de quelques suites.

Suite (a_n)	Suite (b_n)	Suite (c_n)	Suite (d_n)	Suite (e_n)
$a_0 = 0$		$c_0 = 1$		$e_0 = 100$
$a_1 = 1$	$b_1 = -1$	$c_1 = 1{,}5 = \dfrac{3}{2}$	$d_1 = 1$	$e_1 = 20$
$a_2 = 4$	$b_2 = \dfrac{1}{2}$	$c_2 = 1{,}75 = \dfrac{7}{4}$	$d_2 = 3$	$e_2 = 4$
$a_3 = 9$	$b_3 = -\dfrac{1}{3}$	$c_3 = 1{,}875 = \dfrac{15}{8}$	$d_3 = 5$	$e_3 = 0{,}8$
$a_4 = 16$	$b_4 = \dfrac{1}{4}$	$c_4 = 1{,}9375 = \dfrac{31}{16}$	$d_4 = 7$	$e_4 = 0{,}16$
$a_5 = 25$	$b_5 = -\dfrac{1}{5}$	$c_5 = 1{,}96875 = \dfrac{63}{32}$	$d_5 = 9$	$e_5 = 0{,}032$

1. Conjecturer, dans chaque cas, une formule explicite satisfaisante (c'est-à-dire, une formule vérifiée par les premiers termes connus).
2. À l'aide des formules explicites obtenues, calculer, pour chacune des cinq suites ci-dessus, le terme d'indice 10.
3. Étudier la monotonie de chacune de ces suites.
4. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$.
   (b) Montrer qu'il existe deux réels m et M tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq b_n \leq M$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n \leq 2$.
5. Déterminer une relation de récurrence pour les suites (a_n), (c_n), (d_n) et (e_n).
6. On note (S_n) la suite définie par : $S_n = d_1 + d_2 + \ldots + d_n$
   (a) Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4.
   (b) Montrer que : $S_n = n^2$.
7. Quelles conjectures peut-on faire concernant ces suites quant à leur comportement quand n devient très grand ?

Exercice 10.2.

Étudier la monotonie de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$;
2. $v_n = n + \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$;
3. $w_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10.3.

Étudier la monotonie de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{1}{n+2}$ pour $n \in \mathbb{N}$;
2. $v_n = \frac{2n+1}{n+3}$ pour $n \in \mathbb{N}$;
3. $u_n = n - n^2$ pour $n \in \mathbb{N}$;
4. $w_n = 3^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10.4.

(v_n) est la suite définie pour tout entier strictement positif par $v_n = \frac{2^n}{n^2}$

1. Calculer ses quatre premiers termes.
2. On cherche à montrer que la suite est croissante à partir du rang $n = 3$.
   (a) Résoudre l'inéquation $\frac{2x^2}{(x+1)^2} > 1$.
   (b) Montrer que $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2n^2}{(n+1)^2}$.
   (c) Conclure.

Exercice 10.5.

On donne les suites définies par récurrence suivantes :

- $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1 \end{cases}$
- $(v_n) : \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_n}{1+v_n}\right) \end{cases}$
- $(w_n) : \begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{n+1} = \frac{2w_n+3}{w_n+4} \end{cases}$

Pour chacune de ces suites :

1. Construire leur représentation graphique en « escargot »(dans des repères distincts) ;
2. Conjecturer leur monotonie et leur comportement quand n devient grand.

Exercice 10.6.

On considère la suite (u_n) définie par récurrence par : $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n} \end{cases}$

1. Montrer que u_1, u_2 et u_3 appartiennent à $[0; 1]$.
2. Montrer que si $0 \leq u_n \leq 1$ alors $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.
3. En déduire que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Remarque. Ce type de démonstration est appelé « une démonstration par récurrence ».

Ainsi si on veut démontrer par récurrence que tous les termes d'une suite vérifient une propriété $\mathscr{P}$, on procède de la façon suivante :

- On montre que le ou les premiers termes vérifient $\mathscr{P}$
- On montre que si u_n vérifie $\mathscr{P}$, alors u_{n+1} vérifie $\mathscr{P}$ (on dit qu'elle est *héréditaire*)
- On peut alors conclure qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ (car étant vraie pour u_1 elle l'est aussi pour u_2, étant vraie pour u_2 elle l'est aussi pour u_3 et ainsi de suite).

Vous aurez l'occasion d'y revenir longuement en Terminale.

Exercice 10.7.

On considère la suite (u_n) définie par récurrence par : $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 5u_n \end{cases}$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. On veut démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathscr{P}$ suivante est vérifiée : $\mathscr{P} : u_n = A \times 5^n + B$ où A et B sont deux réels à déterminer.
   (a) À l'aide de u_0 et u_1, déterminer les seules valeurs possibles pour A et B et regarder si u_2, u_3 et u_4 vérifient $\mathscr{P}$.
   (b) On suppose que u_n et u_{n+1} vérifient $\mathscr{P}$, c'est-à-dire que $u_n = A \times 5^n + B$ et que $u_{n+1} = A \times 5^{n+1} + B$. Montrer qu'alors u_{n+2} vérifie $\mathscr{P}$.
   (c) Conclure.
3. En déduire u_{10}.

Chapitre 11

Barycentres

Sommaire

11.1 Activités

Donnez-moi un point d'appui, je soulèverai le monde[1]

On apprend en physique que l'équilibre d'un système de leviers est réalisé lorsque les produits de la masse par la longueur du bras correspondant sont égaux.

Avec les notations du schéma ci-dessous, on a équilibre lorsque $ml = m'l'$.

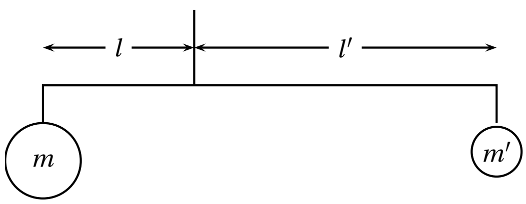


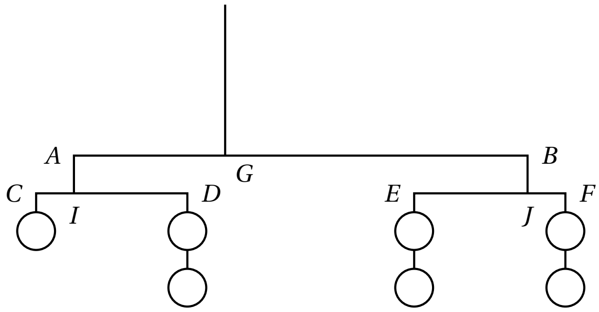
FIG. 11.1 – Schéma

[1]Phrase attribuée à ARCHIMÈDE 287 av. J.-C. 212 av. J.-C.

Activité 11.1 (Mobiles). 1. Déterminer la position du point d'équilibre dans les cas suivants :
- $m = 1$ et $m' = 1$;
- $m = 2$ et $m' = 1$;
- $m = 3$ et $m' = 5$.

2. Le mobile du schéma 2 de la présente page est formé de tiges et de fils de masses négligeables tel que $AB = 30$ cm et $CD = EF = 10$ cm et de sept billes de 10 g chacune. Il est en équilibre. Déterminer les positions exactes de I, J

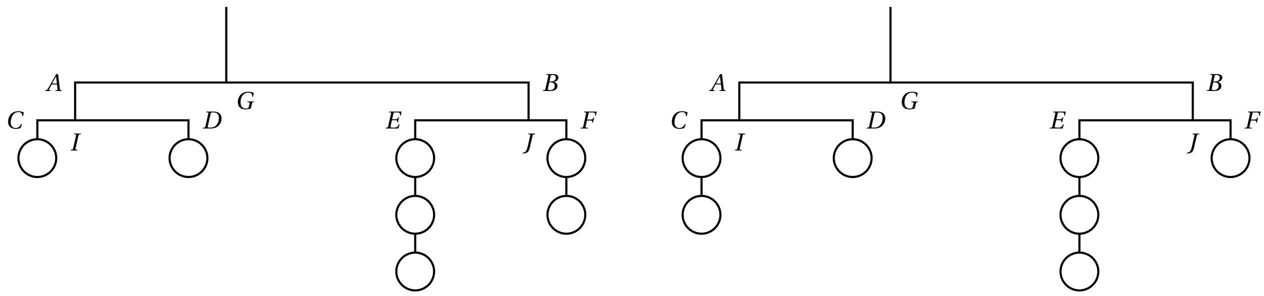
FIG. 11.2 – Schéma 2



et G.

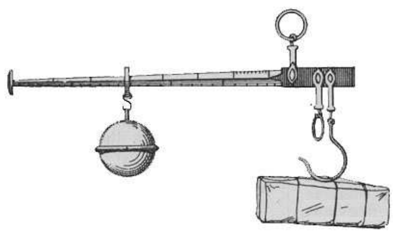
3. Même question avec les mobiles du schéma 3 de la présente page.

FIG. 11.3 – Schéma 3



Activité 11.2 (Balance romaine).

Contrairement à une balance classique, dans une balance romaine[2], les deux bras du fléau n'ont pas la même longueur. Le bras du côté de la masse inconnue a une longueur constante alors que la longueur du bras qui supporte le contre-poids est variable.



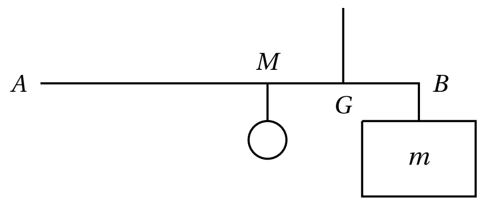
Dans cette balance, on n'obtient pas l'équilibre en égalisant les deux masses, mais en agissant sur la longueur du bras qui porte le contre-poids. L'équilibre se fait lorsqu'en déplaçant ce contre-poids le long de sa tige, le fléau atteint la position horizontale. Le bras le plus long porte des divisions avec indication des poids correspondants. Il suffit alors de lire le poids de l'objet.

Il faut noter que la différence de longueur entre les bras permet de peser des charges beaucoup plus importantes que celle du contre-poids.

Pour cette activité on modélisera une balance romaine de la façon suivante :
- la balance est constituée d'une tige AB indéformable et de masse négligeable telle que $AB = 2,5$ m ;

[2] Cette balance n'est pas d'origine romaine, son nom provient de l'arabe *rommäna* (balance) ou, selon les sources, de l'arabe *roummana* (grenade, le fruit) pour désigner le peson mobile se déplaçant sur la réglette.

- la balance est fixée au plafond en G, tel que $BG = 0,5$ m ;
- la masse inconnue m est fixée au bout d'un crochet de masse négligeable fixé en B ;
- un contre-poids de deux kilogrammes est fixé en M au bout d'un crochet de masse négligeable, tel que $M \in [AB]$. On note $x = MG$.



1. Déterminer m dans chacun des cas suivants :
   - $x = 50$ cm ;
   - $x = 1$ m ;
   - $x = 1,5$ m.
2. Déterminer x dans chacun des cas suivants :
   - $m = 1$ kg ;
   - $m = 3$ kg ;
   - $m = 5$ kg.
3. Quelle est la portée (masse minimale et masse maximale qu'elle peut mesurer) de cette balance ?

Activité 11.3 (Modélisation mathématique).

Soient A et B deux points. On considère 3 points M, N, P non situés sur la droite (AB).

1. Construire les points M', N', P' vérifiant les égalités suivantes :
   - $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + 0,5\overrightarrow{MB}$;
   - $\overrightarrow{NN'} = 2\overrightarrow{NA} + 0,5\overrightarrow{NB}$;
   - $\overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{PA} + 0,5\overrightarrow{PB}$.
2. Tracer les droites (MM'), (NN'), (PP'). Que constate-t-on ?
3. Soit G le point d'intersection des droites (AB) et (MM') ;
   (a) construire G' le point qui vérifie : $\overrightarrow{GG'} = 2\overrightarrow{GA} + 0,5\overrightarrow{GB}$
   (b) En déduire en une définition vectorielle de G.
4. (a) Sur le même dessin construire les points I, J, K, L vérifiant les égalités suivantes :
   - $4\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$;
   - $-2\overrightarrow{JA} - 0,5\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{0}$;
   - $8\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{0}$;
   - $\overrightarrow{LA} + 0,25\overrightarrow{LB} = \overrightarrow{0}$.

   (b) Que constate-t-on ? Pouvait-on le prévoir ?

Activité 11.4 (Avec l'ordinateur).

Les résultats seront notés clairement sur une feuille rendue à la fin de la séance.

Mode d'emploi
Avant de faire l'une des actions décrites ci-dessous, cliquer d'abord sur le bouton ayant la forme d'une flèche.
Pour déplacer le point M approcher le curseur de M lorsque le logiciel affiche « ce point M »tenir le bouton gauche de la souris enfoncé et déplacer la souris.
Pour modifier la valeur de a, cliquer sur le nombre. Modifier la valeur en utilisant les boutons apparaissant à droite de la boîte.

1. Ouvrir le fichier *barycentre0.fig*.
   Dans cette figure le point M est libre et le point M' est l'image de M par la fonction qui à M fait correspondre M' tel que $\overrightarrow{MM'} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB}$.
   (a) Que remarque-t-on concernant la droite (MM') ?
   (b) Soit G le point fixe de cette droite. Quelle est l'image de G ?
   (c) En déduire une définition vectorielle de G.
   (d) Que se passe-t-il si $a = 2$ et $b = -2$?
2. Ouvrir le fichier *barycentre1.fig*.
   Le logiciel place le barycentre de deux points A et B en fonction des coefficients a et b attribués à chaque point.
   (a) Remplir le tableau page suivante où x représente l'abscisse du barycentre. On appellera *Zone I* la demi droite d'origine A ne contenant pas B, *Zone II* le segment $[AB]$ et *Zone III* la demi-droite d'origine B ne contenant pas A (voir schéma ci-dessous).

a	b	x	Zone
3	4		
-3	4		
-3	-4		
0	7		
-2	2		

TAB. 11.1 – Position du barycentre selon les valeurs de a et b

(b) *Généralisation.* Après avoir rempli le tableau conjecturer les conditions que doivent vérifier a et b pour que le barycentre soit :
   i. sur la demi droite d'origine A ne contenant pas B ;
   ii. sur le segment $[AB]$;
   iii. sur la demi-droite d'origine B ne contenant pas A ;
   iv. confondu avec A, confondu avec B.

3. Ouvrir le fichier *barycentre3.fig*.
   Le logiciel place le barycentre de A, B et C en fonction des coefficients a, b et c attribués aux trois points.
   Donner à a la valeur 5 et à b la valeur 3.
   (a) Faire varier c dans l'intervalle $[-50;50]$ en conservant la trace du barycentre G.
   (b) Que constate-t-on pour l'ensemble des points obtenus ?
   (c) Pour quelle valeur de c, G est-il sur la droite (AB) ? On appellera G' ce point.
   (d) Comparer $5G'A$ et $3G'B$. En déduire que G' peut être considéré comme le barycentre de (A,a) et (B,b) où a et b sont des réels à déterminer.
   (e) Pour quelles valeurs de c, G est-il entre G' et C ?
   (f) Pour quelles valeurs de c, G vérifie-t-il l'égalité suivante : $\overrightarrow{CG'} = 2\overrightarrow{CG}$?
4. Ouvrir le fichier *barycentre4.fig*.
   (a) Déterminer expérimentalement les valeurs à donner à a, b et c pour que G soit confondu avec le point M.
   (b) Même question pour les points N, P, Q.

Activité 11.5 (Coefficients au baccalauréat).
Le tableau page ci-contre donne quelques uns des coefficients des matières au baccalauréat en fonction de la filière générale choisie.

Un élève de Seconde calcule, avec ses notes de l'année, la moyenne qu'il obtiendrait, suivant la section, en utilisant les coefficients du bac. Ses notes sont :

- 14 en français
- 4 en LV1
- 10 en H. G.
- 13 en math
- 6 en EPS
- 10 en SES
- 7 en LV2
- 12 en Physique
- 15 en SVT

1. Quelle est sa moyenne dans chaque section ? (On ne tiendra pas compte de la philosophie).
2. (a) Quelle note minimale devrait-il avoir en philosophie pour obtenir la mention AB (12 de moyenne) ?
   (b) Dans quelles sections est-ce possible ?

La moyenne pondérée est l'équivalent en statistique du barycentre de points pondérés en géométrie.

11.2 Historique (par Frédéric DEMOULIN)

La notion de barycentre[3] a été introduite par ARCHIMÈDE[4] au III^{e} siècle avant notre ère alors qu'il s'intéressait à l'équilibre des leviers. C'est à cette occasion qu'il aurait prononcé la célèbre phrase « donnez-moi un point d'appui, je soulèverai le monde ». ARCHIMÈDE apporta une solution au problème simple vu dans l'activité 1.

Les barycentres sont donc d'abord considérés d'un point de vue physique concret. Il faut attendre de XIX^{e} siècle pour les considérer d'un point de vue purement mathématique. Le mathématicien August Ferdinand MÖBIUS[5] dans

[3] Du grec *barus* qui signifie *lourd, massif.*
[4] Illustre scientifique grec, mathématicien, physicien et ingénieur (287 a. J.-C. – 212 av. J.-C.).
[5] Mathématicien et astronome allemand, connu surtout pour sa découverte du ruban de Möbius (1790 – 1868).

Filière / Matière	SES			L		S		
Spécialité	SES	Maths	LV1	LV1	Maths	Maths	Phys	S.V.T.
Français/Lettres	4	4	4	9	9	4	4	4
H. G.	5	5	5	4	4	3	3	3
Maths	5	7	5	2	5	9	7	7
SES	9	7	7	-	-	-	-	-
LV1	3	3	5	8	4	3	3	3
LV2	3	3	3	4	4	2	2	2
Philosophie	4	4	4	7	7	3	3	3
EPS	2	2	2	2	2	2	2	2
Physique-Chimie	1	1	1	1	1	6	8	6
S.V.T.	1	1	1	1	1	6	6	8

TAB. 11.2 – Coefficients au baccalauréat

son mémoire intitulé *Der barycentrische Calcül* rédigé en 1827, utilise des systèmes de points auxquels il affecte un coefficient, ou masse, pouvant être aussi bien positif que négatif. La notion de barycentre devient alors indépendante de la Physique.

De nos jours, les applications des barycentres ne manquent pas... Les problèmes d'équilibre de balance, de centre de gravité, de centre d'inertie, de moyenne en statistique, la colorimétrie ainsi que les courbes de BÉZIER[6] en CFAO[7] sont autant de domaines dans lesquels intervient la notion de barycentre.

11.3 Barycentre de deux points pondérés

11.3.1 Théorème d'existence et définition

Théorème 11.1. *Soient A et B deux points de l'espace, α et β deux réels tels que $\alpha+\beta \neq 0$.*
Il existe un unique point G vérifiant : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0} &\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}\\ &\Leftrightarrow (\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}=-\beta\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)\overrightarrow{AG}=\beta\overrightarrow{AB}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} \quad \text{avec } \alpha+\beta\neq 0.\end{aligned}$$

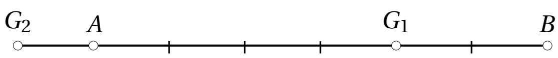
Ainsi, chercher un point G vérifiant $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ revient à chercher un point G tel que $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.

Si $\alpha+\beta\neq 0$, les points A et B ainsi que les réels α et β étant donnés, il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$. ◊

Définition 11.1. Soient A et B deux points de l'espace, α et β deux réels tels que $\alpha+\beta\neq 0$.
L'unique point G vérifiant $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ est appelé *barycentre* du système de points pondérés $\{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\beta)\}$.
On dit encore que G est le barycentre des points pondérés ou des points massifs $(A\,;\,\alpha)$ et $(B\,;\,\beta)$.

Remarque. Si $\alpha+\beta=0$, alors le barycentre n'est pas défini.

Exemple 11.1. $[AB]$ est un segment de longueur 6 cm.
Le barycentre G_1 de $\{(A\,;\,1)\,;\,(B\,;\,2)\}$ vérifie : $\overrightarrow{AG_1}=\dfrac{2}{1+2}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
Le barycentre G_2 de $\{(A\,;\,7)\,;\,(B\,;\,-1)\}$ vérifie : $\overrightarrow{AG_1}=\dfrac{-1}{-1+7}\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$.



[6]Ingénieur français chez Renault (1910 – 1999).
[7]Acronyme de *Conception et fabrication assistée par ordinateur*

11.3.2 Autres caractérisations du barycentre

Théorème 11.2. *Soit α et β deux réels tels que $\alpha+\beta \neq 0$ et G un point de l'espace. Dans ces conditions on a :*
G barycentre de $\{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\beta)\} \Leftrightarrow$ Pour tout M de l'espace $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$

Preuve. G barycentre de $\{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\beta)\} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ or

$$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0} &\Leftrightarrow \alpha\left(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MA}\right)+\beta\left(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MB}\right)=\overrightarrow{0} \text{ pour tout } M\\ &\Leftrightarrow (\alpha+\beta)\overrightarrow{GM}+\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}\\ &\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}\end{aligned}$$

◊

Ce théorème est particulièrement important car il permet de simplifier énormément le calcul vectoriel en réduisant les expressions.

Exemple 11.2. On peut remplacer, au besoin, le vecteur $2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{BC}$ par le vecteur $5\overrightarrow{GC}$, où G barycentre de $\{(A\,;\,2)\,;\,(B\,;\,3)\}$ car $2+3\neq 0$.
En effet, pour tout M, on a $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=5\overrightarrow{MG}$ et, en particulier, quand $M=C$, $2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CB}=5\overrightarrow{CG}$ donc $2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{BC}=5\overrightarrow{GC}$.

Cette réduction des expressions est appelée réduction vectorielle de LEIBNIZ[8].

Remarque. Lorsque $\alpha+\beta=0$ le vecteur $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$ est indépendant de M.

Exemple 11.3. $2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{BA}$

Théorème 11.3. *Soit α et β deux réels tels que $\alpha+\beta\neq 0$ et G un point de l'espace. Dans ces conditions on a :*
G barycentre de $\{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\beta)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$

Preuve. La première forme a été obtenue dans la démonstration du théorème 1, la seconde s'obtient de la même manière. ◊

Remarque. Cette caractérisation du barycentre est surtout utilisée pour construire le barycentre (implication). En effet, il n'est pas évident de voir que $\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ signifie que C barycentre de $\{(A\,;\,1)\,;\,(B\,;\,2)\}$ (réciproque).

11.3.3 Bilan des propriétés caractéristiques du barycentre

Au final on a les équivalences suivantes :

Soit α et β deux réels tels que $\alpha+\beta\neq 0$ et G un point de l'espace. Alors on a :

$$\begin{aligned}G \text{ barycentre de } \{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\beta)\} &\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}\\ &\Leftrightarrow \text{Pour tout } M \text{ de l'espace } \alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{BG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}\end{aligned}$$

11.3.4 Autres propriétés du barycentre

Dans toute la suite on supposera $\alpha+\beta\neq 0$.

[8] Gottfried Wilhelm von LEIBNIZ (1646 – 1716) était un philosophe, scientifique, mathématicien, diplomate, bibliothécaire et homme de loi allemand.

Homogénéité du barycentre

Théorème 11.4. *Si G est le barycentre de $\{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\beta)\}$, alors, pour tout réel k non nul, G est le barycentre de $\{(A\,;\,k\alpha)\,;\,(B\,;\,k\beta)\}$.*

Autrement dit, on *ne change pas* le barycentre de deux points en multipliant tous les coefficients par un même réel non nul.

Preuve. Soit k un réel non nul. On a :
$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow k\left(\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}\right)=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow k\alpha\overrightarrow{GA}+k\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$.
Comme $k\alpha+k\beta\neq 0$, G est aussi le barycentre de $\{(A\,;\,k\alpha)\,;\,(B\,;\,k\beta)\}$. ◊

Exemple 11.4. Le barycentre du systeme $\{(A\,;\,-60)\,;\,(B\,;\,12)\}$ est encore le barycentre du système $\{(A\,;\,-5)\,;\,(B\,;\,1)\}$

Barycentre et alignement

Théorème 11.5. *Si G est le barycentre de $\{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\beta)\}$, alors G est situé sur la droite (AB).*

Preuve. On a vu que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.
Ainsi, $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc $G\in(AB)$. ◊

Remarque. Ce théorème est particulièrement utilisé pour démontrer que des droites sont concourantes

La réciproque du théorème est vraie :

Théorème 11.6. *Si $G\in(AB)$ alors il existe des réels α et β tel que M barycentre de $\{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\beta)\}$.*

Preuve. $M\in(AB)\Leftrightarrow$ il existe k tel que $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$. Or :
$\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AM}+k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow (1-k)\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{0}$
Or $(1-k)+k\neq 0$ donc M est barycentre de $\{(A\,;\,1-k)\,;\,(B\,;\,k)\}$. ◊

Barycentre et segment

On peut vouloir situer plus précisément G sur la droite (AB) selon les valeurs de α et β.
On a :

Propriété 11.7. *Soit G barycentre de $\{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\beta)\}$. On a :*
- *α et β sont de même signe $\Leftrightarrow G\in[AB]$;*
- *$\alpha=0\Leftrightarrow G=B$ et $\beta=0\Leftrightarrow G=A$;*
- *$\alpha=\beta\Leftrightarrow G$ milieu de $[AB]$;*

Preuve. On a vu que $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$
- Examinons d'abord le cas où $\alpha=0$ (donc $\beta\neq 0$ car $\alpha+\beta\neq 0$).
  $\alpha=0\Leftrightarrow\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}=1\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow G=B$
- Examinons le cas où $\beta=0$ (donc $\alpha\neq 0$ car $\alpha+\beta\neq 0$).
  $\beta=0\Leftrightarrow\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow G=A$
- Considérons maintenant le cas où α et β non nuls et de même signe. Deux possibilités :
  1. α et β strictement positifs :
     $\alpha>0$ et $\beta>0\Leftrightarrow 0<\beta<\alpha+\beta\Leftrightarrow 0<\frac{\beta}{\alpha+\beta}<1$
  2. α et β strictement négatifs :
     $\alpha<0$ et $\beta<0\Leftrightarrow 0>\beta>\alpha+\beta\Leftrightarrow 0<\frac{\beta}{\alpha+\beta}<1$ (division par un négatif)

  Dans les deux cas : α et β sont de même signe $\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=k\overrightarrow{AB}$ avec $0<k<1\Leftrightarrow G\in[AB]$
- Enfin, regardons le cas où $\alpha=\beta$.
  $\alpha=\beta\Leftrightarrow\frac{\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\beta}{2\beta}=\frac{1}{2}$.
  Donc $\alpha=\beta\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow G$ milieu de $[AB]$.

◊

Remarque. Une conséquence de la propriété est que : α et β sont de signes opposés $\Leftrightarrow G$ est sur la droite (AB) privée du segment $[AB]$.

11.3.5 Isobarycentre

Définition 11.2. Le barycentre de A et B affectés du même coefficient non nul est appelé *isobarycentre* de A et de B.

Remarque. On ne précise pas alors les coefficients.

On a vu dans la propriété précédente que l'isobarycentre de A et de B est aussi le milieu de $[AB]$. On peut en faire un théorème :

Théorème 11.8. *L'isobarycentre G de deux points A et B est le milieu du segment* $[AB]$.

11.3.6 Coordonnées du barycentre de deux points

Théorème 11.9. *L'espace est muni d'un repère* $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ *. Soit A, B et G des points de coordonnées respectives* $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$, $B(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ *et* $G(x_G\,;\,y_G\,;\,z_G)$. *On a :*
Si G barycentre de $\{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\beta)\}$ *alors :*

- $x_G = \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha+\beta}$;
- $y_G = \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha+\beta}$;
- $z_G = \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha+\beta}$

Preuve. On sait que G barycentre de $\{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\beta)\} \Leftrightarrow$ Pour tout M de l'espace $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.
Posons $M=O$, l'origine du repère.
On a alors : $\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{OG}$ donc $\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$.
Donc $x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}$ et il en va de même pour les autres coordonnées. ◊

11.4 Barycentre de plusieurs points pondérés

11.4.1 Généralisation

On peut généraliser les définitions et propriétés à plusieurs points pondérés.

Nous nous limiterons à trois points pour la bonne intelligence du propos, mais la généralisation est valable pour un ensemble fini quelconque de points.

Définition 11.3. Soit A, B et C trois points de l'espace et α, β et γ trois réels tels que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.
Il existe un unique point G de l'espace vérifiant $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, qui est appelé barycentre du système de points pondérés $\{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\beta)\,;\,(C\,;\,\gamma)\}$.

Théorème 11.10. *Soit* α, β *et* γ *trois réels tels que* $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ *et G un point de l'espace. Alors on a :*

- *G barycentre de* $\{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\beta)\,;\,(C\,;\,\gamma)\}$
  $\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
  $\Leftrightarrow$ *Pour tout M de l'espace* $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$
  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$
  $\Leftrightarrow \overrightarrow{BG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{BA}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{BC}$
  $\Leftrightarrow \overrightarrow{CG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CA}+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CB}$.
- *Si G est le barycentre de* $\{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\beta)\,;\,(C\,;\,\gamma)\}$, *alors, pour tout réel k non nul, G est le barycentre de* $\{(A\,;\,k\alpha)\,;\,(B\,;\,k\beta)\,;\,(C\,;\,k\gamma)\}$.
- *L'espace étant muni d'un repère* $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ *où A, B, C et G de coordonnées respectives* $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$, $B(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$, $C(x_C\,;\,y_C\,;\,z_C)$ *et* $G(x_G\,;\,y_G\,;\,z_G)$. *On a :*
  Si G barycentre de $\{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\beta)\,;\,(C\,;\,\gamma)\}$ *alors* $x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$, $y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ *et* $z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$

On admettra ces propriétés (les démonstrations sont similaires à celles du barycentre de deux points).

Définition 11.4. Le barycentre de A, B et C affectés du même coefficient non nul est appelé *isobarycentre* de A, B et C.

Propriété 11.11. *L'isobarycentre de A, B et C est le centre de gravité du triangle ABC.*

Preuve. G barycentre de $\{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\alpha)\,;\,(C\,;\,\alpha)\} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA}+\alpha\overrightarrow{GB}+\alpha\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ qui est la définition vectorielle du centre de gravité du triangle ABC ♢

Théorème 11.12. *Soit α, β et γ trois réels tels que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ et A, B, C et G quatre points de l'espace tels que les points A, B et C ne sont pas alignés. Alors on a :*
G barycentre de $\left\{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\beta)\,;\,(C\,;\,\gamma)\right\} \Leftrightarrow G$ appartient au plan (ABC).

Preuve.
- G barycentre de $\left\{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\beta)\,;\,(C\,;\,\gamma)\right\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires et les points A, B, C et G sont dans le même plan.
- Si $G\in(ABC)$ alors il existe a et b tels que $\overrightarrow{AG}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$ or :
  $\overrightarrow{AG}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=a\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}\right)+b\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}\right) \Leftrightarrow (1-a-b)\overrightarrow{GA}+a\overrightarrow{GB}+b\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$
  Or $(1-a-b)+a+b\neq 0$ donc G barycentre de $\{(A\,;\,1-a-b)\,;\,(B\,;\,a)\,;\,(C\,;\,b)\}$.

♢

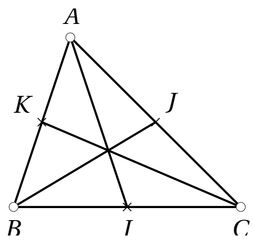
11.4.2 Associativité du barycentre

Théorème 11.13. *Si G barycentre de $\left\{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\beta)\,;\,(C\,;\,\gamma)\right\}$ et H barycentre de $\left\{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\beta)\right\}$ alors G barycentre de $\left\{(H\,;\,\alpha+\beta)\,;\,(C\,;\,\gamma)\right\}$*

Remarques.
- Le théorème induit que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ mais aussi que $\alpha+\beta\neq 0$ (sinon H n'est pas défini).
- Ce théorème permet de ramener la construction du barycentre de trois (ou plus) points à la construction du barycentre de deux points.
- Il est très utile pour démontrer que des droites sont concourantes.

Exemple 11.5. Construire G, barycentre de $\{(A\,;\,1)\,;\,(B\,;\,4)\,;\,(C\,;\,-3)\}$.
H barycentre de $\{(B\,;\,4)\,;\,(C\,;\,-3)\}$ existe car $4-3\neq 0$, donc G barycentre de $\{(A\,;\,1)\,;\,(H\,;\,4-3)\}=\{(A\,;\,1)\,;\,(H\,;\,1)\}$. G est donc le milieu de $[AH]$.
Il ne reste plus qu'à construire H puis le milieu de $[AH]$.

Exemple 11.6. Démontrons que le point G vérifiant $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ est bien le centre de gravité du triangle ABC. Soit I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ (voir schéma).



Par définition on a :
- G barycentre de $\{(A\,;\,1)\,;\,(B\,;\,1)\,;\,(C\,;\,1)\}$;
- I isobarycentre de B et C donc, par exemple, de $\{(B\,;\,1)\,;\,(C\,;\,1)\}$;
- J isobarycentre de A et C donc, par exemple, de $\{(A\,;\,1)\,;\,(C\,;\,1)\}$;
- K isobarycentre de A et B donc, par exemple, de $\{(A\,;\,1)\,;\,(B\,;\,1)\}$;

On a donc :
- G barycentre de $\{(A\,;\,1)\,;\,(I\,;\,2)\}$ donc $G\in(AI)$;
- G barycentre de $\{(B\,;\,1)\,;\,(J\,;\,2)\}$ donc $G\in(BJ)$;
- G barycentre de $\{(C\,;\,1)\,;\,(K\,;\,2)\}$ donc $G\in(CK)$;

Les trois droites (AI), (BJ) et (CK) sont donc concourantes en G.
Or ces droites sont les médianes du triangles ABC donc G est bien le centre de gravité du triangle ABC.

11.5 Centre d'inertie d'une plaque homogène

11.5.1 Généralités

Soit P une plaque, d'épaisseur négligeable. Le centre d'inertie I de la plaque est l'isobarycentre de tous les points de la plaque. (C'est donc un barycentre d'une infinité de points !).

C'est une notion mathématiquement difficile à définir. Cependant, il est souvent facile de construire le centre d'inertie d'une plaque grâce aux propriétés suivantes (admises à notre niveau) :

Cas simples

- Le centre d'inertie d'une tige est le milieu de cette tige.
- Le centre d'inertie d'un triangle est l'isobarycentre de ses trois sommets.

Attention ! Le centre d'inertie d'un quadrilatère $ABCD$ (ou d'un polygone de plus de 3 sommets) est, en général, différent de l'isobarycentre des sommets A, B, C et D !

Principes de symétrie

- Si la plaque admet un centre de symétrie, alors c'est son centre d'inertie.
- Si la plaque admet un axe de symétrie alors son centre d'inertie est sur cet axe.

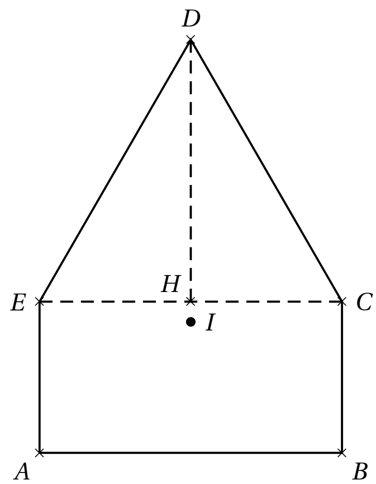
Principe de juxtaposition

Si une plaque P_1 d'aire a_1 a pour centre d'inertie I_1 et une plaque P_2 d'aire a_2 a pour centre d'inertie I_2 alors la plaque $P_1 \cup P_2$ admet pour centre d'inertie le barycentre I de (I_1, a_1) et (I_2, a_2).

Remarque. Comme les plaques sont homogènes, leurs aires a_1 et a_2 sont proportionnelles à leurs masses m_1 et m_2, on a donc aussi (d'après l'homogénéité des coefficients) : I barycentre de $\{(I_1\,;\,m_1)\,;\,(I_2\,;\,m_2)\}$

11.5.2 Exemple

On se propose de déterminer le centre d'inertie de la plaque homogène ci-dessous, constituée d'un rectangle $ABCE$ avec $AB = 4$ et $BC = 2$ et d'un triangle CDE équilatéral.



Le rectangle $ABCE$ a pour centre de symétrie, donc pour centre d'inertie, I_1, intersection de ses diagonales et pour aire $2 \times 4 = 8$.
Le triangle ACE a pour centre d'inertie son centre de gravité I_2, intersection des médianes. Son aire est $\frac{EC \times HD}{2} = 4\sqrt{3}$.
I, centre d'inerie de la plaque, est donc le barycentre de $\{(I_1\,;\,8)\,;\,(I_2\,;\,4\sqrt{3})\}$ ou encore de $\{(I_1\,;\,2)\,;\,(I_2\,;\,\sqrt{3})\}$.
Donc I est le point tel que $\overrightarrow{I_1 I} = \dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\overrightarrow{I_1 I_2}$ qu'il ne reste plus qu'à construire.

11.6 Exercices

Exercice 11.1.
$ABCD$ est un quadrilatère et G est le barycentre de $\{(A\,;\,1)\,;\,(B\,;\,1)\,;\,(C\,;\,3)\,;\,(D\,;\,3)\}$. Construire le point G. (Argumenter)

Exercice 11.2.
ABC est un triangle.

1. G est le barycentre de $\{(A\,;\,1)\,;\,(B\,;\,2)\,;\,(C\,;\,3)\}$. Construire le point G. (Argumenter)
2. G' est le barycentre de $\{(A\,;\,1)\,;\,(B\,;\,3)\,;\,(C\,;\,-3)\}$. Construire le point G'. (Argumenter)
3. Démontrer que (AG') est parallèle à (BC).

Exercice 11.3.
B est le milieu de $[AC]$. Démontrer que le barycentre de $\{(A\,;\,1)\,;\,(C\,;\,3)\}$ est confondu avec celui de $\{(B\,;\,2)\,;\,(C\,;\,2)\}$.

Exercice 11.4.
Dans le triangle ABC, E est le milieu de $[AB]$ et G est le barycentre de $\{(A\,;\,-2)\,;\,(B\,;\,-2)\,;\,(C\,;\,15)\}$. Démontrer que G, C et E sont alignés.

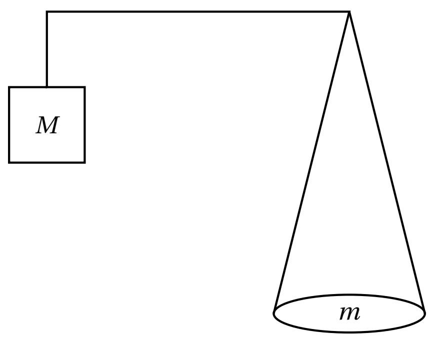
Exercice 11.5.
1. Placer dans un repère les points $A(1\,;\,2)$, $B(-3\,;\,4)$ et $C(-2\,;\,5)$.
2. Soit G le barycentre des points pondérés $\{(A\,;\,3)\,;\,(B\,;\,2)\,;\,(C\,;\,-4)\}$.
   (a) Quelles sont les coordonnées de G ? Placer G.
   (b) La droite (BG) passe-t-elle par l'origine du repère ? (Justifier)

Exercice 11.6.

Une balance est constituée d'une masse M et d'un plateau fixé aux extrémités d'une tige (voir schéma de la présente page). Pour peser une masse m, le vendeur place, à une position précise, un crochet sur la tige. Cette balance a l'avantage, pour le commerçant, de ne pas manipuler plusieurs masses.
On supposera que $M = 2$ kg.

1. Pour chacun des cas suivants, où faut-il fixer le crochet G sur le segment $[AB]$ pour réaliser l'équilibre ?
   - $m = 3$ kg
   - $m = 5$ kg
2. Le point G est tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Quelle est la masse m pesée ?



Exercice 11.7.

ABC est un triangle. On considère le barycentre A' de $\{(B\,;\,2)\,;\,(C\,;\,-3)\}$, le barycentre B' de $\{(A\,;\,5)\,;\,(C\,;\,-3)\}$ ainsi que le barycentre C' de $\{(A\,;\,5)\,;\,(B\,;\,2)\}$. Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.
Indication : on pourra considérer le barycentre G de $\{(A\,;\,5)\,;\,(B\,;\,2)\,;\,(C\,;\,-3)\}$.

Exercice 11.8.

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $BC = 8$ cm et $BA = 5$ cm. Soit I le milieu de $[BC]$.

1. Placer le point F tel que $\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{BA}$ et montrer que F est le barycentre des points A et B pondérés par des réels que l'on déterminera.
2. P étant un point du plan, réduire chacune des sommes suivantes :
   - $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{PC}$
   - $-\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB}$
   - $2\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PA}$
3. Déterminer et représenter l'ensemble des points M et N du plan vérifiant :
   - $\left\|\frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\|$;
   - $\left\|\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{NB} - 2\overrightarrow{NA}\right\|$.

Exercice 11.9.

Dans un repère $\left(\text{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, placer les points $A(2\,;\,1)$, $B(-1\,;\,5)$, $C(5\,;\,7)$ et $G\left(1\,;\,\frac{5}{2}\right)$

1. Déterminer les coordonnées de l'isobarycentre I des points B et C.
2. Déterminer les coordonnées du centre de gravité H du triangle ABC.
3. Existe-t-il un réel k tel que G soit barycentre de $\{(A\,;\,1)\,;\,(B\,;\,k)\}$? Justifier.

Exercice 11.10.

On considère un segment $[AB]$ de médiatrice d. Soient C et D points de d et G l'isobarycentre de A, B, C et D. Démontrer que $G \in d$.

Exercice 11.11.

$ABCDE$ est une pyramide à base carrée $BCDE$. Soit G l'isobarycentre de A, B, C, D et E. On note O le centre du carré $BCDE$ (c'est-à-dire l'intersection des diagonales (CE) et (BD))

1. Démontrer que O est l'isobarycentre de B, C, D, et E.
2. Démontrer que G est le barycentre de $\{(O\,;\,4)\,;\,(A\,;\,1)\}$.
3. Soit G_1 le centre de gravité du triangle ABE et I le milieu de $[CD]$. Démontrer que $G \in (G_1I)$.

(Pour cet exercice, une figure est recommandée)

Exercice 11.12.

$ABCD$ est un tétraèdre et G est le barycentre de $\{(A\,;\,4)\,;\,(B\,;\,1)\,;\,(C\,;\,1)\,;\,(D\,;\,1)\}$. On note H le centre de gravité du triangle BCD (c'est-à-dire H est l'isobarycentre de B, C et D).

1. Démontrer que G est le barycentre de $\{(H\,;\,3)\,;\,(A\,;\,4)\}$.
2. Situer le point G sur la droite (AH).

(Pour cet exercice, une figure est recommandée)

Exercice 11.13.

$ABCD$ est un carré.

1. Quel est l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan tels que $\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = AB$?
2. Représenter cet ensemble $\mathscr{E}$.

Exercice 11.14.
ABC est un triangle équilatéral de côté 4 cm. Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|$.

Exercice 11.15.
ABC est un triangle. I et G sont définis par : $\overrightarrow{AI}=-2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CG}=\frac{1}{5}\overrightarrow{CI}$.

1. Exprimer G comme barycentre des points A, B et C.
2. La droite (BG) coupe le segment $[AC]$ en un point J. Déterminer la position de J sur $[AC]$.
3. Déterminer et tracer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M du plan tels que $\left\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MI}\right\|$.

Exercice 11.16.
ABC est un triangle, I est milieu de $[AB]$. J et L sont définis par $\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AL}=3\overrightarrow{AC}$.
La droite parallèle à (AC) menée par J coupe la droite (BC) en K.

1. Exprimer :
   - I comme barycentre de A et B ;
   - L comme barycentre des points A et C ;
   - K comme barycentre de B et C.
2. Démontrer que les points I, K et L sont alignés et préciser la position de ces points.

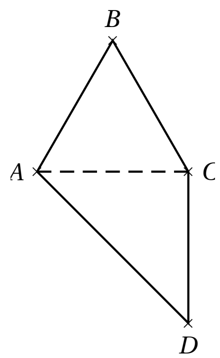
Exercice 11.17.
Soit A, B et C trois points non alignés. Soit D le barycentre de $\{(B\,;\,1)\,;\,(C\,;\,2)\}$, E le barycentre de $\{(C\,;\,4)\,;\,(A\,;\,1)\}$, F le barycentre de $\{(B\,;\,2)\,;\,(A\,;\,1)\}$ et G le barycentre de $\{(A\,;\,1)\,;\,(B,2)\,;\,(C,4)\}$.

1. Construire les points D, E et F.
2. Démontrer que les droites (AD), (BE) et (CF) sont concourantes en G.
3. Déterminer l'ensemble Θ des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|$.

Exercice 11.18.
$ABCD$ est un tétraèdre. I est le milieu de $[AB]$, J est le milieu de $[AC]$. E et F sont les points tels que $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{DE}$.

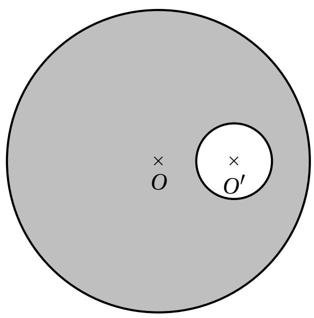
1. Montrer que E est barycentre de $\{(B\,;\,-1)\,;\,(C\,;\,3)\}$.
2. Montrer que F est barycentre de $\{(A\,;\,1)\,;\,(D\,;\,-1)\,;\,(E\,;\,1)\}$.
3. En déduire que F est barycentre de $\{(A\,;\,2)\,;\,(D\,;\,-2)\,;\,(B,-1)\,;\,(C,3)\}$.
4. En déduire que F est barycentre de $\{(I\,;\,-2)\,;\,(J,6)\,;\,(D,-2)\}$.
   Que peut-on en conclure pour les points I, J, D et F ?

Exercice 11.19.
Une plaque homogène P d'épaisseur négligeable est un quadrilatère $ABCD$ tel que ABC est équilatéral et de côté 1 m et ACD est rectangle et isocèle en C.



1. Déterminer I_1 le centre d'inertie de ABC.
2. Déterminer I_2 le centre d'inertie de ACD.
3. Déterminer I le centre d'inertie de P.
4. Déterminer G l'isobarycentre de A, B, C et D.
5. Que constate-t-on ?

Exercice 11.20.
Une plaque homogène P d'épaisseur négligeable est constituée d'un disque D, de centre O et rayon 2 m duquel on a enlevé un disque d de centre O' et de rayon 50 cm avec O' situé à la moitié d'un rayon de D.



Déterminer la position du centre d'inertie de cette plaque.

Devoir surveillé n°7

Fonction dérivée – Barycentres

EXERCICE 1 *8 points*

L'objectif du problème est d'étudier la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{4}{x} + 2x^2$ et d'employer cette étude pour résoudre un problème d'extremum.

1. (a) Déterminer f' la dérivée de f.

   (b) Montrer que $f'(x) = \dfrac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$.

   (c) Étudier le signe de $x^2 + x + 1$ puis celui de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

   (d) En déduire le tableau de variations de f.

2. On construit un réservoir fermé en tôle, ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de hauteur h et dont la base est un carré de côté x (l'unité de longueur est le mètre).

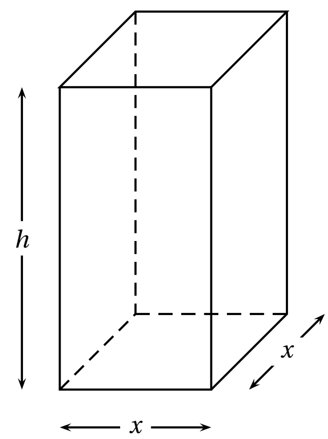
   (a) Exprimer l'aire $\mathscr{S}$ de la tôle utilisée et le volume $\mathscr{V}$ du réservoir en fonction de x et de h.

   (b) On suppose que la capacité du réservoir est de 1 m^3.

      i. Exprimer la hauteur h en fonction de x.

      ii. En déduire l'expression de $\mathscr{S}$ en fonction de x.

      iii. À l'aide de la première partie, déterminer x tel que l'aire $\mathscr{S}$ soit minimum.
      Donner alors les dimensions du réservoir.



EXERCICE 2 *5 points*

Soient A, B et C trois points non alignés du plan (voir la figure 11.4 page suivante).
I, J et K sont les points tels que $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BC}$.

1. Construire I, J et K.
2. Montrer que :

   (a) I est le barycentre de $\{(A;1);(B;-2)\}$;

   (b) J est le barycentre de $\{(A;1);(C;4)\}$.

   (c) K est le barycentre de $\{(B;1);(C;-2)\}$.
3. Montrer que les droites (BJ), (CI) et (AK) sont concourantes.
   On pourra introduire le point G barycentre de A, B et C avec des coefficients bien choisis.
4. Déterminer puis tracer l'ensemble Γ des points M du plan vérifiant : $\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\|$.

EXERCICE 3 *4 points*

ABC est un triangle (voir la figure 11.5 page suivante).
I est le barycentre de $\{(A;2);(C;1)\}$, J le barycentre de $\{(A;1);(B;2)\}$, K le barycentre de $\{(C;1);(B;-4)\}$.

1. Construire I, J et K.
2. Montrer que B est le barycentre de $\{(K;3);(C;1)\}$.
3. Quel est le barycentre de $\{(A;2);(K;3);(C;1)\}$?
   En déduire la position de J par rapport à I et K.

EXERCICE 4 *3 points*

Une plaque homogène $ABCDE$ est constituée d'un carré $ABDE$ de côté 6 cm et d'un triangle équilatéral BCD (voir figure 11.6 page suivante). Déterminer et construire G, le centre de gravité de la plaque.

FIG. 11.4 – Figure de l'exercice 2

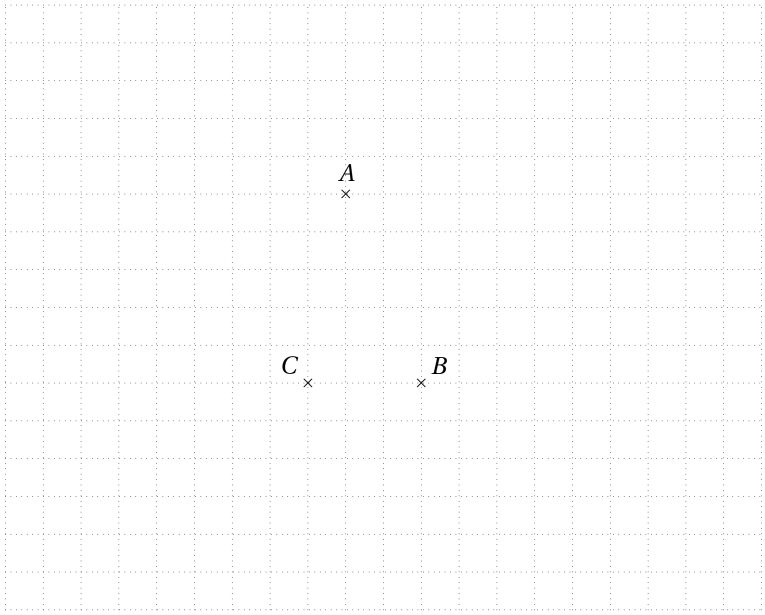


FIG. 11.5 – Figure de l'exercice 3

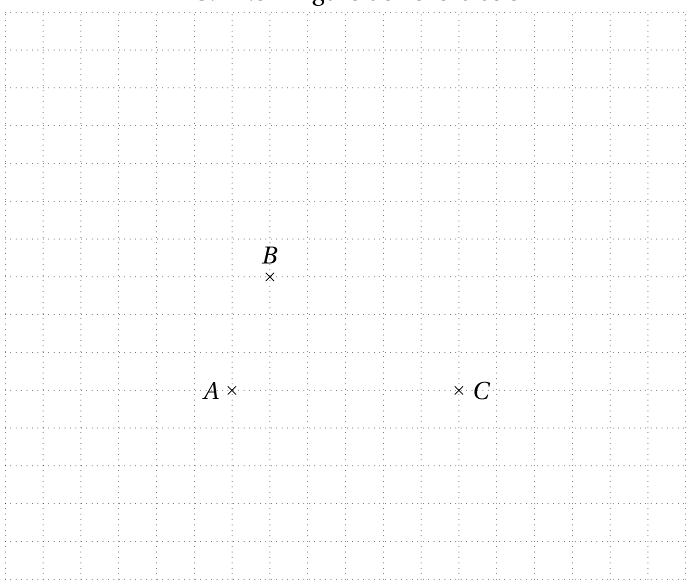
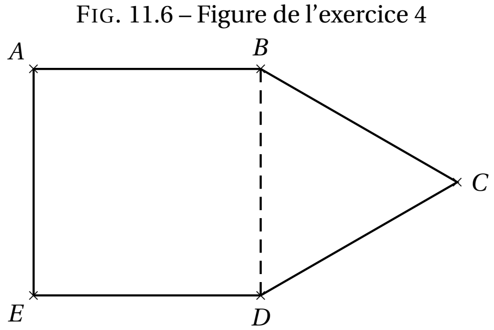


FIG. 11.6 – Figure de l'exercice 4



Devoir surveillé n°7 (bis)

Fonction dérivée – Barycentres

EXERCICE 1 *8 points*

L'objectif du problème est d'étudier la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{4}{x} + 2x^2$ et d'employer cette étude pour résoudre un problème d'extremum.

1. (a) Déterminer f' la dérivée de f.

   (b) Montrer que $f'(x) = \dfrac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$.

   (c) Étudier le signe de x^2+x+1 puis celui de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

   (d) En déduire le tableau de variations de f.

2. On construit un réservoir fermé en tôle, ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de hauteur h et dont la base est un carré de côté x (l'unité de longueur est le mètre).

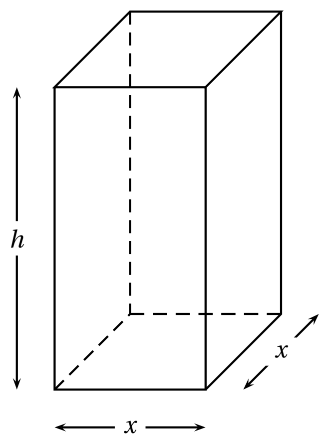
   (a) Exprimer l'aire $\mathscr{S}$ de la tôle utilisée et le volume $\mathscr{V}$ du réservoir en fonction de x et de h.

   (b) On suppose que la capacité du réservoir est de 1 m^3.

      i. Exprimer la hauteur h en fonction de x.

      ii. En déduire l'expression de $\mathscr{S}$ en fonction de x.

      iii. À l'aide de la première partie, déterminer x tel que l'aire $\mathscr{S}$ soit minimum.
      Donner alors les dimensions du réservoir.



EXERCICE 2 *5 points*

$ABCD$ est un carré tel que $AB = 5$ cm. I est le milieu de $[BC]$.
On appelle :

- G le barycentre de $\{(A\,;-2)\,;(B\,;1)\}$;
- H le barycentre de $\{(A\,;2)\,;(B\,;-1)\,;(C\,;1)\}$;
- J le barycentre de $\{(H\,;2)\,;(G\,;1)\}$;
- K le barycentre de $\{(H\,;2)\,;(G\,;-1)\}$.

1. Montrer que A est le milieu du segment $[BG]$ et que H est le milieu de $[GK]$.
2. Montrer, à l'aide des barycentres, que $K = C$.
3. (a) Sachant que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et à l'aide de la relation de CHASLES, exprimer D comme barycentre de A, de B et de C.

   (b) En déduire que H est le milieu du segment $[AD]$.
4. (a) Faire un schéma et construire G, H, I, J et K.

   (b) Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M du plan vérifiant :

$$\mathscr{E} : \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right\|$$

EXERCICE 3 *4 points*

ABC est un triangle du plan tel que $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm et $AC = 7$ cm et I, J et K sont les points tels que :

- $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$;
- $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$;
- $\overrightarrow{AK} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$.

1. Faire un schéma et construire I, J et K.
2. Exprimer :
   - I comme barycentre de A et B ;
   - J comme barycentre de C et B ;
   - K comme barycentre de C et A.
3. Soit H, barycentre de $\{(A;3);(B;2);(C;4)\}$.
   Montrer que les droites (AJ), (BK) et (CI) sont concourantes en H.

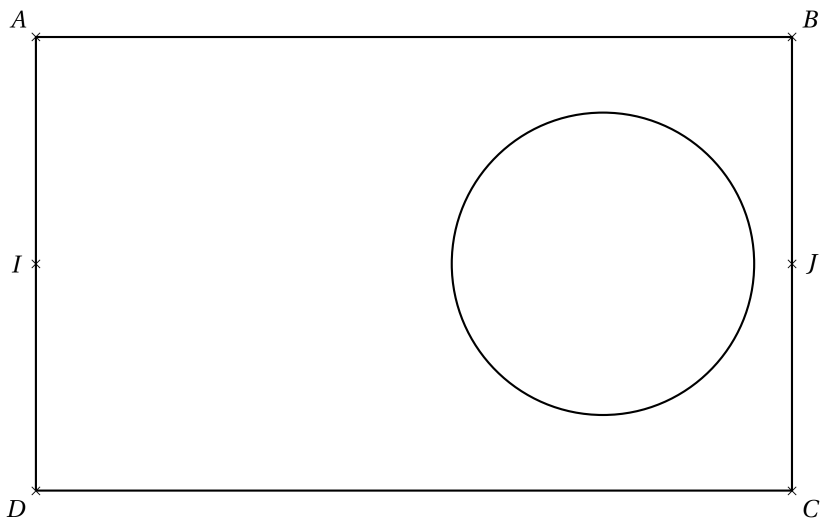
EXERCICE 4 *3 points*

Les mesures sont en mètre.

Une plaque homogène $ABCD$ est constituée d'un rectangle, de dimension 6×10. On appelle I et J les milieux respectifs des côtés $[AD]$ et $[BC]$ et K le point tel que $\overrightarrow{IK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IJ}$.

On enlève de la plaque un disque centré en K et de rayon 2 (voir figure 11.7 de la présente page). Déterminer et construire G, le centre de gravité de la plaque percée.

FIG. 11.7 – Figure de l'exercice 4



Chapitre 12

Comportement asymptotique

Sommaire

12.1 Activités

Activité 12.1.

Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$ et h, définie sur $[0\,;+\infty[$, par $h(x) = \sqrt{x}$.

1. Calculer les images de 10, 10^2, 10^6 et 10^{10} par chacune de ces fonctions.
   Comment semblent-elles se comporter quand x devient grand ?
2. Résoudre sur $[0\,;+\infty[$:
   - $f(x) > 10^{12}$
   - $f(x) > 10^{24}$
   - $f(x) > M$ où M est un réel quelconque (qu'on peut imaginer très grand).
3. Faire de même pour g et h.

Finalement, on peut rendre $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ aussi .... que l'on veut : il suffit de prendre x suffisamment ....

> On dira que leur limite, quand x tend vers $+\infty$, est $+\infty$ et on écrira : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Activité 12.2.

L'objectif de cette activité est d'observer, graphiquement, le comportement de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{-2x-1}{x+2}$ aux bornes de son domaine de définition et d'essayer de « mathématiser » cette observation. On appellera $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

Partie A

1. Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.
2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

Partie B

1. Représenter $\mathscr{C}$ sur une calculatrice graphique en faisant varier les paramètres de la fenêtre de la façon suivante : $y \in [-4\,;\,4]$ et
   (a) $x \in [-10\,;\,10]$; (b) $x \in [-100\,;\,100]$; (c) $x \in [-10\,000\,;\,10\,000]$.

   Comment semble se comporter $\mathscr{C}$ quand x devient très grand en valeur absolue ?
2. Justifier que dire que « $\mathscr{C}$ se rapproche de la droite d'équation $y = 2$ quand x devient très grand » équivaut à dire que « la quantité $f(x) - 2$ devient proche de zéro quand x devient grand ».
3. Résoudre, pour $x \in]2\,;\,+\infty[$:
   (a) $f(x) - 2 < 10^{-2}$? (b) $f(x) - 2 < 10^{-6}$?

   (c) $f(x) - 2 < \epsilon$, où ϵ est un réel strictement positif quelconque (qu'on peut imaginer très proche de 0).

Finalement, on peut rendre $f(x)$ aussi .... : il suffit de prendre x suffisamment ....

On dira que :
- la limite de f, quand x tend vers $+\infty$, est 2 et on écrira : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$;
- la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote (horizontale) à la courbe $\mathscr{C}$ en l'infini.

Partie C

1. Représenter $\mathscr{C}$ sur une calculatrice graphique en faisant varier les paramètres de la fenêtre de la façon suivante : $x \in [-4\,;\,4]$ et
   (a) $y \in [-10\,;\,10]$; (b) $y \in [-100\,;\,100]$;

   Comment se comporte $\mathscr{C}$ quand x devient très proche de -2 ?
2. Justifier que dire que « $\mathscr{C}$ se rapproche de la droite d'équation $x = -2$ » équivaut à dire que « la quantité $f(x)$ tend vers l'infini quand x proche de -2 ».
3. Pour quelles valeurs de x a-t-on :
   (a) $f(x) > 10^4$? (b) $f(x) > 10^6$?

   (c) $f(x) > M$, où M est un réel quelconque ?

Finalement, on peut rendre $f(x)$ aussi .... que l'on veut : il suffit de prendre x suffisamment ....

On dira que
- la limite de f, quand x tend vers -2 et que $x > -2$, est $+\infty$ et on écrira : $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty$;
- la droite d'équation $x = -2$ est une asymptote (verticale) à la courbe $\mathscr{C}$.

Activité 12.3.

L'objectif de cette activité est d'observer, graphiquement, le comportement de la fonction définie sur $D_f =]-\infty\,;\,2[\cup]2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2-3x+4}{x-2}$ quand x devient grand et d'essayer de « mathématiser » cette observation. On appellera $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2. Déterminer $f(10)$, $f\left(10^4\right)$ et $f\left(10^6\right)$.

   Comment semble se comporter f quand x devient grand ?
3. (a) Représenter $\mathscr{C}$ sur une calculatrice graphique en faisant varier les paramètres de la fenêtre de la façon suivante :

i. $x \in [-10; 10]$ et $y \in [-10; 10]$; ii. $x \in [-100; 100]$ et $y \in [-100; 100]$;

(b) Comment semble se comporter $\mathscr{C}$ quand x devient très grand en valeur absolue ?

(c) De quelle fonction simple g semble se rapprocher la fonction f quand x devient grand ?

4. Déterminer, par le calcul, les réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$.
   Que constate-t-on ?
5. Justifier que dire que « $\mathscr{C}$ se rapproche de la droite d'équation $y = x - 1$ quand x devient très grand » équivaut à dire que « la quantité $f(x) - (x-1)$ devient proche de zéro quand x devient grand ».

Finalement, on admettra qu'on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de $x - 1$: il suffit de prendre x suffisamment ....

On dira que
- la limite de f, quand x tend $+\infty$, est $+\infty$ et on écrira : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;
- et, comme $\lim\limits_{x\to\infty} \big(f(x) - (x-1)\big) = 0$, on dira que la droite d'équation $y = x - 1$ est une asymptote (oblique) à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

12.2 Limite d'une fonction

12.2.1 En l'infini

Définition 12.1. Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle du type $[a; +\infty[$.
Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes en valeur absolue et positives, on dit aussi « lorsque x tend vers $+\infty$ », si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus :
- grands en valeur absolue et positifs (tendent vers $+\infty$), on dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;
- grands en valeur absolue et négatifs (tendent vers $-\infty$), on dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$;
- proches d'un réel l (tendent vers l), on dit que f a pour limite l en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

Remarque. Ces définitions sont, conformément au programme, très intuitives. Il en existe de plus rigoureuses, mais elles ne sont pas exigibles :
- Si pour tout réel M positif, il existe un réel A tel que, si $x \geq A$ alors $f(x) \geq M$, alors on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;
- Si pour tout réel M négatif, il existe un réel A tel que, si $x \geq A$ alors $f(x) \leq M$, alors on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$;
- Si pour tout réel ϵ strictement positif, il existe un réel A tel que, si $x \geq A$ alors $|f(x) - l| < \epsilon$, alors on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

Remarque. On utilisera parfois dans la suite les termes de « limite infinie » quand la limite d'une fonction est $+\infty$ ou $-\infty$ et de « limite finie » quand la limite d'une fonction est un nombre l.

On a des définitions correspondantes en $-\infty$:

Définition 12.2. Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle du type $]-\infty; a]$.
Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes en valeur absolue et négatives, on dit aussi « lorsque x tend vers $-\infty$, si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus :
- grands en valeur absolue et positifs (tendent vers $+\infty$), on dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$;
- grands en valeur absolue et négatifs (tendent vers $-\infty$), on dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$;
- proches d'un réel l (tendent vers l), on dit que f a pour limite l en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$.

Exemples 12.1. La figure 12.1 page suivante présente quatre exemples où le lien entre la limite de la fonction et l'allure de la courbe est souligné, sur la courbe, par une flèche :

Exemple 12.2. Certaines fonctions n'ont pas de limite en l'infini. C'est le cas, par exemple, de la fonction $\sin x$:

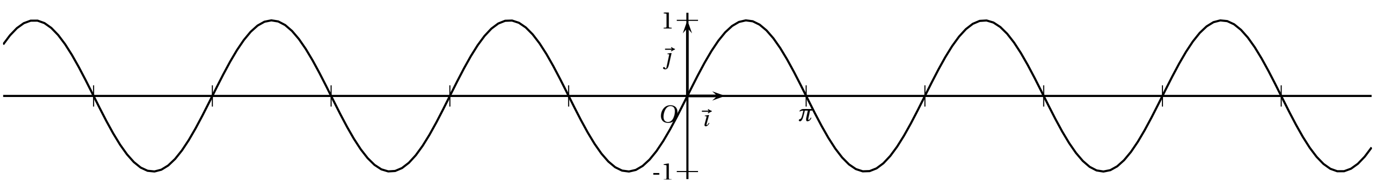
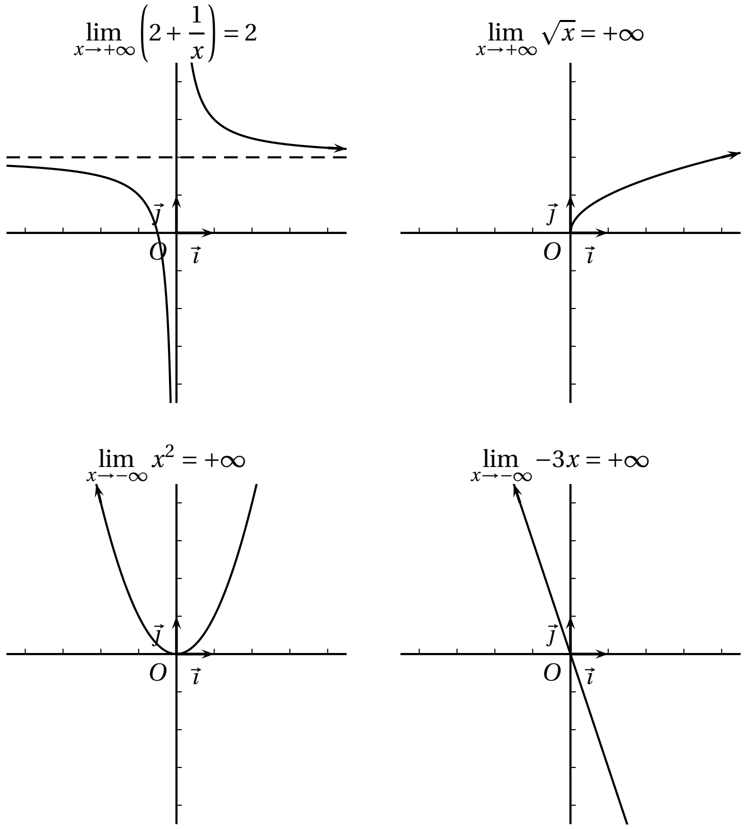


FIG. 12.1 – Quatre exemples de limites

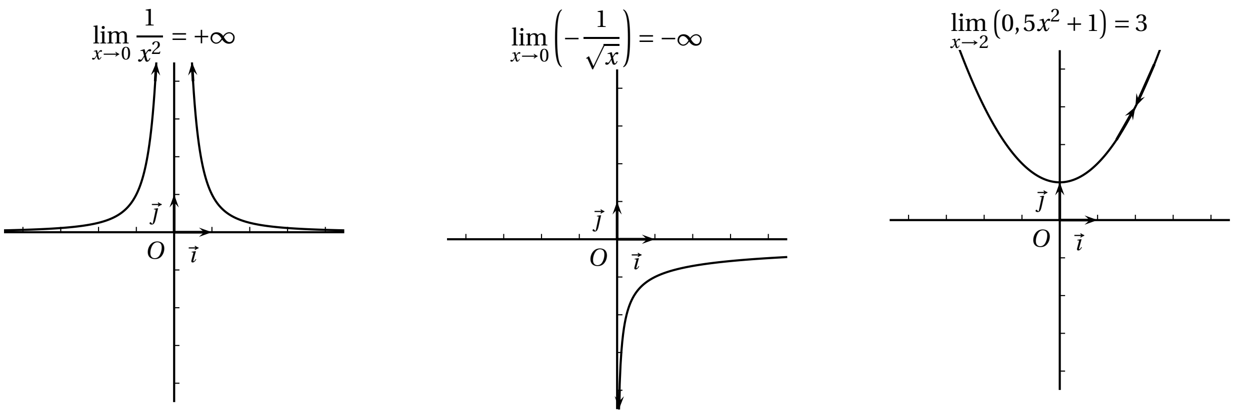


12.2.2 En un réel a

Définition 12.3. Soit f une fonction définie sur un domaine D contenant a ou tel que a soit une borne de D.
Lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a, on dit aussi « lorsque x tend vers a », si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus :

- grands en valeur absolue et positifs (tendent vers $+\infty$), on dit que f a pour limite $+\infty$ en a et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$;
- grands en valeur absolue et négatifs (tendent vers $-\infty$), on dit que f a pour limite $-\infty$ en a et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$;
- proches d'un réel l (tendent vers l), on dit que f a pour limite l en a et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

Exemples 12.3. Trois exemples où le lien entre la limite de la fonction et l'allure de la courbe est souligné, sur la courbe, par une flèche :



En un réel a, à droite ou à gauche

Certaines fonctions n'ont pas de limite en un réel a, au sens de la définition précédente.

C'est le cas de la fonction inverse.

Lorsque x tend vers 0, les nombres $\frac{1}{x}$ tendent vers $+\infty$ quand x est positif, et vers $-\infty$ quand x est négatif.

On parle alors de « limite à droite de 0 » et de « limite à gauche de 0 » (les x positifs et les x négatifs étant situés en général respectivement à droite de 0 et à gauche de 0 sur l'axe des abscisses).

On dit aussi que la limite de la fonction inverse en 0^+ (quand x tend vers 0 et est positif) est $+\infty$ et que la limite de la fonction inverse en 0^- (quand x tend vers 0 et est négatif) est $-\infty$.

On notera alors indifféremment : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Par abus de langage, on écrira « $x \to a^+$ » pour dire « x tend vers a et $x > a$ » et « $x \to a^-$ » pour dire « x tend vers a et $x < a$ », même si, lorsque $a \neq 0$, $x \to a^+$ ou $x \to a^-$ n'est pas du tout lié au signe de x.

Ainsi : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1}$ sont les limites respectivement à droite et à gauche de 1 (et valent respectivement $+\infty$ et $-\infty$) et dans les deux cas x tend vers 1 et est positif.

Finalement, ce n'est que lorsque la limite à droite et à gauche de a sont égales qu'on dit que f admet une limite en a, comme par exemple la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en 0. Lorsque les limites à gauche et à droite sont différentes, la fonction n'a pas de limite en a.

Ainsi, comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$, on peut écrire $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \neq \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$, la fonction inverse n'a pas de limite en 0.

12.3 Limite des fonctions usuelles

Propriété 12.1. *Soit f une des fonctions usuelles (affine, carré, cube, inverse, racine carrée, sinus et cosinus) et D_f leurs ensembles de définition respectifs.*

- *Si $a \in D_f$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$*
- *Sinon, aux bornes de leur ensemble de définition, les fonctions usuelles ont les limites résumées dans le tableau ci-dessous :*

f	D_f	*Limites*
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	*Si* $m > 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} (mx+p) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} (mx+p) = -\infty$ *Si* $m < 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} (mx+p) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} (mx+p) = +\infty$ *Si* $m = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} (mx+p) = \lim\limits_{x\to-\infty} (mx+p) = p$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$
$\sin x$ *et* $\cos x$	$\mathbb{R}$	*Pas de limite en* $+\infty$ *ou en* $-\infty$

Les définitions rigoureuses des limites étant hors programme, les démonstrations de ces propriétés et des suivantes le sont aussi, mais les activités montrent comment elles peuvent se faire.

Remarques.
- Les fonctions constantes ($f(x) = k$) et linéaires ($f(x) = kx$) sont aussi des fonctions usuelles mais sont considérées comme des cas particuliers des fonctions affines $f(x) = mx + p$ avec, respectivement, $m = 0$ et $p = 0$.
- $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 4$ a les mêmes limites que $f(x) = x^2$ si n est pair et que $f(x) = x^3$ si n est impair (on l'admettra).
- $f(x) = \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 4$ a les mêmes limites que $f(x) = \frac{1}{x}$ si n est impair et que $f(x) = \frac{1}{x^2}$ si n est pair (on l'admettra).

12.4 Opérations sur les limites

Dans les paragraphes suivants, nous parlerons parfois de « forme indéterminée », notée F.I. Cela ne veut pas forcément dire qu'il n'y a pas de limite, mais que la règle énoncée ne permet pas de conclure dans le cas général, qu'il faut étudier chaque cas particulier.

12.4.1 Règle essentielle

On admettra que les sommes, les produits, les inverses, les quotients ou les composées des fonctions usuelles qui nous étudierons en première vérifient tous :

Si $a \in D_f$, où D_f est l'ensemble de définition de f, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Dans les autres cas, aux bornes de leur ensemble de définition, on appliquera les propriétés des paragraphes suivants.

12.4.2 Limite d'une somme

Propriété 12.2. *On note α ce vers quoi tend x, α pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.*
Soit f et g deux fonctions ayant en α une limite finie ou infinie.
La fonction somme $f+g$ admet une limite dans chacun des cas résumés par le tableau ci-dessous :

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \\ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$
l	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

On l'admettra.

Exemples 12.4.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+\dfrac{1}{x}-1\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x-1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(-x+\dfrac{1}{x}-1\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(-x-1) = -0-1 = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x-1\right)$ est une forme indéterminée car $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1) = -\infty$. Nous verrons plus tard comment « lever l'indétermination ».

12.4.3 Limite d'un produit

Propriété 12.3. *On note α ce vers quoi tend x, α pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.*
Soit f et g deux fonctions ayant en α une limite finie ou infinie.
La fonction produit $f\times g$ admet une limite dans chacun des cas résumés par le tableau ci-dessous :

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \\ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$l'\neq0$	$l'=0$	$\pm\infty$
$l\neq0$	$l\times l'$	0	$\pm\infty$
$l=0$	0	0	F.I.
$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.	$\pm\infty$

On l'admettra.

Remarque. Le signe, lorsque la limite du produit est $\pm\infty$, est donné par la règle des signes des produits.

Exemples 12.5.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-5x^2\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(-5) = -5$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(\dfrac{1}{x}-1\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}-1\right) = -1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3 = -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}\left(x^2+x\right)$ est indéterminée car $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(x^2+x\right) = 0+0 = 0$. Nous verrons plus tard comment « lever l'indétermination ».

12.4.4 Limite de l'inverse

Propriété 12.4. *On note α ce vers quoi tend x, α pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.*
Soit f une fonction ayant en α une limite finie ou infinie.
La fonction $\dfrac{1}{f}$ admet une limite dans chacun des cas résumés par le tableau ci-dessous :

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$l \neq 0$	$l = 0^+$	$l = 0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{f(x)}$	$\dfrac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0 *(0^+)*	0 *(0^-)*

On l'admettra.

Exemples 12.6.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et $x^2 > 0$ quand $x \in \mathbb{R}^*$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x^2+x+2} = \dfrac{1}{4}$ car $\lim\limits_{x\to 1} \left(x^2+x+2\right) = 4$

12.4.5 Limite d'un quotient

Propriété 12.5. *On note α ce vers quoi tend x, α pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.*
Soit f et g deux fonctions ayant en α une limite finie ou infinie.
La fonction quotient $\dfrac{f}{g}$ admet une limite dans chacun des cas résumés par le tableau ci-dessous :

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \\ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$l' \neq 0$	$l' = 0$	$\pm\infty$
$l \neq 0$	$\dfrac{l}{l'}$	$\pm\infty$	*0*
$l = 0$	*0*	*F.I.*	*0*
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	*F.I.*

Remarque. Le signe, lorsque la limite du quotient est $\pm\infty$, est donné par la règle des signes des produits (qui est aussi la règle des signes des quotients).

Preuve. $\dfrac{f}{g} = f \times \dfrac{1}{g}$ or, d'après les limites de l'inverse,
- si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = l' \neq 0$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{l'}$;
- si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{g(x)} = \pm\infty$;
- si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \pm\infty$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{g(x)} = 0$.

En appliquant les propriétés des limites d'un produit, on obtient :

$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$l' \neq 0$	$l' = 0$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \\ $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{g(x)}$	$\dfrac{1}{l'}$ $(\neq 0)$	$\pm\infty$	0
$l \neq 0$	$l \times \dfrac{1}{l'} = \dfrac{l}{l'}$	$\pm\infty$	0
$l = 0$	0	F.I.	0
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.

$\diamondsuit$

Exemple 12.7.
1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3}{2x^2+3} = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} -3 = -3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^2+3) = +\infty$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\cos x}{x^2-2x} = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x^2-2x) = 0$ et $x^2-2x = x(x-2) < 0$ (négatif entre les racines 0 et 2)

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-x}{x^3+x-1}$ est une forme indéterminée car $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2-x\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3+x-1\right)=+\infty$

12.4.6 Cas des formes indéterminées

Finalement, il y a quatre cas d'indétermination qui sont, **en utilisant un abus d'écriture qui ne vous sera pas autorisé sur vos copies** :

$$\text{« } \frac{0}{0} \text{ »} \qquad \text{« } 0\times\infty \text{ »} \qquad \text{« } \frac{\infty}{\infty} \text{ »} \qquad \text{« } \infty-\infty \text{ »}$$

Pour lever l'indétermination, on peut tenter transformer l'expression (par exemple développer s'il s'agit d'un produit). Si cela ne donne rien, il est toujours possible de mettre en facteur le terme de plus haut degré (les termes quand il s'agit d'un quotient) : cela résoud la plupart des problèmes.

Quelques exemples

1. Nous avons vu que $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2+x-1\right)$ était une forme indéterminée.

   Comme $x\to-\infty$, on peut considérer que $x\neq 0$, et donc écrire, en factorisant le terme de plus haut degré :

$$x^2+x-1=x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$$

   or, comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n}=0$, on a :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=1+0+0=1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+x-1\right)=+\infty$$

2. Nous avons vu que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x}\left(x^2+x\right)$ est une forme indéterminée.

   Avec $x>0$, donc $x\neq 0$, on peut écrire, en développant : $\dfrac{1}{x}\left(x^2+x\right)=x+1$

   or $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} (x+1)=0+1=1$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x}\left(x^2+x\right)=1$

3. Nous avons vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-x}{x^3+x-1}$ est une forme indéterminée.
   Comme $x\to+\infty$ on peut considérer que $x\neq 0$ et, en factorisant le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur, on obtient :

$$\frac{x^2-x}{x^3+x-1}=\frac{x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)}=\frac{1-\dfrac{1}{x}}{x\left(1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)}$$

   or, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n}=0$, on a :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=1-0=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)=1+0-0=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\dfrac{1}{x}}{x\left(1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{x^3+x-1}=0$$

4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$ est une forme indéterminée car $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x^2}=+\infty$.
   En réduisant au même dénominateur, on obtient : $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$
   or

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(x-1)=0-1=-1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^2=0 \text{ et } x^2>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{x-1}{x^2}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$$

12.4.7 Fonctions polynôme et rationelle

On peut procèder de la même manière qu'aux exemples 1 et 3 du paragraphe précédent pour toute fonction polynôme ou rationelle et démontrer ainsi les propriétés suivantes :

Propriété 12.6. *Soit f une fonction polynôme de degré n :*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \text{ avec } a_n \neq 0$$

Alors :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} a_n x^n = \pm\infty$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} a_n x^n = \pm\infty$.

qui s'énonce aussi de la façon suivante :

« La limite en l'infini d'une fonction polynôme est celle de son terme de plus haut degré. »

Propriété 12.7. *Soit f une fonction rationelle :*

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$. Alors :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$.

Le détail de ces deux démonstrations est laissé en exercice au lecteur.

12.4.8 Règles d'encadrement

On admettra les théorèmes suivants :

Théorème 12.8. *Soient f et g deux fonctions définies au moins sur $[a ; +\infty[$.*
Si on a :

- *pour tout x assez grand, $f(x) \geq g(x)$;*
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Théorème 12.9. *Soient f et g deux fonctions définies au moins sur $[a ; +\infty[$.*
Si on a :

- *pour tout x assez grand, $f(x) \leq g(x)$;*
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Théorème 12.10 (des gendarmes)**.** *Soient f, u et v, trois fonctions définies au moins sur $[a ; +\infty[$.*
Si on a :

- *pour tout x assez grand, $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$;*
- $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = l$

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$

Ces théorèmes ont leurs équivalents quand x tend vers $-\infty$.

12.5 Asymptotes

Définition 12.4. On appelle courbe asymptote une courbe simple (droite, cercle, etc.) dont une courbe plus complexe peut s'approcher.

Nous ne parlerons au lycée que de droite asymptote, en omettant le plus souvent de préciser même le terme de droite. Une asymptote sera donc une droite dont la courbe représentative d'une fonction s'approche (sans forcément l'atteindre). Nous avons vu dans les activités les trois types d'asymptote.

12.5.1 Asymptote verticale

Elle traduit, graphiquement, le fait que la fonction f admet une limite infinie en un réel a.
On a alors :

Définition 12.5. Si f une fonction admet une limite infinie à gauche ou à droite de a, réel, on dit alors que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote (verticale) à la courbe de f.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = \infty \text{ ou}\\ \lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = \infty\end{array}\right. \Leftrightarrow x = a \text{ asymptote à } \mathscr{C}$$

Remarque. Il suffit qu'on ait soit une limite à droite, soit une limite à gauche qui vaut $\pm\infty$ pour avoir une asymptote verticale.

12.5.2 Asymptote horizontale

Elle traduit, graphiquement, le fait que la fonction f admet une limite finie en l'infini.
On a alors :

Définition 12.6. Si f une fonction admet une limite finie b en l'infini, on dit alors que la droite d'équation $y = b$ est une asymptote (horizontale) à la courbe de f en l'infini.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \Leftrightarrow y = b \text{ asymptote à } \mathscr{C} \text{ en l'infini}$$

Remarque. Une courbe peut avoir une asymptote en $+\infty$ sans en avoir pour autant en $-\infty$: il faut faire l'étude aux deux bornes.

12.5.3 Asymptote oblique

Elle traduit, graphiquement, le fait que la fonction f se comporte de plus en plus comme une fonction affine.
On a alors :

Définition 12.7. Soit f une fonction. S'il existe une fonction affine $g(x) = mx + p$ telle que la fonction $f - g$ admet comme limite 0 en l'infini, on dit alors que la droite d'équation $y = mx + p$ est une asymptote (oblique) à la courbe de f en l'infini.

$$\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - (mx + p)\big) = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{l} y = mx + p \text{ asymptote à}\\ \mathscr{C} \text{ en l'infini}\end{array}$$

Remarque. Même remarque que ci-dessus.

12.6 Exercices et problèmes

12.6.1 Exercices

Technique

Exercice 12.1.
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1 - \frac{1}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\frac{1}{2}x^3\right)$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(x\sqrt{x}\right)$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(\frac{-6}{x^2}\right)$

Exercice 12.2.
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} + 2x + 3\right)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3\sqrt{x} + x^2\right)$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{-5}{x} + x^2\right)$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(\frac{1}{x} + 3x^2 - 2\right)$
5. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\x>2}} \left(\frac{3}{x-2} + 5x + 7\right)$
6. $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\x<-2}} \left(\frac{2}{x+2} + \frac{1}{2}\right)$

Exercice 12.3.
Déterminer les limites des fonctions polynômes suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+x\right)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+x\right)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4-2x^3+5x+4\right)$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^4-2x^3+5x+4\right)$

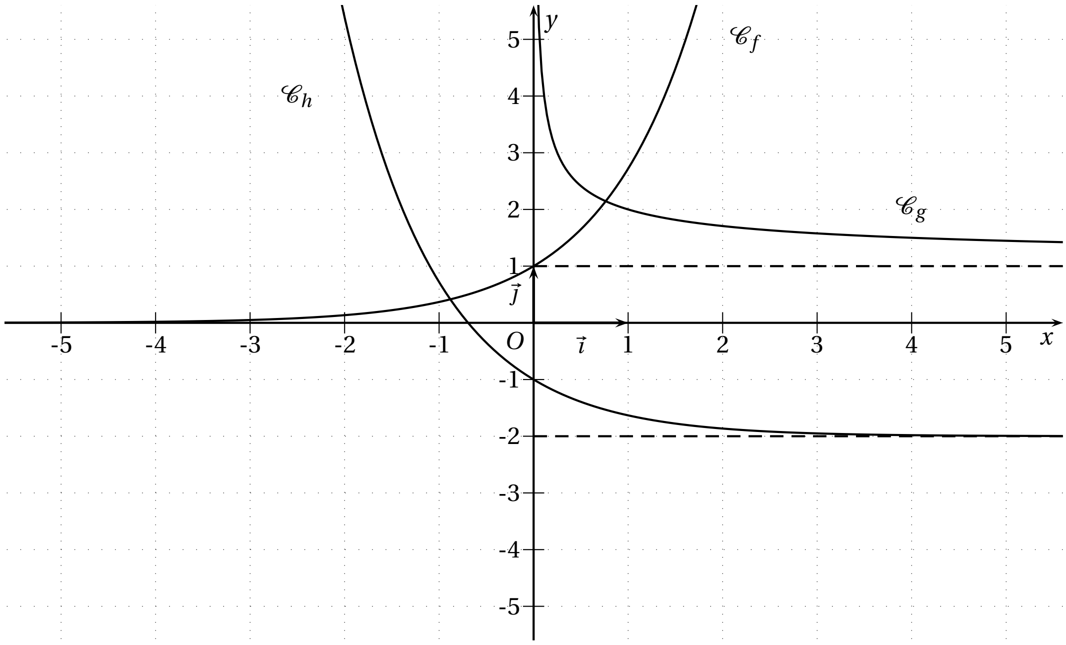
Lectures graphiques

Exercice 12.4.

On donne sur la figure ci-dessous les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ de trois fonctions f, g et h.

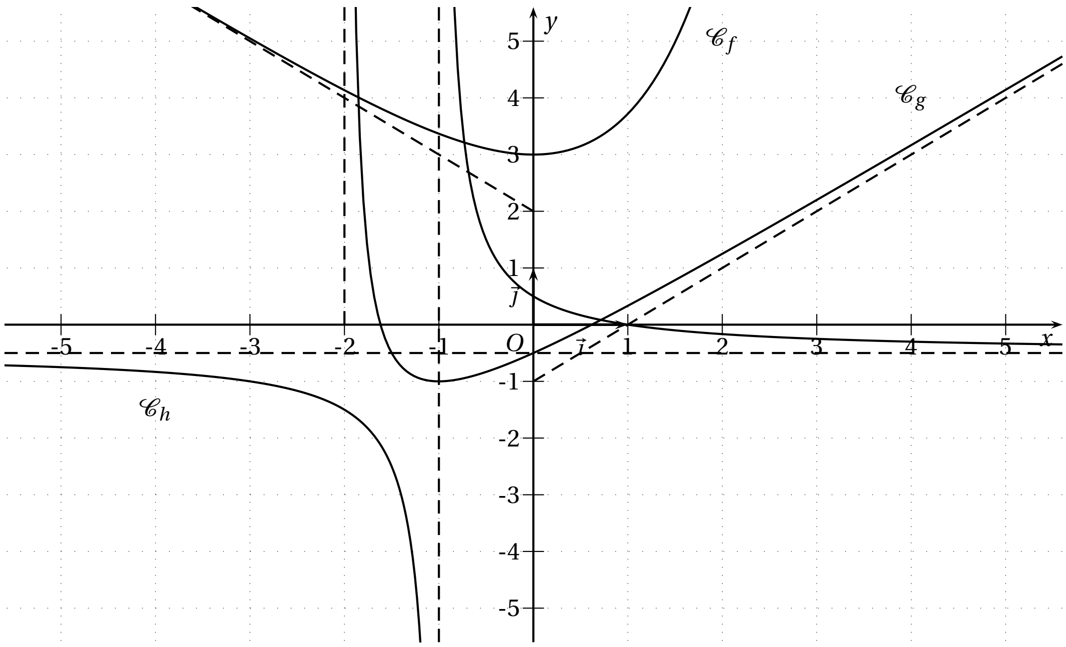
Pour chacune des trois fonctions :

1. déterminer D, son ensemble de définition ;
2. conjecturer les limites de la fonction aux bornes de cet ensemble de définition.



Exercice 12.5.

Même exercice que le précédent (la courbe $\mathscr{C}_h$ est en deux parties).



Étude de fonctions

Exercice 12.6.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{\left(x^2-1\right)(x-2001)}{2001}$. Étudier la limite de f en $+\infty$.

Exercice 12.7.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$

1. Montrer que f est bornée par 0 et 2.
2. Étudier les variations de f.
3. Déterminer, si elles existent, les limites de f en $+\infty$, en $-\infty$ et en 0.

Exercice 12.8.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{-x+1}{x+3}$.

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.
2. Étudier les limites aux bornes de son ensemble de définition.
   En déduire les éventuelles asymptotes de $\mathscr{C}$.
3. Étudier les variations de f.
4. Dresser le tableau des variations de f en y faisant apparaître les limites aux bornes.

Exercice 12.9.

Le but de cet exercice est de déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition de la fonction : $f(x) = \dfrac{x^2-4x+2}{x-3}$.

Pour la suite, on notera $P(x) = x^2-4x+2$ et $Q(x) = x-3$, et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1. Étude en $+\infty$ et en $-\infty$:
   (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} Q(x)$. Que peut-on en conclure ?
   (b) Montrer que, pour tout $x \neq 0$:
   $$f(x) = x\frac{1-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{3}{x}}$$
   (c) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
   (d) $\mathscr{C}$ admet-elle une asymptote horizontale en l'infini ?
   (e) i. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-3}$
   ii. En déduire que la droite d'équation $y = x-1$ est une asymptote de $\mathscr{C}$.
2. Étude au voisinage de 3 :
   (a) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} P(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} Q(x)$. En déduire $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x)$.
   (b) Procéder de même pour déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x)$
   (c) $\mathscr{C}$ admet-elle une asymptote verticale ?

Exercice 12.10.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{2-x}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Montrer que la droite d'équation $y = -x+1$ est une asymptote de $\mathscr{C}$.
3. (a) Étudier la limite de x^2-3x+2 et de $2-x$ en 2.
   La limite de f en 2 est-elle une forme indéterminée ?
   (b) Écrire x^2-3x+2 sous forme factorisée.
   (c) En déduire que, pour $x \neq 2$, $f(x) = -x+1$, puis la limite de $f(x)$ en 2.

Exercice 12.11.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2+9x+2}{x^2+1}$.

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $f(x) = ax+b+\dfrac{cx}{x^2+1}$
2. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

3. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x+2$ est une asymptote de $\mathscr{C}$.
4. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.

Exercice 12.12.
Soit f la fonction qui a x associe $f(x) = \dfrac{1-2x}{-x^2+2x+3}$.

1. Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe représentative de f.

12.6.2 Problèmes

Exercice 12.13.
Soit f la fonction définie pour $x \in [1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$.
Le but de cet exercice est d'étudier la limite de f en $+\infty$.

1. Étudier $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-1}$. Que peut-on en conclure ?
2. Montrer que, pour tous réels A et B strictement positifs, on a : $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \dfrac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$
3. En déduire que, pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, on a : $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$
4. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Exercice 12.14.
Soit f, u et v les fonctions définies sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x+\sin x}{x} \qquad u(x) = \frac{2x-1}{x} \qquad v(x) = \frac{2x+1}{x}$$

1. Montrer que, pour tout $x \in [1\,;+\infty[\,: u(x) \leq f(x) \leq v(x)$.
2. Étudier les limites en $+\infty$ de u et de v.
3. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Devoir surveillé n°8

Généralités sur les suites

EXERCICE 1 *8 points*

(u_n), (v_n) et (w_n) sont les suites définies respectivement par :

- $u_n = 3^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- $v_n = \dfrac{n+1}{2n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;
- $w_n = n^2 - 2n + 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier les monotonies de ces trois suites.
2. Montrer que la suite (v_n) est bornée par 0 et 2.

EXERCICE 2 *5 points*

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Le but de cet exercice est de démontrer par récurrence la propriété $\mathscr{P}$ suivante :

$$\mathscr{P} : \text{ pour tout entier naturel } n, \text{ on a } 1 \leqslant u_n \leqslant 2.$$

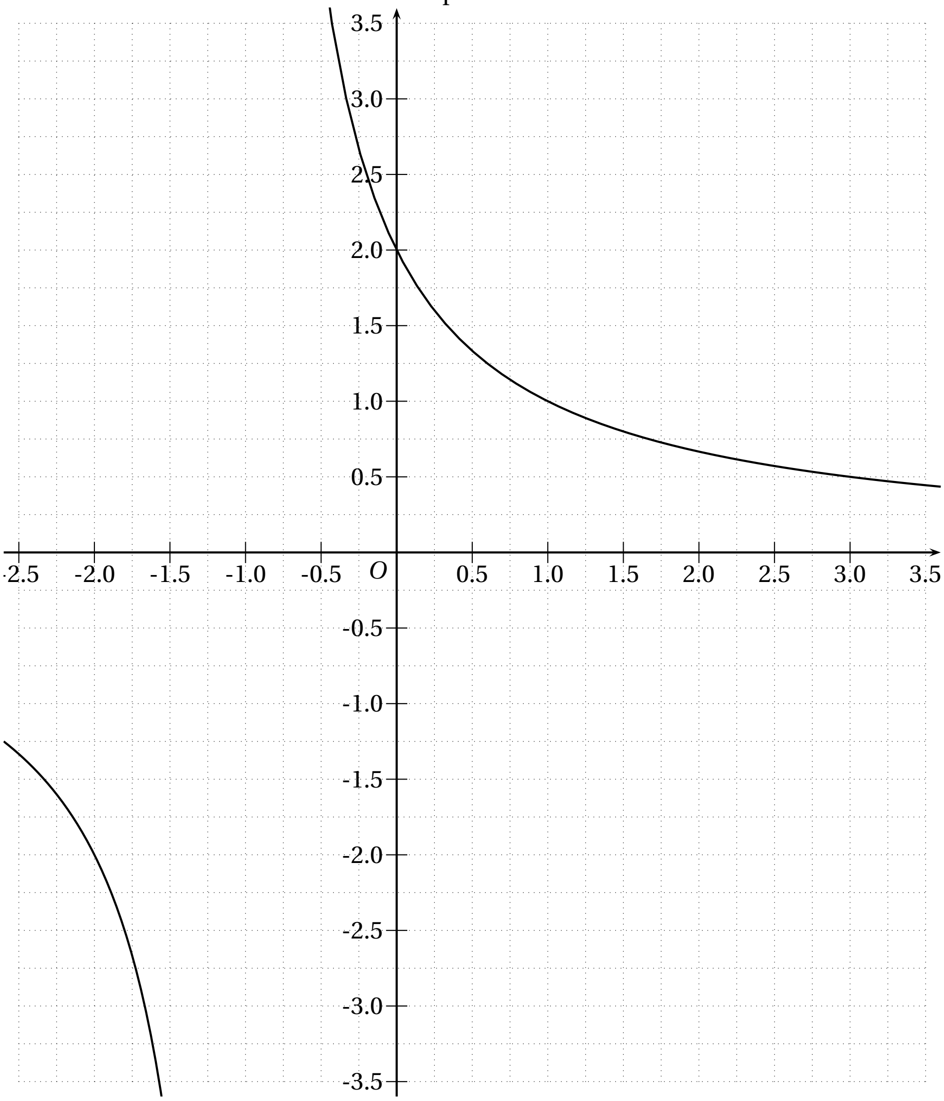
1. Montrer que $\mathscr{P}$ est vérifiée pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.
2. On suppose que $\mathscr{P}$ est vérifiée au rang p, c'est-à-dire que $1 \leqslant u_p \leqslant 2$. Montrer qu'alors $\mathscr{P}$ est vérifiée au rang $p+1$, c'est-à-dire que $1 \leqslant u_{p+1} \leqslant 2$.
3. Conclure.

EXERCICE 3 *7 points*

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Calculer les valeurs exactes des cinq premiers termes de la suite.
   Que peut-on en déduire quant à la monotonie de la suite ?
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{2}{1+x}$.
   Étudier les variations de f.
3. Dans le repère de la figure 12.2 de la présente page, on a tracé la courbe $\mathscr{C}$, représentative de la fonction f.
   Tracer dans ce même repère la représentation graphique « en chemin » de la suite (u_n).
4. On admettra que (u_n) converge vers le réel l positif tel que le point d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$: $y = x$ a pour coordonnées $(l\,;\,l)$.
   (a) Conjecturer à l'aide de la représentation graphique la valeur de l.
   (b) Déterminer par le calcul la valeur exacte de l.

FIG. 12.2 – Repère de l'exercice 1



Chapitre 13

Probabilités

Sommaire

13.1 Activités

13.1.1 Quelques fonctions du tableur

Les activités suivantes font appel au tableur. Les fonctions suivantes pourront vous être utiles :

- toute formule de calcul commence par « = » sinon le tableur pense qu'il s'agit de texte à afficher ;
- A2 fait référence au contenu de la case située à l'intersection de la ligne 2 et de la colonne A ; cette référence est relative et est donc modifiée lors d'un copié collé ;
- A2 fait référence à la même case mais c'est une référence absolue et n'est donc pas modifiée lors d'un copié collé (on peut aussi utiliser $A2 pour ne fixer que la colonne ou A$2 pour ne fixer que la ligne) ;
- SI(*test* ; *valeursivrai* ; *valeursifaux*) renvoie *valeursivrai* si le test est vrai, *valeursifaux* sinon ;
  par exemple SI(A2>6 ;"youpi" ;"zut") affiche dans la case *youpi* si le contenu de A2 est un nombre strictement plus grand que 6 et *zut* sinon ;
- SOMME(*plage*) fait la somme de tous les nombres contenus dans les cases de la *plage* ;
- ENT(*nombre*) renvoie la partie entière du *nombre* ;
- ALEA() renvoie un nombre réel pseudo-aléatoire de l'intervalle $[0\,;1[$;
  6*ALEA() renvoie un nombre réel pseudo-aléatoire de l'intervalle $[0\times 6\,;1\times 6[=[0\,;6[$;
  ENT(6*ALEA()) renvoie donc un nombre entier pseudo-aléatoire de l'intervalle $[0\,;6[$, donc un nombre entier de l'ensemble $\{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$;
  Et finalement ENT(6*ALEA())+1 renvoie un nombre entier pseudo-aléatoire compris entre 1 et 6 (comme un dé à 6 faces) ;
- sur Calc seulement, ALEA.ENTRE.BORNES(*min* ; *max*) renvoie un nombre entier pseudo aléatoire compris entre *min* et *max* ;
  ALEA.ENTRE.BORNES(1 ; 6) équivaut donc à ENT(6*ALEA())+1 ;
- NB.SI(*plage* ; *critère*) indique le nombre de cases de la *plage* correspondant au *critère* ;
  ainsi NB.SI(A2 : B6 ; 2) indique le nombre de 2 contenus dans les cases de la plage rectangulaire allant de A2 à B6 ;

les critères peuvent être dans une autre plage : « >2 » dans la case C1 ; « =3 » dans la case C2 ;
ainsi NB.SI(A2 : B6; C1 : C2) indique le nombre de données dans la plage rectangulaire allant de A2 à B6 qui vérifient le critère de la case C1 **additionné** au nombre de données qui vérifient le critère de la case C2 ; ainsi, si la plage contient 1, 3, 4, 5, et 6, la fonction renvoie 5 (4 nombres vérifiant C1 + 1 nombre vérifiant C2) ;

13.1.2 Les activités

Activité 13.1 (Fille ou garçon).
On se propose d'utiliser le tableur pour résoudre le problème suivant :
« Monsieur X est invité chez des nouveaux amis qu'il sait très joueurs mais qu'il connait à peine. Au cours de la conversation il apprend que ses nouveaux amis ont deux enfants mais il oublie de demander leur sexe. Soudain l'un de ces deux enfants entre dans la salle. Il s'agit d'un garçon.
"– Vous avez donc un garçon et ... ? demande-t-il
– Je parie que tu ne devineras pas. Sur quoi mises-tu ? un gars ? une fille ?"
Sur quoi doit miser monsieur X pour maximiser ses chances de clore le bec à ces amis un peu lourds avant de prendre congé ? »

On suppose pour simplifier les choses qu'un enfant sur deux qui nait est une fille et l'autre un garçon.

1. Que *conjecturez-vous* a priori quant au sexe de l'autre enfant ?
2. On se propose d'utiliser la colonne A pour simuler le sexe du premier enfant, la colonne B pour celui du second enfant et la colonne C pour compter le nombre de garçons.
   Proposer une formule utilisant la fonction ALEA (ou ALEA.ENTRE.BORNES avec Calc) permettant de simuler le sexe d'un enfant dans les cases A1 et B1 et une formule adaptée pour compter le nombre de garçons de la fratrie dans la case C1.
   Demander au professeur de valider les deux formules avant d'aller plus loin.
3. « Tirer la poignée » verticalement de façon à simuler 100 familles de deux enfants.
4. Dans la plage F4 : J5 dresser un tableau de la forme suivante :

Nombre de garçons	0	1	2	total
Effectif				

   où les cases *Effectif* seront automatiquement complétées par le tableur (utiliser la fonction NB.SI)
5. En appuyant plusieurs fois sur la touche F9 (Excel) ou CTRL+MAJ+F9 (Calc), indiquer autour de quels effectifs semblent osciller les types de famille.
6. Puisque l'un des enfants est un garçon, quel type de famille doit-on exclure ?
   En observant les types de famille restants, déterminer sur quel sexe doit miser Monsieur X et dans quelle proportion il a des chances de gagner son pari.
   Votre conjecture est-elle validée ?

Activité 13.2.
On lance deux dés à six faces qu'on suppose équilibrés et on s'intéresse à la somme de deux numéros indiqués par les faces supérieures des dés.

1. Quels sont les résultats possibles ?
2. À l'aide du tableur, en vous inspirant de la façon de procéder de l'activité précédente (une colonne pour chaque dé), conjectuer, sur mille lancers, la fréquence autour de laquelle oscille chaque somme (on rappelle que la fréquence d'une valeur est l'effectif de cette valeur divisé par le total des effectifs).
3. Comment expliquer ces fréquences ?

13.2 Vocabulaire des ensembles

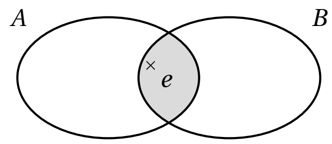
Les mathématiques utilisent toutes sortes d'ensembles (finis, infinis dénombrables, infinis non dénombrables). Le but de ce paragraphe n'est pas de faire une étude systématique de la théorie des ensembles (qui s'avérerait très complexe) mais de proposer une approche des notions les plus utilisées de cette théorie.

Ainsi, nous ne tenterons pas de définir rigoureusement ce qu'est un ensemble. Disons simplement qu'un ensemble s'apparente à une liste (finie ou non) d'objets distincts possédant un propriété commune (par exemple l'ensemble des entiers naturels pairs, l'ensemble des entiers qui n'ont que deux diviseurs (nombres premiers), l'ensemble des polynômes de degré 2, etc.). On considère ces objets dans leur globalité sans tenir compte d'un ordre éventuel.

Un ensemble se note avec des accolades : par exemple si E est l'ensemble des entiers naturels pairs inférieurs à 9, on notera $E = \{0; 2; 4; 6; 8\}$.

On utilisera les symboles $\in$ et $\notin$ pour signifier qu'un élément appartient ou n'appartient pas à un ensemble : par exemple $2 \in \{0;1;2;3;4;5\}$ et $3 \notin \{0;2;4;6;8\}$. Enfin, nous noterons $\varnothing$ l'ensemble qui n'a pas d'éléments (ensemble vide).

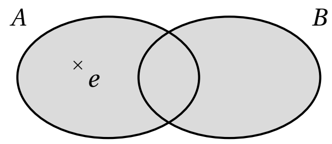
Définition 13.1 (Intersection)**.** L'*intersection* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont communs à A et B.
On la note $A \cap B$.



Ainsi $e \in A \cap B$ signifie $e \in A$ **et** $e \in B$.

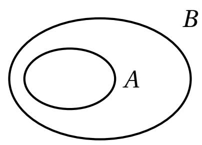
Remarque. Lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.

Définition 13.2 (Réunion)**.** La *réunion* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B.
On la note $A \cup B$.



Ainsi $e \in A \cup B$ signifie $e \in A$ **ou** $e \in B$.

Définition 13.3 (Inclusion)**.** On dit qu'un ensemble A est *inclus* dans un ensemble B si tous les éléments de A sont des éléments de B.
On note alors $A \subset B$.



On dit alors que A est une *partie* de B ou que A est un *sous-ensemble* de B.

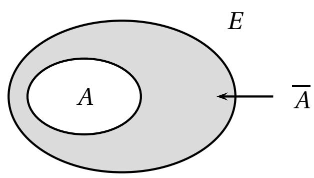
Remarque. $\varnothing$ et E sont toujours des parties de E (partie vide et partie pleine).

On notera $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

Exemples 13.1. On a toujours :

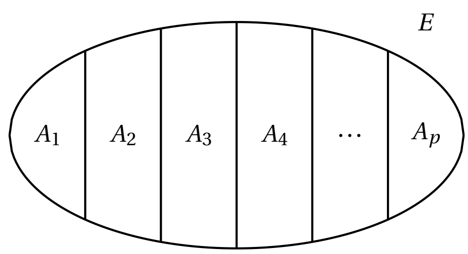
- $A \subset A \cup B$;
- $B \subset A \cup B$;
- $A \cap B \subset A$;
- $A \cap B \subset B$;
- $A \cap B \subset A \cup B$;
- $\varnothing \subset A$;
- $\varnothing \cap A = \varnothing$;
- $\varnothing \cup A = A$.

Définition 13.4 (Complémentaire)**.** Soit E un ensemble et A une partie de E. Le *complémentaire* de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On le note $E \setminus A$ ou $\overline{A}$ ou encore $C_E(A)$.



Remarque. $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Définition 13.5. Des parties A_1, A_2, …, A_p d'un ensemble E constituent une *partition* de E si elles sont deux à deux disjointes et si leur réunion est E.
Ainsi :
- Pour tous i et j de $\{1;\dots;p\}$: $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$;
- $\coprod_{i=1}^{p} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p = E$.



Définition 13.6 (Cardinal)**.** Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est appelé *cardinal de* E. Ce nombre est noté $\text{Card}(E)$. On convient que $\text{Card}(\varnothing) = 0$.

Exemple 13.2. Si $E = \{0;1;2;3;4;5\}$ alors $\text{Card}(E) = 6$.

Remarque. La notion de cardinal ne s'applique pas aux ensembles infinis (comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc.).

13.3 Expériences aléatoires

Définition 13.7. L'ensemble de toutes les *issues* d'une *expérience aléatoire* est appelé *univers* (ou univers des possibles). On note généralement cet ensemble Ω.

À notre niveau, Ω sera toujours un ensemble fini.

Exemples 13.3.
- On lance un dé et on regarde la face obtenue : $\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$
- On lance un dé et on regarde si le numéro de la face obtenue est pair ou impair : $\Omega = \{P\,;I\}$
- On lance une pièce de monnaie : $\Omega = \{P\,;F\}$
- On lance deux pièces de monnaie : $\Omega = \{PP\,;PF\,;FP\,;FF\}$
- On lance deux dés : $\Omega = \{(i\,;j)$ où $1 \leqslant i \leqslant 6$ et $1 \leqslant j \leqslant 6\}$

Remarquons qu'une même expérience peut déboucher sur des univers différents suivant les hypothèses faites : par exemple, si on lance deux dés et qu'on fait le produit P ou la somme S des deux chiffres obtenus, on obtient respectivement :
- $\Omega_P = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;8\,;9\,;10\,;12\,;15\,;16\,;18\,;20\,;24\,;25\,;30\,;36\}$;
- $\Omega_S = \{2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\,;11\,;12\}$.

Événements

Exemple : on lance deux dés et on considère la somme S obtenue. L'ensemble de toutes les issues possibles (univers) est $\Omega = \{2\,;3\,;\cdots\,;11\,;12\}$.

Le tableau 13.1 de la présente page définit le vocabulaire relatif aux *événements* (en probabilité) :

TAB. 13.1 – Vocabulaire relatif aux événements en probabilité

Vocabulaire	Signification	Illustration
Événement élémentaire (noté ω)	L'une des issues de la situation étudiée (un élément de Ω)	Obtenir 7 : $\omega = \{7\}$
Événement (notation quelconque)	Ensemble de plusieurs issues	Obtenir un nombre pair : $A = \{2\,;4\,;6\,;8\,;10\,;12\}$ Obtenir un multiple de trois : $B = \{3\,;6\,;9\,;12\}$ Obtenir une somme supérieure à 10 : $C = \{10\,;11\,;12\}$ Obtenir une somme inférieure à 6 : $D = \{2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$
Événement impossible (noté $\varnothing$)	C'est un événement qui ne peut pas se produire	« Obtenir 13 » est un événement impossible.
Événement certain (noté Ω)	C'est un événement qui se produira obligatoirement	« Obtenir entre 2 et 12 » est un événement certain.
Événement « A et B » (noté $A \cap B$)	Événement constitué des issues communes aux 2 événements	$A \cap B = \{6\,;12\}$
Événement « A ou B » (noté $A \cup B$)	Événement constitué de toutes les issues des deux événements	$A \cup B = \{2\,;3\,;4\,;6\,;8\,;9\,;10\,;12\}$
Événements incompatibles (on note alors $A \cap B = \varnothing$)	Ce sont des événements qui n'ont pas d'éléments en commun	$C \cap D = \varnothing$ donc C et D sont incompatibles. Par contre, A et B ne le sont pas.
Événements contraires (l'événement contraire de A se note $\overline{A}$)	Ce sont deux événements incompatibles dont la réunion forme la totalité des issues (Ω)	Ici, $\overline{A}$ représente l'événement « obtenir une somme impaire ». On a alors : • $A \cap \overline{A} = \varnothing$ (ensembles disjoints) • $A \cup \overline{A} = \Omega$

13.4 Loi de probabilité sur un univers Ω

13.4.1 Définition, propriétés

Définition 13.8. Soit $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \cdots ; \omega_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire.
Définir une loi de probabilité P sur Ω, c'est associer, à chaque événement élémentaire w_i, des nombres $p_i \in [0; 1]$, appelés *probabilités*, tels que :
- $\sum_i p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$;
- la probabilité d'un événement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités p_i des événements élémentaires ω_i qui constituent A.

Remarque. On note aussi : $p_i = p(\{\omega_i\}) = p(\omega_i)$.

Exemple 13.4. Soit un dé truqué dont les probabilités d'apparitions des faces sont données par le tableau suivant :

Issue ω	1	2	3	4	5	6
Probabilité $p(\omega)$	0,05	0,05	0,1	0,1	0,2	inconnue

1. Calculer la probabilité de l'événement A = « obtenir un résultat inférieur ou égal à 4 ».
   D'après la définition, $p(A) = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = 0,3$[1].
2. Calculer la probabilité d'obtenir 6 :
   D'après la définition, $p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1$, donc $p(6) = 0,5$.

Propriété 13.1. *Soit A et B deux événements de Ω, alors :*
- *La probabilité de l'événement certain est 1 :* $p(\Omega) = 1$;
- *La probabilité de l'événement impossible est 0 :* $p(\varnothing) = 0$;
- *Si* $A \subset B$, *alors* $p(A) \leq p(B)$;
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$;
- *Si A et B sont incompatibles ,* $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$;
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

13.4.2 Une situation fondamentale : l'équiprobabilité

Définition 13.9. Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont même probabilité, on dit qu'il y a *équiprobabilité* ou que la loi de probabilité est *équirépartie.*

Dans ce cas, la règle de calcul de la probabilité d'un événement A est la suivante :

Propriété 13.2. *Dans une situation d'équiprobabilité sur un univers Ω, pour tout événement élémentaire ω et tout événement A on a :*
- $p(\omega) = \dfrac{1}{Card(\Omega)}$
- $p(A) = \dfrac{\textit{nombre d'issues favorables}}{\textit{nombre d'issues possibles}} = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$

Certaines expériences ne sont pas des situations d'équiprobabilité, mais on peut parfois s'y ramener tout de même.

Exemple 13.5. On lance deux dés équilibrés et on s'intéresse à la somme des deux dés.
L'univers est $\Omega = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$ mais il n'y a pas équiprobabilité car chaque événement n'a pas la même probabilité. Ainsi il est plus difficile d'obtenir 2 que 7.

On se ramène à une situtation d'équiprobabilité : chaque dé étant équilibré, on a équiprobabilité sur chaque dé (chaque face à une probabilité de $\frac{1}{6}$).

Il reste à déterminer la façon d'obtenir chaque somme. Le tableau ci-dessous résume les possibilités pour chaque dé et la somme obtenue :

dé 1 \ dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

[1] La notation rigoureuse est $p(\{1\})$ mais on peut noter $p(1)$ quand il n'y a pas de risque de confusion.

Chaque « case » étant équiprobable ($\frac{1}{36}$) on obtient :

ω_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

13.4.3 Loi des grands nombres

Définition 13.10. Lorsque qu'on répète une expérience aléatoire, on appelle *fréquence d'apparition* d'une éventualité ω donnée le nombre : $f_i = \dfrac{\text{nombre de fois où l'éventualité } \omega \text{ apparaît}}{\text{nombre de fois où l'expérience est répétée}}$

On constate que si l'on répète un grand nombre de fois l'expérience donnée, les différentes fréquences d'apparition ont tendance à se stabiliser. Ce constat est un résultat mathématique appelé *La loi des grands nombres*; il se démontre, mais la démonstration est largement hors de nos compétences :

Théorème 13.3 (Loi des grands nombres)**.** *Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité, les distributions des fréquences calculées sur des séries de taille n se rapprochent de la loi de probabilité quand n devient grand.*

Remarques.
- Dans certains cas, on utilise ce résultat pour valider ou rejeter un modèle (une loi de probabilité) choisi à priori.
- Dans d'autres cas, lorsqu'on ne connaît pas de loi de propabibilité relativement à une expérience aléatoire, on peut ainsi en introduire une à partir des fréquences déterminées lors d'un grand nombre d'expériences

13.5 Variables aléatoires

13.5.1 Les situations

On illustrera toute cette section par les situations suivantes :

1. on tourne une roue dans une fête foraine qui est partagée en 8 secteurs égaux : 1 de couleur rouge, 3 de couleur verte et 4 de couleur bleue;
2. on lance deux dés et on s'intéresse à la somme des deux dés.

13.5.2 Définition

Définition 13.11. Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.
- On appelle *variable aléatoire* toute fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$ qui, à tout élément de Ω, fait correspondre un nombre réel x.
- L'événement noté $\{X = x\}$ est l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image x par X.
- L'ensemble image de Ω par X est l'ensemble de toutes les images des éléments de Ω par X.
  Cet ensemble est noté Ω'.

Avec nos situations de départ on peut imaginer les variables aléatoires suivantes :

1. La partie de roue à la fête foraine coûte 1 € et l'on gagne :
   - 0 € si le bleu sort;
   - 2 € si le vert sort;
   - 5 € si le rouge sort;

   Lorsqu'on lance la roue, l'univers est donc $\Omega = \{\text{bleu}; \text{vert}; \text{rouge}\}$ et l'on peut définir la variable aléatoire qui à chaque couleur associe le gain engendré.
   Ainsi, en enlevant la mise (1 € pour pouvoir jouer), on a :
   - X : bleu $\mapsto -1$
   - X : vert $\mapsto 1$
   - X : rouge $\mapsto 4$
2. On peut, par exemple, définir une variable aléatoire X de la façon suivante :
   - $X = 0$ si la somme des deux dés est paire;
   - $X = 1$ si elle est impaire.

   L'ensemble image de Ω par X est $\Omega' = \{0; 1\}$

Remarques.
- Une variable aléatoire n'est pas un nombre, mais une fonction.
- Les valeurs d'une variable aléatoire sont toujours des nombres.
- En général, une variable aléatoire est notée X, Y, Z.

13.5.3 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 13.12. Soit $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \cdots ; \omega_n\}$ un univers associé à une expérience aléatoire sur lequel a été définie une loi de probabilité et $\Omega' = \{x_1 ; x_2 ; \cdots ; x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X.
La loi de probabilité de X est la fonction définie sur Ω', qui à chaque x_i fait correspondre le nombre $p'_i = p(X = x_i)$.

On démontre facilement que $\sum\limits_i p'_i = 1$.

En reprenant les deux situations de départ, on a :

1. Dans le cas de la roue on a (on présente généralement la chose de la manière suivante) :

x_i	-1	1	4
$p(X = x_i)$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2. $p(X = 0)$ est la probabilité que la variable aléatoire soit égale à 0, c'est-à-dire que la somme soit paire.
   On a ainsi $p(X = 0) = p(2) + p(4) + p(6) + \cdots + p(12) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.
   De même $p(X = 1) = p(1) + p(3) + p(5) + \cdots + p(11) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

x_i	0	1
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

13.5.4 Espérance, variance, écart type

Définition 13.13. L'espérance mathématique, la variance et l'écart type de la variable aléatoire X, dont les notations respectives sont $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ sont respectivement les nombres :

- $E(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i w_i$
- $V(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i(\omega_i - \mu)^2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \omega_i^2\right) - \mu^2$
- $\sigma(X) = \sqrt{V}$

Toujours avec les exemples de la situation dr départ :

1. (X est le gain à la roue de la fête foraine)
   - $E(X) = \frac{4}{8} \times (-1) + \frac{3}{8} \times 1 + \frac{1}{8} \times 4 = \frac{3}{8}$
     (le gain qu'on peut espérer est en moyenne de 0,375 €)
   - $V(X) = \frac{4}{8} \times (-1)^2 + \frac{3}{8} \times 1^2 + \frac{1}{8} \times 4^2 - \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{175}{64}$
   - $\sigma(X) = \sqrt{\frac{175}{64}} \approx 1{,}654$
2. ($X = 0$ si la somme des dés est paire, $X = 1$ si elle est impaire)
   - $E(X) = \sum\limits_i p'_i x_i = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$
   - $V(X) = \sum\limits_i p'_i x_i^2 - (E(X))^2 = \frac{1}{2} \times 0^2 + \frac{1}{2} \times 1^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
   - $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{1}{2}$

13.6 Exercices

Exercice 13.1.
On jette un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au numéro apparaissant sur la face supérieure.

1. Décrire l'ensemble Ω, univers associé à cette expérience aléatoire.
2. Écrire sous forme de partie (d'ensemble) de Ω les événements :
   - A : « obtenir un numéro inférieur ou égal à 2 » ;
   - B : « obtenir un numéro impair » ;
   - C : « obtenir un numéro strictement supérieur à 4 ».
3. Pour chacun des événements suivants, les écrire sous forme de partie de Ω et les décrire par une phrase la plus simple possible.
   - $A \cup B$;
   - $A \cup C$;
   - $C \cup B$;
   - $\overline{A}$;
   - $\overline{A} \cap C$;
   - $A \cap B$;
   - $A \cap B$;
   - $C \cap B$;
   - $\overline{A} \cup C$;
4. Parmi tous ces événements, en citer deux qui soient contraires l'un de l'autre.

Exercice 13.2.
On choisit au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il d'issues possibles ?
2. On considère les événements :
   - A : « obtenir un as » ;
   - P : « obtenir un pique ».

   (a) Combien y a-t-il d'éventualités dans A ?
   (b) Combien y a-t-il d'éventualités dans P ?
   (c) Traduire par une phrase les événements $A \cap P$ et $A \cup P$.
   (d) Déterminer Card$(A \cap P)$ et Card$(A \cup P)$.

Exercice 13.3.
Un dé (à 6 faces) est truqué de la façon suivante : chaque chiffre pair a deux fois plus de chance de sortir qu'un numéro impair.

1. Calculer la probabilité d'obtenir un 6.
2. On lance deux fois le dé.
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un chiffre pair.
   (b) Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un 6.

Exercice 13.4.
Un sac contient quatre jetons rouges, trois jetons verts et deux jetons bleus.
On tire des jetons, sans remise, jusqu'à obtention d'un jeton de même couleur qu'un des jetons précédemment tirés.
Calculer la probabilité que les deux jetons de même couleur soient bleus.

Exercice 13.5.
E est l'ensemble des nombres de 1 à 20 inclus.
On choisit au hasard l'un de ces nombres.

1. Quelle est la probabilité des événements suivants :
   - A : « il est un multiple de 2 »
   - B : « il est un multiple de 4 »
   - C : « il est un multiple de 5 »
   - D : « il est un multiple de 2 mais pas de 4 »
2. Calculer la probabilité de :
   - $A \cap B$;
   - $A \cup B$;
   - $A \cap C$;
   - $A \cup C$.

Exercice 13.6.
Deux lignes téléphoniques A et B arrivent à un standard.
On note :

- E_1 : « la ligne A est occupé » ;
- E_2 : « la ligne B est occupée ».

Après étude statistique, on admet les probabilités :

- $p(E_1) = 0,5$;
- $p(E_2) = 0,6$;
- $p(E_1 \cap E_2) = 0,3$.

Calculer la probabilité des événements suivants :

- F : « la ligne A est libre » ;
- G : « une ligne au moins est occupée » ;
- H : « une ligne au moins est libre ».

Exercice 13.7.

On considère un jeu de 32 cartes (la composition d'un jeu de 32 cartes est la suivante : 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; valet ; dame ; roi ; as pour chacune des 4 « couleurs » : coeur ; carreau ; trèfle et pique.)

On tire, au hasard, une carte du paquet, chaque carte ayant autant de chance d'être choisie. On considère les événements suivants :

- V : « Obtenir un valet » ;
- F : « Obtenir une figure[2] » ;
- T : « Obtenir un trèfle ».

1. Calculer les probabilités suivantes :
   - $p(V)$;
   - $p(F)$;
   - $p(T)$.
2. Décrire l'événement $F \cap T$ puis calculer sa probabilité $p(F \cap T)$.
   En déduire la probabilité $p(F \cup T)$ d'obtenir une figure ou un trèfle.
3. Décrire l'événement $\overline{F}$ et calculer (simplement !) sa probabilité $p(\overline{F})$.

Exercice 13.8.

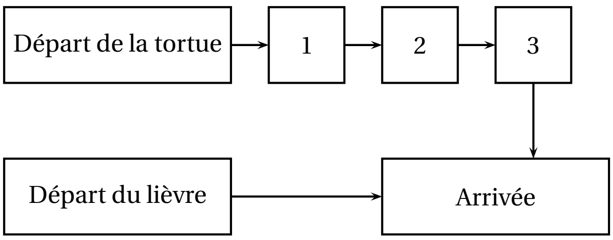
On lance n dés ($n \geq 1$). On note A l'événement « obtenir au moins un 6 ».

1. Décrire $\overline{A}$.
2. Exprimer en fonction de n la probabilité $p(\overline{A})$.
3. En déduire que $p(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
4. Compléter le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(A)$								

5. Combien de dés faut-il lancer pour que la probabilité d'obtenir au moins un six soit supérieure à $\frac{3}{4}$?
6. Le lièvre et la tortue font la course.
   Le lièvre se divertit longuement mais quand il part, il file à l'arrivée. La tortue, quant à elle, avance inexorablement mais lentement vers l'arrivée.
   On considère qu'on peut assimiler cette course au lancement d'un dé :
   - si le 6 sort, le lièvre avance ;
   - sinon la tortue avance d'une case et au bout de 4 cases la tortue a gagné.
     Voir figure 13.1.

FIG. 13.1 – Figure de l'exercice 13.8



Déterminer la probabilité que le lièvre l'emporte et celle que la tortue l'emporte.

Exercice 13.9.

Un couple de futurs parents décide d'avoir trois enfants. On fait l'hypothèse qu'ils auront, à chaque fois, autant de chances d'avoir un garçon qu'une fille et qu'il n'y aura pas de jumeaux. Calculer la probabilité des événements :

- A : « ils auront trois filles » ;
- B : « ils auront trois enfants de même sexe » ;
- C : « ils auront au plus une fille » ;
- D : « les trois enfants seront de sexes différents ».

Exercice 13.10.

Dans une loterie, 100 billets sont vendus et il y a 7 billets gagnants. Quelle est la probabilité de gagner au moins un lot si on achète :

[2] Les figures sont les valets, les dames et les rois

- Un billet ?
- Deux billets ?

Exercice 13.11.

Pour se rendre à son travail, un automobiliste rencontre trois feux tricolores. On suppose que les feux fonctionnent de manière indépendante, que l'automobiliste s'arrête s'il voit le feu orange ou rouge et qu'il passe si le feu est vert. On suppose de plus que chaque feu est vert durant un temps égal à rouge et orange (autrement dit, l'automobiliste à autant de chance de passer que de s'arrêter).

1. Faire un arbre représentant toutes les situations possibles.
2. Quelle est la probabilité que l'automobiliste ait :
   (a) les trois feux verts ?
   (b) deux des trois feux verts ?

Exercice 13.12.

On jette un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On définit une variable alétoire X en associant à chaque tirage le nombre :

- -10 si on tire le numéro 1 ;
- 10 si on tire le numéro 6 ;
- 0 dans tous les autres cas.

1. Définir l'univers Ω associé à l'expérience aléatoire et l'univers $X(\Omega)$ associé à la variable alétoire.
2. On suppose que le dé est parfaitement équilibré. Donner la loi de probabilité de X.

Exercice 13.13.

On lance deux dés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
L'ensemble E des couples $(x ; y)$, avec $1 \leq x \leq 6$ et $1 \leq y \leq 6$, est associé à une loi de probabilité équirépartie.
À chaque couple $(x ; y)$, on associe $|x - y|$. On définit ainsi une variable aléatoire X sur l'ensemble E.

1. Définir la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 13.14.

On jette trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée et on appelle « tirage »le résultat obtenu. Ainsi (Face ; Face ; Pile) est un tirage (qu'on notera FFP).

1. Faire un arbre décrivant l'ensemble des issues possibles de cette expérience aléatoire et donner le cardinal de Ω, l'univers des possibles.
2. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de « Pile »obtenues.
   (a) Décrire Ω', l'univers des possibles pour X.
   (b) Déterminer la loi de probabilité associée à X (on la présentera sous forme de tableau).
   (c) Déterminer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ respectivement l'espérance, la variance et l'écart type de X.

Exercice 13.15.

On considère une roue partagée en 15 secteurs égaux tels que :

- il y a un secteur de couleur rouge (R)
- il y a cinq secteurs de couleur bleue (B)
- il y a neuf secteurs de couleur verte (V)

La roue tourne sur son axe central et s'arrête sur l'une des couleurs, chaque secteur ayant la même probabilité.
Pour pouvoir faire tourner la roue, un joueur doit payer 1 € et, selon la couleur sur laquelle elle s'arrête, il gagne :

- 0 € si le vert sort ;
- 1 € si le bleu sort ;
- x € si le rouge sort ;

On appelle X la variable aléatoire associée au gain final (gain − mise de départ) du joueur.

1. Décrire l'univers $X(\Omega)$ associé à X.
2. Décrire la loi de probabilité associée à X (on la présentera sous forme de tableau).
3. Exprimer en fonction de x l'espérance de gain du joueur.
4. On suppose que $x = 2$ €.
   (a) Quelle est l'espérance de gain du joueur ?
   (b) Qui est le plus avantagé : l'organisateur du jeu ou le joueur ?
5. Mêmes questions pour $x = 15$ €.
6. On dit que le jeu est équitable lorsque l'espérance de gain est égale à zéro, car alors ni l'organisateur du jeu ni le joueur ne sont avantagés. Combien doit valoir x pour que le jeu soit équitable ?

Devoir surveillé n°9

Probabilités – Comportement asymptotique

EXERCICE 1 *3 points*

Deux lignes téléphoniques a et b arrivent à un standard.
On note :

- A : « la ligne a est libre » ;
- B : « la ligne b est libre ».

Après étude statistique, on admet les probabilités :

- $p(A) = 0,5$;
- $p(B) = 0,4$;
- $p(A \cap B) = 0,2$.

Calculer la probabilité des événements suivants :

- F : « la ligne a est occupée » ;
- G : « une ligne au moins est occupée » ;
- H : « une ligne au moins est libre ».

EXERCICE 2 *6 points*

On considère une roue partagée en 10 secteurs égaux tels que :

- il y a un secteur de couleur rouge (R)
- il y a trois secteurs de couleur verte (V)
- il y a six secteurs de couleur bleue (B)

La roue tourne sur son axe central et s'arrête sur l'une des couleurs, chaque secteur ayant la même probabilité.

Pour pouvoir faire tourner la roue, un joueur doit payer 1 € et, selon la couleur sur laquelle elle s'arrête, il gagne :

- 0 € si le bleu sort ;
- 2 € si le vert sort ;
- 3 € si le rouge sort ;

On appelle X la variable aléatoire associée au gain final (gain − mise de départ) du joueur.

1. Décrire l'univers $X(\Omega)$ associé à X.
2. Décrire la loi de probabilité associée à X (on la présentera sous forme de tableau).
3. (a) Calculer l'espérance de gain du joueur.
   (b) Qui est le plus avantagé : l'organisateur du jeu ou le joueur ?
   (c) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   On dit que le jeu est équitable lorsque l'espérance de gain est égale à zéro, car alors ni l'organisateur du jeu ni le joueur ne sont avantagés. Comment modifier les gains pour que le jeu soit équitable ?

EXERCICE 3 *4 points*

Soit f la fonction définie sur $I =]3\,; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2-5x+6}$$

1. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. En déduire les éventuelles asymptotes à la courbe de représentative de f.

EXERCICE 4 *7 points*

Soit f la fonction définie dans $\mathbb{R}$ par

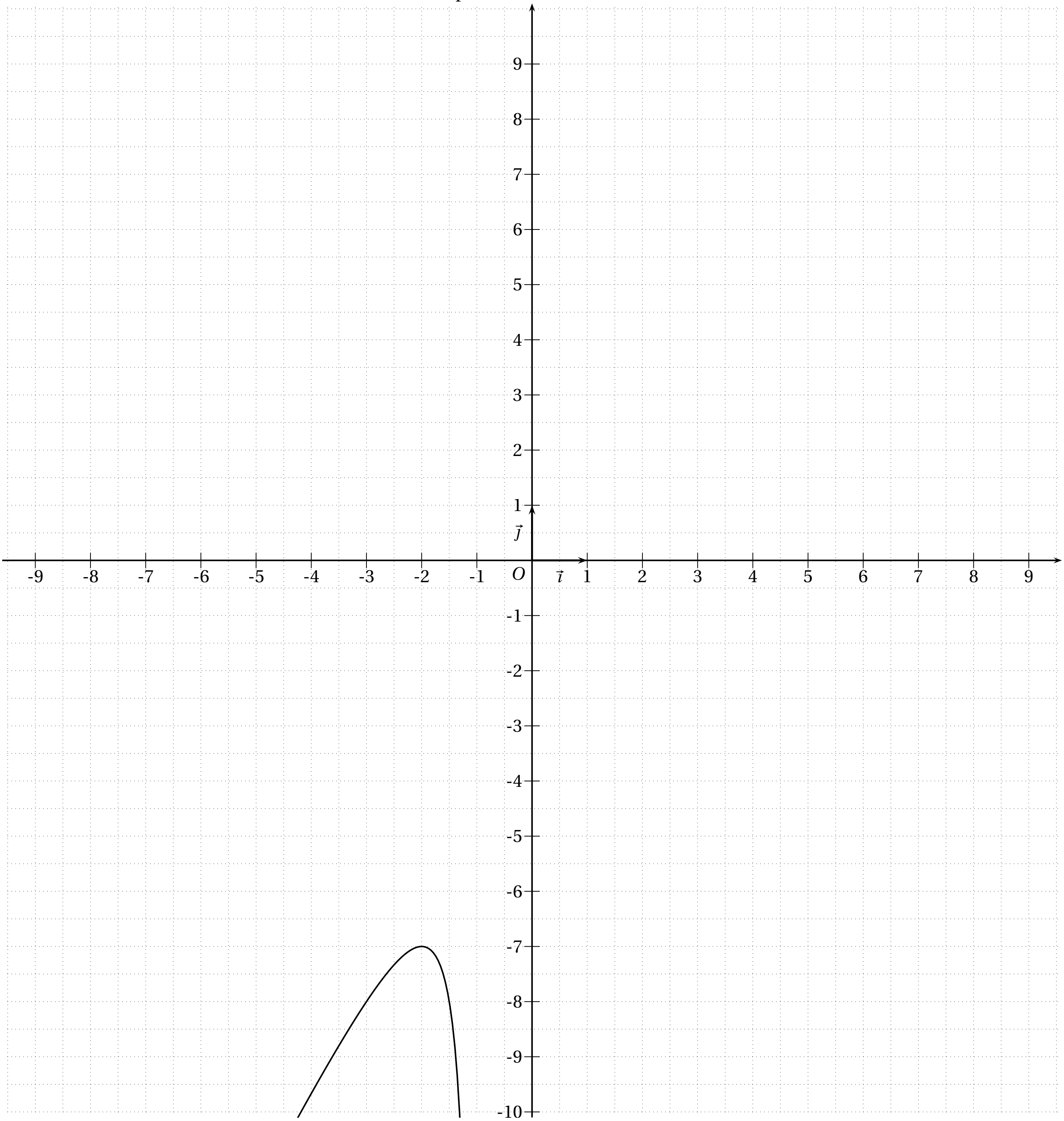
$$f(x) = \frac{2x^2+x+1}{x+1}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère $\left(\text{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$du plan.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f.
2. Montrer que $\forall x \in \mathscr{D}$,
$$f(x) = 2x - 1 + \frac{2}{x+1}$$
3. Étudier les limites de f en -1 par valeurs supérieures puis par valeurs inférieures.
4. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
5. On appelle Δ la droite d'équation $y = 2x - 1$.
   (a) Montrer que Δ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ sur $\mathscr{D}$.
6. Exprimer la fonction dérivée f' de f sur $\mathscr{D}$.
7. Étudier les variations de f sur $\mathscr{D}$ et dresser le tableau de variations de f.

8. Bonus[3] : Montrer que le point $\Omega\,(-1\,;\,-3)$ est centre de symétrie de la courbe.
9. Dans le repère ci-après une partie de la courbe $\mathscr{C}_f$ a été tracée.
   (a) Tracer dans ce repère les asymptotes à $\mathscr{C}_f$ et placer Ω.
   (b) Tracer les tangentes horizontales à $\mathscr{C}_f$.
   (c) Compléter le tracé de $\mathscr{C}_f$.

FIG. 13.2 – Repère de l'exercice 4



[3] À ne traiter qu'une fois tout terminé

Chapitre 14

Compléments sur les suites

Sommaire

14.1 Convergence d'une suite

14.1.1 Généralités

Définition 14.1. On dit qu'une suite *converge* vers un réel l (on dit aussi admet pour limite l) lorsque tout intervalle ouvert centré en l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Dans les autres cas, on dit que la suite *diverge*.

Remarque. Comme pour les fonctions, on pourra écrire pour les suites $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ mais, l'étude de la convergence d'une suite se faisant toujours lorsque n tend vers $+\infty$, on peut omettre de le préciser. L'écriture devient alors $\lim u_n$.

Remarque. Plus mathématiquement, la définition peut s'énoncer ainsi :
Pour tout réel ϵ strictement positif (qu'on peut imaginer très petit), il existe un rang N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - l| < \epsilon$.

Graphiquement, cela se traduit ainsi :
Quelle que soit la largeur de la bande horizontale choisie, il existe un rang à partir duquel tous les points de la représentation graphique de la suite sont situés dans cette bande.

Exemple 14.1. Considérons la suite définie pour tout $n > 1$ par : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. La figure 14.1 page suivante permet de conjecturer que $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$. Nous verrons plus tard comment le démontrer.

Remarque. Parmi les suites divergentes, il en existe de deux types :
- celles dont la limite est infinie comme la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2$;
- celles qui n'ont pas de limite comme la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ (qui vaut 1 ou -1 selon la parité de n).

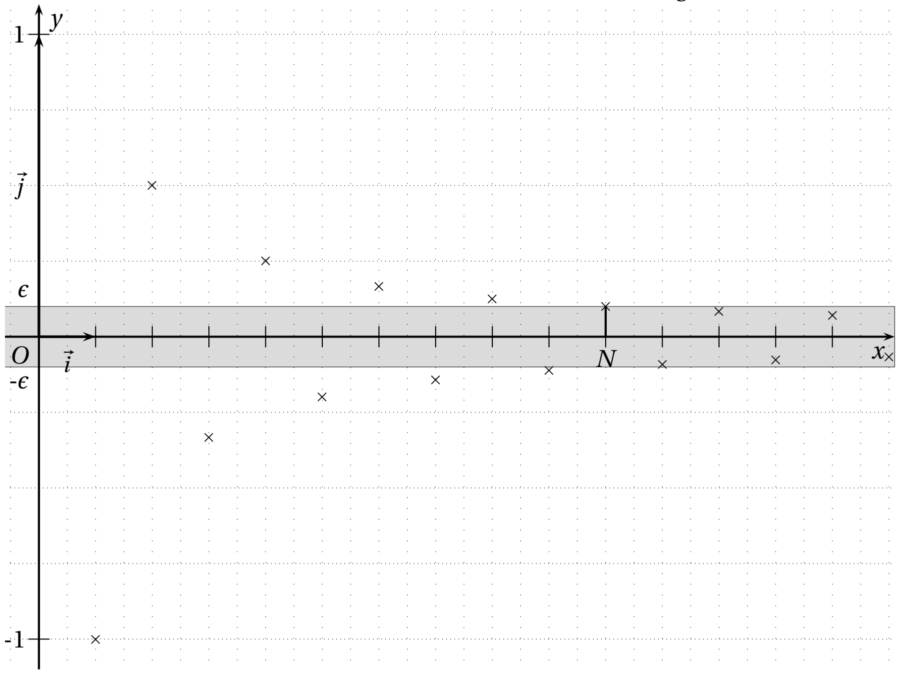
14.1.2 Étude de la limite d'une suite

Cas des suites explicites : $u_n = f(n)$

Théorème 14.1. *Soit (u_n) une suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$, alors :*

$$\text{Si } \lim_{x\to+\infty} f(x) = l \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

FIG. 14.1 – Visualisation de la notion de convergence



On l'admettra.

Ce théorème permet de « récuperer »toutes les propriétés sur les limites vues durant le chapitre *Comportement asymptotique*, en particulier les théorèmes de comparaison, et l'étude de la convergence d'une suite explicite reviendra presque systématiquement à étudier la limite en l'infini de la fonction associée.

Exemple 14.2. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = n^4(\cos n - 2)$.
On a $-1 \leq \cos n \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq \cos n - 2 \leq -1$, donc $u_n \leq -n^4$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^4 = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^4 = -\infty$ et $\lim u_n = -\infty$.

Exemple 14.3. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n strictement positif par : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.
On a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc $-\dfrac{1}{n} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}$.
Or $\lim -\dfrac{1}{n} = \lim \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim u_n = 0$.

14.2 Deux suites particulières : arithmétiques et géométriques

14.2.1 Activité

Un étudiant loue un chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bail :

- *Premier contrat* : un loyer de 200 € pour le premier mois, puis une augmentation de 5 € par mois jusqu'à la fin du bail ;
- *Second contrat* : un loyer de 200 € pour le premier mois, puis une augmentation de 2 % par mois jusqu'à la fin du bail.

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois.
2. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois, c'est-à-dire celui du 36è mois.
3. Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ? (Justifier à l'aide de calculs).

14.2.2 Suites arithmétiques

Définition et premières propriétés

Définition 14.2. On appelle *suite arithmétique* toute suite (u_n) telle que

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = u_n + r \text{ où } r \in \mathbb{R}$$

r est appelé *la raison* de la suite arithmétique.

Remarque. Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, il suffit de montrer que, pour tout n, la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante. Cette constante sera alors la raison de la suite.

Exemples 14.4.
- La suite contituée des montants des loyers correspondants au premier contrat de l'activité est une suite arithmétique définie par $u_0 = 200$ € et $u_{n+1} = u_n + 5$ (qui s'arrête toutefois à $n = 36$).
- La suite formée par les nombres entiers naturels pairs est une suite arithmétique. Celle formée par les nombres entiers naturels impairs aussi.
- La suite définie par : pour tout n, $u_n = 3n - 2$ est arithmétique.
  En effet $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - (3n-2) = 3 \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + 3$ (de raison 3).
- La suite définie par : pour tout n, $u_n = n^2$ n'est pas arithmétique.
  En effet $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 \neq$ constante.
  On peut le voir encore plus facilement sur les premiers termes :
  $u_1 - u_0 = 1 \neq u_2 - u_1 = 3$

Propriété 14.2. *Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et raison r. Alors, pour tout entier naturel n et tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n$, on a :*
$u_n = u_p + (n-p)r$
Et en particulier, avec $p = 0$:
$u_n = u_0 + nr$

Remarque. Cette propriété est importante car elle transforme une suite arithmétique, définie par récurrence ($u_{n+1} = f(u_n)$), en une suite définie explicitement ($u_n = f(n)$).

Preuve.
- Commençons par démontrer par récurrence[1] le second point :
  1. Pour $n = 0$, la formule est trivialement vraie : $u_0 = u_0 + 0r$. De même pour $n = 1$: par définition de la suite, $u_1 = u_0 + 1r$.
  2. Si $u_n = u_0 + nr$ alors $u_{n+1} = u_n + r = u_0 + nr + r = u_0 + (n+1)r$.
  3. (1) La propriété est vérifiée pour $n = 0$ et $n = 1$; (2) si elle est vraie pour n alors elle est vraie pour $n+1$; (3) donc elle est vraie pour tout n.
- Démontrons alors le premier point :
  $u_p + (n-p)r = u_0 + pr + (n-p)r = u_0 + nr = u_n$

◇

Variations d'une suite arithmétique

Propriété 14.3. *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors :*
- *si $r > 0$, (u_n) est strictement croissante ;*
- *si $r < 0$, (u_n) est strictement décroissante ;*
- *si $r = 0$, (u_n) est constante.*

Preuve. Pour tout $n \geq 0$ on a $u_{n+1} - u_n = u_n + r - u_n = r$, ce qui donne le résultat. ◇

Convergence d'une suite arithmétique

Propriété 14.4. *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors*
- *si $r > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$*
- *si $r < 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$*
- *si $r = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$*

Preuve. On a $u_n = u_0 + nr = f(n)$ avec $f(x) = rx + u_0$ qui est une fonction affine. On obtient alors les limites de la propriété avec celles des fonctions affines. ◇

Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Pour obtenir ce résultat, nous avons besoin de la petite propriété suivante (on appelle ça un *lemme* : une propriété qui sert à la démonstration d'une autre)

Lemme 14.5. *Soit $S = 1 + 2 + \ldots + n$ la somme des n premiers entiers. Alors $S = 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{(1+n)n}{2}$*

[1] Voir l'exercice 10.6 pour plus de détails sur ce type de démonstration.

Preuve. Écrivons S de deux manières :

$$\begin{array}{rcccccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & \dots & + & n-1 & + & n \\ \text{et } S & = & n & + & n-1 & + & \dots & + & 2 & + & 1 \\ \text{donc } 2S & = & n+1 & + & n+1 & + & \dots & + & n+1 & + & n+1 \end{array}$$

Donc $2S = n(n+1) \Leftrightarrow S = \dfrac{(1+n)n}{2}$ ♢

Démontrons alors que :

Propriété 14.6. *Soit (u_n) une suite arithmétique et n et p deux entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n$. Alors :*

$$\sum_{i=p}^{n} u_i = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{(u_p + u_n)(n-p+1)}{2}$$

En particulier, en posant $p = 0$, on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$$

Preuve. Commençons par le second point.

Pour tout i on a $u_i = u_0 + ir$.

$$\begin{array}{lll} \sum_{i=0}^{n} u_i & = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n & = u_0 + (u_0 + r) + \dots + (u_0 + (n-1)r) + (u_0 + nr) \\ & = (n+1)u_0 + r(1 + \dots + n) & = (n+1)u_0 + r\left(\dfrac{(1+n)n}{2}\right) \text{ d'après le lemme} \\ & = \dfrac{2(n+1)u_0 + r(1+n)n}{2} & = \dfrac{(n+1)(2u_0 + nr)}{2} \\ & = \dfrac{(n+1)(u_0 + u_0 + nr)}{2} & = \dfrac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2} \text{ car } u_0 + nr = u_n \end{array}$$

Passons au premier point.

$$\begin{array}{lll} \sum_{i=p}^{n} u_i & = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n & = u_p + (u_p + r) + \dots + (u_p + (n-p)r) \\ & = (n-p+1)u_p + r(1 + \dots + (n-p)) & = \dots \\ & = \dfrac{(n-p+1)(u_p + u_p + (n-p)r)}{2} & = \dfrac{(u_p + u_n)(n-p+1)}{2} \end{array}$$

♢

Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

La somme S de termes consécutifs *d'une suite arithmétique est :*

$$S = \frac{(1^{er} \text{ terme} + \text{dernier}) \times (\text{nb de termes})}{2}$$

14.2.3 Suites géométriques

Définition et premières propriétés

Définition 14.3. On appelle *suite géométrique* toute suite (u_n) telle que

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = q \times u_n$ où $q \in \mathbb{R}$

q est appelé *la raison* de la suite géométrique.

Remarques.

1. Si $q = 0$, tous les termes de la suite, hormis peut-être u_0 sont nuls.
   Si $u_0 = 0$, tous les termes de la suite sont nuls.
   En dehors de ces deux cas triviaux, inintéressants, tous les termes de la suite sont différents de zéro.
2. Pour démontrer qu'une suite est géométrique (en dehors des deux cas triviaux), il suffit de montrer que, pour tout n, le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant. Cette constante sera alors la raison de la suite.

Exemples 14.5.

- La suite contituée des montants des loyers correspondants au second contrat de l'activité est une suite géométrique définie par $u_0 = 200$ € et $u_{n+1} = 1{,}02 u_n$ (qui s'arrête toutefois à $n = 36$).

- La suite définie par : pour tout $n \geq 1$, $u_n = 2^n$ est géométrique.
  En effet $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \Leftrightarrow u_{n+1} = 2u_n$ (de raison 2).
- La suite définie par : pour tout n, $u_n = n^2$ n'est pas arithmétique.
  En effet $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^2}{n^2} \neq$ constante.
  On peut le voir encore plus facilement sur les premiers termes :
  $\dfrac{u_2}{u_1} = 4 \neq \dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{9}{4}$

Propriété 14.7. *Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et raison q. Alors, pour tout entier naturel n et tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n$, on a :*
$u_n = q^{n-p}u_p$
Et en particulier, avec $p = 0$:
$u_n = q^n u_0$

Remarque. Cette propriété est importante car elle transforme une suite géométrique, définie par récurrence ($u_{n+1} = f(u_n)$), en une suite définie explicitement ($u_n = f(n)$).

Preuve.
- Commençons par démontrer par récurrence le second point :
  1. Pour $n = 0$, la formule est trivialement vraie : $u_0 = q^0 u_0$. De même pour $n = 1$: par définition de la suite, $u_1 = q^1 u_0$.
  2. Si $u_n = q^n u_0$ alors $u_{n+1} = qu_n = q \times q^n u_0 = q^{n+1}u_0$.
  3. (1) La propriété est vérifiée pour $n = 0$ et $n = 1$; (2) si elle est vraie pour n alors elle est vraie pour $n+1$; (3) donc elle est vraie pour tout n.
- Démontrons alors le premier point :
  $q^{n-p}u_p = q^{n-p} \times q^p u_0 = q^n u_0 = u_n$

♢

Variations d'une suite géométrique

On ne s'intéresse, en première, qu'aux variations de suites géométriques de raison positive.

Propriété 14.8. *Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \geq 0$. Alors, si $u_0 > 0$:*
- *si $q = 0$, (u_n) est stationnaire pour $n \geq 1$*
- *si $0 < q < 1$, (u_n) est strictement décroissante ;*
- *si $q = 1$, (u_n) est constante ;*
- *si $q > 1$, (u_n) est strictement croissante ;*

Remarque. Si $u_0 < 0$ les sens de variations sont inversés dans le cas $q > 1$ ou $0 < q < 1$. On l'admettra

Preuve. Hormis le premier cas, trivial : pour tout $n \geq 0$ on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$, ce qui donne le résultat. ♢

Convergence d'une suite géométrique

Propriété 14.9. *Soit (u_n) une suite géométrique de raison q telle que $u_0 > 0$. Alors :*
- *si $q < -1$, (u_n) est divergente*
- *si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$*
- *si $q = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$*
- *si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$*

Remarque. Si $u_0 < 0$ et $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

On l'admettra.

Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Pour obtenir ce résultat, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 14.10. *Soit $q \neq 1$ et $S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$. Alors $S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.*

Preuve. Remarquons que $q \times S = q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1}$.
Donc $S - qS = 1 - q^{n+1} \Leftrightarrow S(1-q) = 1 - q^{n+1}$ donc, pour $q \neq 1$, $S = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$. ◊

Démontrons alors que :

Propriété 14.11. *Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et n et p deux entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n$. Alors :*

$$\sum_{i=p}^{n} u_i = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

En particulier, en posant $p = 0$, on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Preuve. On ne démontrera que le second point.
Pour tout i on a $u_i = q^i u_0$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} u_i &= u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n & &= u_0 + q u_0 + q^2 u_0 + \ldots + q^n u_0 \\ &= u_0(1 + q + \ldots + q^n) & &= u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \end{aligned}$$ ◊

Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

La somme S de termes consécutifs *d'une suite géométrique est :*

$$S = 1^{er}\ \textit{terme} \frac{1-q^{\textit{nb de termes}}}{1-q}$$

14.3 Exercices et problèmes

14.3.1 Exercices

Exercice 14.1.
Étudier la convergence des suites :

1. $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ pour $n \geq 1$
2. $u_n = n + \dfrac{1}{n}$ pour $n \geq 1$

Exercice 14.2.
Étudier la convergence de la suite définie pour $n \geq 1$ par : $u_n = \dfrac{3\sin n + 2\cos n + 5n}{n}$

Exercice 14.3.
Pour chacune des suites données ci-dessous :

- $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $v_n = 5 - 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $w_n = (n+1)^2 - n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $x_n = \dfrac{3^n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $y_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Calculer les trois premiers termes.
2. La suite est-elle géométrique ? arithmétique ?
3. Si elle est arithmétique ou géométrique :
   (a) calculer le terme de rang 100 ;
   (b) calculer la somme des termes jusqu'au rang 100.

Exercice 14.4. 1. La suite (u_n) est artihmétique de raison $r = 8$. On sait que $u_{100} = 650$. Que vaut u_0 ?

2. La suite (u_n) est arithmétique de raison r. On sait que $u_{50} = 406$ et $u_{100} = 806$.
   (a) Déterminer r et u_0.
   (b) Calculer $S = u_{50} + u_{51} + \ldots + u_{100}$.

Exercice 14.5.
On considère une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $q = -2$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Calculer u_{20}.
3. Calculer la somme $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_{20}$.

Exercice 14.6. 1. La suite (u_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$. On sait que $u_8 = -1$. Que vaut u_0 ?

2. La suite (u_n) est géométrique de raison q. On sait que $u_4 = 10$ et $u_6 = 20$.
   (a) Déterminer q et u_0.
   (b) Calculer $S = u_{50} + u_{51} + \ldots + u_{100}$.

Exercice 14.7. 1. Calculer les sommes suivantes :
   (a) $S_1 = 1+2+3+\ldots+998+999$ et $S_2 = 2\,006+2\,007+\ldots+9\,999$
   (b) $S_3 = 1-2+4-8+16-32+\ldots+4\,096$
   (c) $S_4 = 1+3+9+27+\ldots+59\,049$ et $S_5 = 1+3+5+7+\ldots+999$
   (d) $A = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^{28}}$ et $B = 3+6+9+\ldots+99$

2. Lequel des deux nombres suivants est le plus grand ?
   - $A = 2\,005(1+2+3+\ldots+2\,006)$
   - $B = 2\,006(1+2+3+\ldots+2\,005)$

14.3.2 Problèmes

Problème 14.1.
Jean est en train de lire un livre. En additionnant les numéros de toutes les pages qu'il a déjà lues, il obtient 351. en additionnant les numéros de toutes les pages qu'il lui reste à lire, il obtient 469.

1. À quelle page en est Jean ?
2. Combien de pages comporte ce livre ?

On supposera que le livre commence à la page n°1.

Problème 14.2.
On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $u_n = \dfrac{3\times 2^n - 4n + 3}{2}$ et $v_n = \dfrac{3\times 2^n + 4n - 3}{2}$

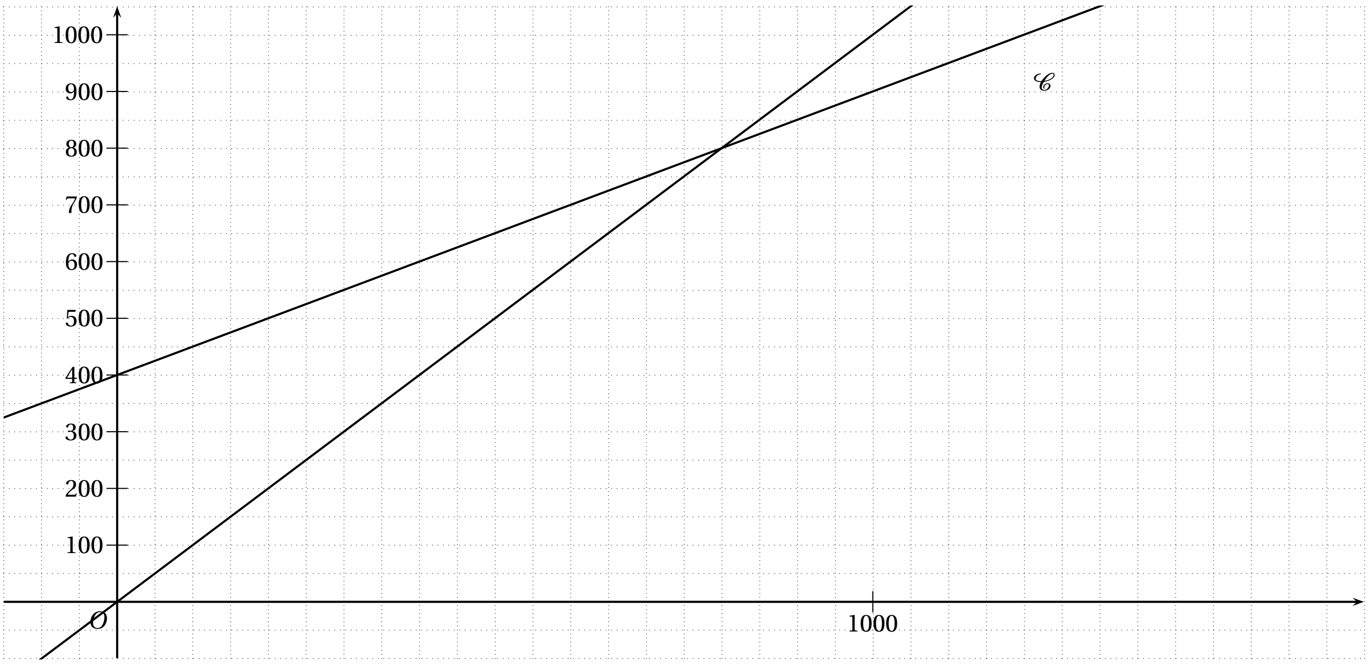
1. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n + v_n$. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique.
2. Soit (t_n) la suite définie par $t_n = u_n - v_n$. Démontrer que (t_n) est une suite arithmétique.
3. Exprimer la somme suivante en fonction de n : $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

Problème 14.3.
Un fournisseur fait une étude sur la fidélité de sa clientèle depuis l'année $n = 0$, où il y a eu 200 clients. Chaque année, sa clientèle est composée de 50% des clients de l'année précédente auxquels s'ajoutent 400 nouveaux clients.

1. Soit u_n le nombre de clients l'année n.
   Justifier que $u_{n+1} = 0,5u_n + 400$, puis calculer u_1,u_2, u_3 et u_4.
2. La fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = 0,5x + 400$ est représentée par la courbe $\mathscr{C}$ page suivante, ainsi que la première bissectrice d'équation $y = x$.
   Construire la représentation en escalier de la suite (u_n).
3. (a) Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection des deux droites
   (b) Que laisse supposer cette représentation sur la limite de la suite (u_n) ?
4. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 800$.
   (a) Vérifier que $v_{n+1} = 0,5v_n$.
   (b) Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

(c) En déduire l'expression de v_n, puis celle de u_n, en fonction de n.

(d) Étudier la limite de la suite (u_n).
Que peut on en déduire concernant le nombre de clients du fournisseur ?



Problème 14.4.

Le 1er janvier 2005, une grande entreprise compte 1500 employés.

Une étude montre que lors de chaque année à venir, 10% de l'effectif du 1er janvier partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 100 jeunes dans l'année. Pour tout entier n on appelle u_n le nombre d'employés le 1er janvier de l'année $(2005+n)$.

1. Déterminer u_0, u_1, u_2 et u_3
2. (a) Montrer que $u_{n+1} = 0,9u_n + 100$.
   (b) Cette suite est-elle arithmétique ? Cette suite est-elle géométrique ?
3. On pose $v_n = u_n - 1000$.
   (a) Déterminer v_0, v_1, v_2 et v_3.
   (b) Montrer que (v_n) est géométrique.
   (c) En déduire v_n en fonction de n.
   (d) En déduire u_n en fonction de n.
   (e) En déduire quel sera l'effectif de l'entreprise le 1er janvier de l'année 2027

Problème 14.5.

Un étudiant souhaite s'acheter une super collection de CD d'une valeur de 1000 €. Pour économiser une telle somme, il ouvre un compte épargne à la banque qui rapporte 0,25% mensuellement. À l'ouverture, il dépose 100 € le premier d'un mois, et ensuite 50 € le 1er de chaque mois. On pose $c_0 = 100$ et on note c_n le capital le premier de chaque mois après le versement initial.

1. Calculer les capitaux c_1, c_2 et c_3 du premier, deuxième et troisième mois.
2. Montrer que (c_n) vérifie une relation de récurrence de la forme $c_{n+1} = ac_n+b$, où a et b sont des réels à déterminer.
3. On pose $u_n = c_n + 20000$.
   (a) Montrer que cette suite est géométrique.
   (b) En déduire c_n puis u_n en fonction de n.
4. Montrer que (c_n) est croissante.
5. Déterminer le nombre de mois nécessaires pour l'achat de la collection.

Problème 14.6.

Une ville comprenait 300 000 habitants au premier janvier 1950. On estime que la ville accueille tous les ans 2% de nouveaux arrivants et a un taux annuel de natalité de 3%. On constate curieusement un nombre fixe de décès et de départ de 800 personnes par an. On veut déterminer à partir de quelle année la population de la ville sera supérieure au double de la population en 1950.

1. Quelle était la population estimée de la ville le premier janvier 1951 ?
2. On note p_n la population de la ville à l'année $1950+n$.
   Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
3. On pose $q_n = p_n - 16000$.
   (a) Montrer que cette suite est une suite géométrique.
   (b) Exprimer q_n puis p_n en fonction de n.
4. Montrer que $\left(p_n\right)$ est croissante.
5. Déterminer à partir de quelle année la population de la ville sera supérieure au double de la population en 1950.

Problème 14.7.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$(u_n)\begin{cases} u_0 = -7 \\ u_{n+1} = \dfrac{7u_n+36}{-u_n-5} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
2. On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n+6}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer v_0, v_1 et v_2. Que peut-on conjecturer sur la nature de (v_n) ?
   (b) Démontrer votre conjecture.
   (c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n.
   (d) Étudier la monotonie de (u_n).
   (e) Étudier la convergence de (u_n).
   (f) Calculer u_{20}.

Chapitre 15

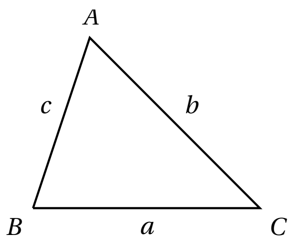
Applications du produit scalaire : Relations métriques dans le triangle Trigonométrie

Sommaire

La plupart des démonstrations nécessitent d'avoir traité le chapitre 6 sur le produit scalaire.

15.1 Relations métriques dans le triangle

Dans toute cette section, on parle d'un triangle ABC non aplati dont on note les longueurs $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$ et S son aire.



Vous avez vu en Seconde les trois cas d'isométrie de triangles.

- **Premier cas d'isométrie** : par définition, deux triangles dont les longueurs des trois côtés sont respectivement égales sont isométriques (superposables) ;
- **Deuxième cas d'isométrie** : deux triangles ayant un angle de même mesure compris entre deux côtés dont les longueurs sont respectivement égales sont isométriques (si $b = b'$, $c = c'$ et $\widehat{A} = \widehat{A'}$, alors $a = a'$) ;
- **Troisième cas d'isométrie** : deux triangles ayant un côté de même longueur adjacent à deux angles respectivement de même mesure sont isométriques (si $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ et $c = c'$, alors $a = a'$ et $b = b'$).

Dans le deuxième cas d'isométrie, cela signifie que la longueur du troisième côté est fixe et dépend à la fois des longueurs des deux autres côtés et de l'angle entre ces côtés. La formule d'AL-KASHI (paragraphe 15.1.1) précise ce lien.

Toujours dans le deuxième cas d'isométrie, les triangles étant superposables, leur aire est fixe et dépend à la fois des longueurs des deux autres côtés et de l'angle entre ces côtés. La formule de l'aire (paragraphe 15.1.2) précise ce lien.

Dans le troisième cas d'isométrie, lorsqu'on connaît la longueur d'un côté et les mesures des angles qui lui sont adjacents, la longueur des deux autres côtés est fixe et dépend de cette longueur et de ces angles. La formule des sinus (paragraphe 15.1.3) précise ce lien.

15.1.1 Formule d'AL-KASHI

Théorème 15.1. *Avec les conventions de notations vues plus haut, on a*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$

Remarques.
- Si le triangle est rectangle en A, on retrouve le théorème de PYTHAGORE qui n'en est qu'un cas particulier. La formule d'AL-KHASI s'appelle aussi *Pythagore généralisé.*
- En permutant les côtés et les angles, on a aussi :
  - $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$;
  - $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$.

Preuve.

$$\begin{aligned} a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 &= \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 \\ &= \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} \\ &= AC^2 + AB^2 - 2AC \times AB\cos\widehat{CAB} \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} \end{aligned}$$

◊

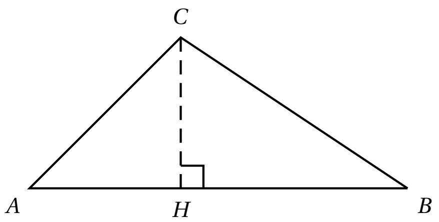
15.1.2 Formule de l'aire

Propriété 15.2. *Avec les conventions de notations vues plus haut :*

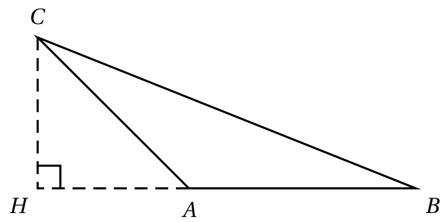
$$S = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$$

Preuve. Deux situations sont à considérer :

Situation 1
(triangle *acutangle*)



Situation 2
(triangle *obtusangle*)



L'aire du triangle est donnée par : $S = \frac{1}{2}AB \times CH$.
Or $CH = AC\sin\widehat{A}$ (situation 1) ou $CH = AC\sin\left(\pi - \widehat{A}\right) = AC\sin\widehat{A}$ (situation 2).
Dans les deux cas, $S = \frac{1}{2}AB \times AC\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$.
En permutant, on obtient les deux autres égalités. ◊

15.1.3 Formule des sinus

Propriété 15.3. *Avec les conventions de notation vues plus haut :*

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$$

Preuve. D'après ce qui précède, on a : $S = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$.

En multipliant par $\frac{2}{abc}$, on obtient $\frac{2S}{abc} = \frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c}$.

Le triangle étant non aplati, les angles sont non nuls et les sinus de ces angles aussi, on peut donc inverser ces quotients : $\frac{abc}{2S} = \frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$ ◊

Exemple 15.1. Soit ABC un triangle tel que $c = AB = 5$ cm, $\widehat{A} = 40°$ et $\widehat{B} = 30°$.

Alors $\widehat{C} = 180 - 40 - 30 = 110°$et, comme $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$, on obtient $\frac{a}{\sin 40} = \frac{b}{\sin 30} = \frac{5}{\sin 110}$ puis $a \approx 3{,}42$ cm et $b \approx 2{,}66$ cm.

15.1.4 Formule de HÉRON

Propriété 15.4. *Avec les conventions de notations vues plus haut et en notant p le demi-périmètre du triangle ($2p = a+b+c$), on a :*

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

On l'admettra.

15.2 Trigonométrie

15.2.1 Rappels

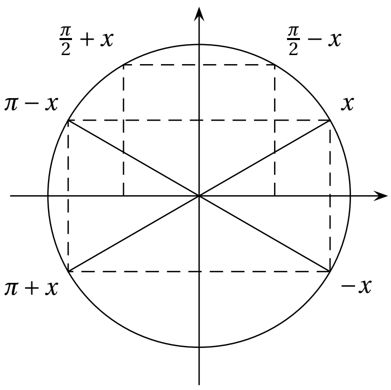
On a déjà vu, en Seconde et lors du chapitre 4 sur les angles orientés, les propriétés suivantes :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$
$$\sin(\pi - x) = \sin x$$



$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos -x = \cos x$$
$$\sin -x = -\sin x$$

Nous allons voir qu'il en existe d'autres.

15.2.2 Formules d'addition

Propriété 15.5. *Pour tous réels a et b on a :*

- $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$
- $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

15.2.3 Formules de duplication

Propriété 15.6. *Pour tout réel a on a :*

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$
- $\sin(2a) = 2\sin a\cos b$

15.2.4 Formules de linéarisation

Propriété 15.7. *Pour tout réel a on a :*

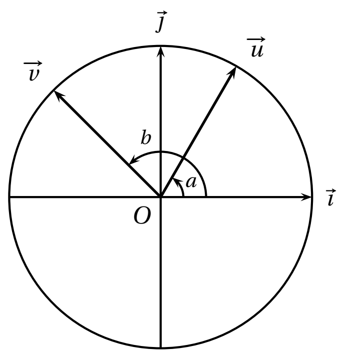
- $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$
- $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$

15.2.5 Démonstrations des formules

Le point de départ de toutes les formules

Étudions la quantité $\cos(a-b)$ où a et b sont deux nombres réels.

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ unitaires (c'est-à-dire de norme 1) et tels que $\left(\vec{\imath}\,;\vec{u}\right)=a$ et $\left(\vec{\imath}\,;\vec{v}\right)=b$ (voir le schéma).



On sait que $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{\imath}\right)+\left(\vec{\imath}\,;\vec{v}\right)=b-a$.
Or on a $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\cos(b-a)$
donc $\vec{u}.\vec{v}=\cos(b-a)=\cos(a-b)$ car $\cos x=\cos(-x)$.
On sait aussi que $\vec{u}=\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$.
Et donc $\vec{u}.\vec{v}=\cos a\cos b+\sin a\sin b$.
Ce qui nous donne la première formule de trigonométrie :

$$\boxed{\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b}$$

De celle-ci on va déduire toutes les autres.

Les autres formules d'addition

On a démontré que $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$.

Montrons que $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$:

$$\begin{aligned}\cos(a+b)&=\cos\left(a-(-b)\right)\\&=\cos a\cos(-b)+\sin a\sin(-b)\\&=\cos a\cos b-\sin a\sin b\end{aligned}$$

Montrons que $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$:

$$\begin{aligned}\sin(a-b)&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(a-b)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a+b\right)\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos b-\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin b\\&=\sin a\cos b-\cos a\sin b\end{aligned}$$

Montrons que $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$:

$$\begin{aligned}\sin(a+b)&=\sin\left(a-(-b)\right)\\&=\sin a\cos(-b)-\cos a\sin(-b)\\&=\sin a\cos b+\cos a\sin b\end{aligned}$$

Les formules de duplication

Montrons que $\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a$:

$$\cos(2a)=\cos(a+a)=\cos a\cos a-\sin a\sin a=\cos^2 a-\sin^2 a$$

Montrons que $\sin(2a) = 2\sin a \cos b$:

$$\sin(2a) = \sin(a + a) = \sin a \cos a + \cos a \sin a = 2\sin a \cos b$$

Les formules de linéarisation

Montrons que $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$:

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1$$

donc

$$\begin{aligned} \cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 &\Leftrightarrow 1 + \cos(2a) = 2\cos^2 a \\ &\Leftrightarrow \frac{1+\cos(2a)}{2} = \cos^2 a \end{aligned}$$

Montrons que $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$:

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = (1 - \sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$$

donc

$$\begin{aligned} \cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a &\Leftrightarrow \cos(2a) - 1 = -2\sin^2 a \\ &\Leftrightarrow \frac{\cos(2a)-1}{-2} = \sin^2 a \\ &\Leftrightarrow \sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2} \end{aligned}$$

15.3 Exercices

15.3.1 Relations métriques

Exercice 15.1.
ABC est un triangle tel que $a = 2$, $b = 3$ et $c = 4$.
Calculer la valeur exacte de l'aire S de ABC

Exercice 15.2.
ABC est un triangle tel que $b = 3$, $c = 8$ et $\widehat{A} = 60°$.
Calculer la valeur exacte de a ainsi que les mesures de $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ (en degrés à 10^{-1} près).

Exercice 15.3.
ABC est un triangle tel que $b = 6\sqrt{2}$, $\widehat{A} = 105°$ et $\widehat{C} = 45°$.
Calculer les valeurs exactes de a et c.

Exercice 15.4.
ABC est un triangle tel que $BC = 4$, $\widehat{B} = \frac{\pi}{4}$ rad et $\widehat{C} = \frac{\pi}{3}$ rad.

1. Montrer que $\sin\widehat{A} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
2. Calculer les valeurs exactes de AB et AC.
3. Calculer la valeur exacte de l'aire de ABC

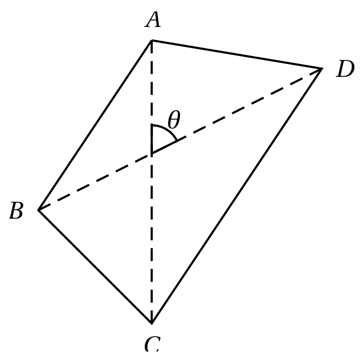
Exercice 15.5.
ABC est un triangle tel que $S = 5$ cm^2, $c = AB = 13$ cm et $b = AC = 2$ cm.
Calculer la (ou les) longueur(s) possible(s) du troisième côté $a = BC$.

Exercice 15.6.
ABC est un triangle tel que $AB = 7$, $AC = 4$ et $\widehat{A} = 60°$.

1. Calculer la valeur exacte de BC.
2. Calculer la valeur exacte de $\sin\widehat{B}$.

Exercice 15.7.
ABC est un triangle. Démontrer que $|b - c| \leq a \leq b + c$.

Exercice 15.8.
$ABCD$ est un quadrilatère convexe. On note θ l'angle entre ses deux diagonales (AC) et (BD). Démontrer que l'aire S du quadrilatère $ABCD$ est donnée par :



$$S = \frac{1}{2} \times AC \times BD \sin\theta$$

Exercice 15.9.
Un promeneur marche 5 km en direction de l'Est, puis 2 km en direction du Nord-Est. Surpris par le mauvais temps, il retourne directement à son point de départ en courant.

Sur quelle distance d a-t-il couru ? (On donnera la valeur exacte, puis la valeur approchée arrondie à 10 m).

Exercice 15.10.
Montrer que :

$$ABC \text{ est un triangle rectangle en } A \Leftrightarrow \sin^2\widehat{A} = \sin^2\widehat{B} + \sin^2\widehat{C}$$

15.3.2 Trigonométrie

Exercice 15.11.
Montrer que, pour tous réels a et b : $\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$

Exercice 15.12.
En utilisant les formules d'addition, calculer la valeur exacte de $\sin\frac{7\pi}{12}$ et $\cos\frac{7\pi}{12}$.
On pourra utiliser l'égalité $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$.

Exercice 15.13.
Montrer que, pour tout réel x : $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)$

Exercice 15.14.
Montrer que, pour tout réel x différent de $k\frac{\pi}{2}$, où $k \in \mathbb{Z}$: $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = 2$

Exercice 15.15.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
- $2\sin^3 x - 17\sin^2 x + 7\sin x + 8 = 0$;
- $2\cos^3 x - 7\cos^2 x + 3 = 0$;
- $2\sin^3 x + \cos^2 x - 5\sin x - 3 = 0$.

Exercice 15.16.
Dans cet exercice, on dipose de la donnée suivante : $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.
On rappelle que $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ pour tout $x \in D = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ où $k \in \mathbb{Z}$.

1. Démontrer que pour tout $x \in D$: $\tan(\pi + x) = \tan x$. En déduire la valeur exacte de $\tan\dfrac{9\pi}{8}$.
2. Démontrer que pour tout $x \in D$: $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. En déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{8}$ puis de $\sin\dfrac{\pi}{8}$.
3. Calculer la valeur exacte de $\cos\dfrac{5\pi}{8}$.

Exercice 15.17.
Dans cet exercice, on dipose de la donnée suivante : $\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

1. Soit $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$. Démontrer que $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{1}{\tan x}$.
2. En déduire que $\tan\frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$.

Exercice 15.18.
Dans cet exercice on donne : $\cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. Calculer la valeur exacte de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ puis de $\cos\dfrac{3\pi}{5}$

Exercice 15.19.
Démontrer que, pour tout $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$: $\tan x = \dfrac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)}$. En déduire les valeurs exactes de $\tan\dfrac{\pi}{8}$ et $\tan\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 15.20.
ABC est un triangle non rectangle.

1. Démontrer que $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$.
2. Démontrer que $\tan(A+B) = -\tan C$.
3. En déduire la relation : $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \times \tan B \times \tan C$

Chapitre 16

Transformations

Sommaire

Ce chapitre fait appel à la notion de coplanarité, traitée dans le chapitre 2, à celle de barycentre, traitée dans le chapitre 11 et à celle d'angle de vecteurs, traitée dans le chapitre 4.

16.1 Introduction

Vous avez vu depuis l'entrée au collège les transformations du plan suivantes : les symétries axiales (en Sixième), les symétries centrales (en Cinquième), les translations (en Quatrième et en Troisième) et les rotations (en Troisième). Nous allons étendre la définition de quelques unes d'entre elles à l'espace.

Nous en instituerons une nouvelle : celle qui est sous-jacente derrière THALÈS ou les réductions et agrandissements vus au collège.

Enfin nous regarderons leurs effets sur les nouveaux objets géométriques introduits cette année : les angles orientés de vecteurs et les barycentres.

Remarque. La définition mathématique exacte de ce qu'est une transformation t du plan (ou de l'espace) n'est pas au programme mais elle est aisément compréhensible pour un élève de Première : c'est une *bijection* du plan (ou de l'espace) dans lui même, c'est-à-dire que :

- chaque point M du plan (ou de l'espace) a pour image un unique point $t(M) = M'$ du plan (ou de l'espace)[1] ;
- chaque point M' du plan (ou de l'espace) a un unique antécédent M par t dans le plan (ou l'espace).

Exemples 16.1.

- La fonction qui à x associe x^2 n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ car, si chaque réel x a bien une unique image dans $\mathbb{R}$, certains réels *n'ont pas* d'antécédents (les réels strictement négatifs) et certains réels en ont *plusieurs* (les antécédents de 4 sont 2 et -2, par exemple).
- La fonction qui à x associe son inverse est une bijection de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ car chaque réel $x \neq 0$ à une unique image dans $\mathbb{R}^*$ et chaque réel $y \neq 0$ à un unique antécédent dans $\mathbb{R}^*$.
- L'application qui à chaque point de l'espace associe son projeté orthogonal sur une droite Δ n'est pas une bijection du plan vers la droite Δ car si chaque point du plan a bien une unique image dans Δ, chaque point de Δ à *plusieurs* antécédents dans le plan.

[1] de la même manière qu'une fonction numérique associe à chaque nombre de son ensemble de définition un unique nombre

- L'application qui à chaque point d'une droite D non perpendiculaire à Δ qui associe à chaque point de D son projeté orthogonal sur Δ est, elle, une bijection de D vers Δ car chaque point de D à une unique image dans Δ et chaque point de Δ à un unique antécédent dans D.
- Une translation de vecteur $\vec{u}$ est une bijection du plan dans lui-même car chaque point M du plan a une unique image dans le plan : le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$; et chaque point N du plan a un unique antécédent dans le plan : le point N' tel que $\overrightarrow{N'N} = \vec{u}$. Étant une *bijection du plan dans lui-même* on dit que c'est *une transformation du plan*.

16.2 Symétries, rotations, translations

Procédons à quelques rappels (les propriétés ne seront donc pas démontrées).

16.2.1 Définitions

Définition 16.1. Une *symétrie d'axe* Δ ou *réflexion d'axe* Δ est une transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que Δ est la médiatrice du segment $[MM']$. On la note généralement S_Δ ou S quand il n'y a pas de risque de confusion.

Définition 16.2 (vectorielle)**.** Une *symétrie de centre* Ω est une transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$. On la note généralement S_Ω ou S quand il n'y a pas de risque de confusion.

Définition 16.3. Une *translation de vecteur* $\vec{u}$ est une transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. On la note généralement $t_{\vec{u}}$ ou t quand il n'y a pas de risque de confusion.

Définition 16.4. Une *rotation de centre* Ω *et d'angle* θ est une transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que $\Omega M = \Omega M'$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta$. On la note généralement $r(\Omega; \theta)$ ou r quand il n'y a pas de risque de confusion.

16.2.2 Ensembles invariants

Définition 16.5. Soit t une transformation du plan (ou de l'espace).
L'ensemble $\mathscr{I}$ des points I du plan (ou de l'espace) tels que $t(I) = I$ est appelé l'ensemble des *points invariants* par t.

Propriété 16.1. *On note $\mathscr{P}$ le plan.*
- *Soit S la symétrie d'axe Δ. L'ensemble $\mathscr{I}$ des points du plan invariants par S est $\mathscr{I} = \Delta$.*
- *Soit S la symétrie de centre Ω. L'ensemble $\mathscr{I}$ des points du plan invariants par S est $\mathscr{I} = \{\Omega\}$.*
- *Soit t la translation de vecteur $\vec{u}$. L'ensemble $\mathscr{I}$ des points du plan invariants par t est $\mathscr{I} = \varnothing$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\mathscr{I} = \mathscr{P}$ si $\vec{u} = \vec{0}$.*
- *Soit r la rotation de centre Ω et d'angle θ. L'ensemble $\mathscr{I}$ des points du plan invariants par r est $\mathscr{I} = \{\Omega\}$ si $\theta \neq 0$, $\mathscr{I} = \mathscr{P}$ si $\theta = 0$.*

16.2.3 Propriétés

Ces quatre transformations ont les propriétés communes suivantes :
- Elles conservent les longueurs (on dit que ce sont des *isométries*) :
  Soient M et N deux points du plan et M' et N' leurs images, alors $MN = M'N'$.
- Elles conservent les rapports de longueurs (en particulier les milieux) :
  Soient M, N et P trois points du plan et M', N' et P' leurs images, si $MN = kMP$ alors $M'N' = kM'P'$.
- Elles conservent l'alignement et le parallélisme :
  Soient M, N et P trois points du plan et M', N' et P' leurs images, si $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{MP}$ alors $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{M'P'}$ (alignement) ;
  Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et $\vec{u'}$ et $\vec{v'}$ leurs images, si $\vec{u} = k\vec{v}$ alors $\vec{u'} = k\vec{v'}$ (parallélisme).
- Elles conservent les mesures des angles *géométriques* (en particulier l'orthogonalité) :
  Soient M, N et P trois points du plan et M', N' et P' leurs images, alors $\widehat{MNP} = \widehat{M'N'P'}$.

16.2.4 Transformations réciproques

Définition 16.6. Deux transformations t et t' sont réciproques si, pour tout M du plan (ou de l'espace), $(t \circ t')(M) = M$. On note alors $t' = t^{-1}$.

Propriété 16.2. • *Soit S une symétrie (axiale ou centrale) alors $S^{-1} = S$.*
- *Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ alors $t^{-1} = t_{-\overrightarrow{u}}$.*
- *Soit r la rotation de centre Ω et d'angle θ alors $r^{-1} = r(\Omega; -\theta)$.*

16.2.5 Extension à l'espace

Les translations et symétries centrales étant définies entièrement de façon vectorielle, leur définition se prolonge naturellement à l'espace à ceci près qu'on associe une image à tout point de l'espace. Les propriétés du plan restent valables. À celles-ci viennent s'ajouter les propriétés suivantes qu'on admettra :

Propriété 16.3. • *Une translation ou une symétrie centrale conservent la coplanarité et l'image d'un plan par ces transformations est un plan parallèle.*
- *Si deux plans sont parallèles (resp. perpendiculaires), leurs images par une translation ou une symétrie centrale sont des plans parallèles (resp. perpendiculaires).*
- *L'image d'une sphère de centre C par une translation ou une symétrie centrale est une sphère de même rayon et de centre C' l'image de C et, plus généralement, l'image d'un polyèdre est un polyèdre de mêmes dimensions.*
- *Une translation ou une symétrie centrale conservent les volumes.*

16.3 L'homothétie

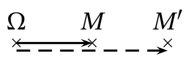
16.3.1 Définition et conséquences

Définissons vectoriellement la transformation sous-jacente derrière THALÈS ou les agrandissements et réductions vus au collège.

Définition 16.7. Soit Ω un point du plan ou de l'espace et k un réel non nul.
On appelle *homothétie de centre Ω et de rapport k* la transformation qui à tout point M du plan ou de l'espace associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.
On la note généralement $h(\Omega; k)$ ou h quand il n'y a pas de risque de confusion.

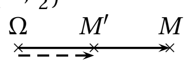
Exemples 16.2. Prenons trois exemples :

$h(\Omega; 2)$



$h(\Omega; -2)$

$h\left(\Omega; \frac{1}{2}\right)$



La définition induit la première propriété suivante :

Théorème 16.4. *Soit $h(\Omega; k)$ l'homothétie de centre Ω et de rapport k, M un point quelconque du plan et $M' = h(M)$. Alors Ω, M et M' sont alignés.*

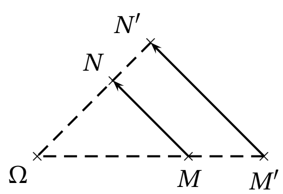
Preuve. Triviale. ◊

On obtient aussi facilement la propriété fondamentale suivante :

Théorème 16.5. *Soit $h(\Omega; k)$ l'homothétie de centre Ω et de rapport k, M et N deux points quelconque du plan (ou de l'espace), $M' = h(M)$ et $N' = h(N)$. Alors : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.*

Preuve. $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'\Omega} + \overrightarrow{\Omega N'} = k\overrightarrow{M\Omega} + k\overrightarrow{\Omega N} = k\overrightarrow{MN}$. ◊

Exemple 16.3. Considérons l'homothétie de centre Ω et de rapport 1,5 :



On retrouve une configuration de THALÈS.

Remarque. Selon les valeurs de k, on a :

- si $k = 1$, tous les points du plan ou de l'espace sont invariants (on dit que l'homothétie est la transformation *identité*) ;
- si $k = -1$, l'homothétie est la symétrie de centre Ω ;
- si $-1 < k < 1$, l'homothétie est une réduction ;
- si $|k| > 1$, l'homothétie est un agrandissement.

16.3.2 Propriétés de l'homothétie

Points invariants

Propriété 16.6. *Soit $\mathscr{P}$ le plan (ou $\mathscr{E}$ l'espace) et $h(\Omega; k)$ une homothétie du plan $\mathscr{P}$ (ou de l'espace $\mathscr{E}$).*

- *Si $k = 1$, chaque point est invariant et donc l'ensemble $\mathscr{I}$ des points invariants du plan $\mathscr{P}$ (ou de l'espace $\mathscr{E}$) est $\mathscr{P}$ lui-même (ou $\mathscr{E}$ lui-même).*
- *Si $k \neq 1$, $\mathscr{I} = \{\Omega\}$.*

Preuve. On cherche l'ensemble des points I tels que $\overrightarrow{\Omega I} = k\overrightarrow{\Omega I} \Leftrightarrow (1-k)\overrightarrow{\Omega I} = \overrightarrow{0}$. Donc soit $k = 1$ et tous les points conviennent, soit $k \neq 1$ et dans ce cas $\overrightarrow{\Omega I} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \Omega = I$. ◇

Transformation réciproque

Propriété 16.7. *Soit h une homothétie du plan (ou de l'espace) de centre Ω et de rapport k. Alors $h^{-1} = h\left(\Omega; \frac{1}{k}\right)$.*

Preuve. Notons $h' = h\left(\Omega; \frac{1}{k}\right)$.
$h(M) = M'$ tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.
$h' \circ h(M) = h'(M') = M''$ c'est-à-dire le point M'' tel que :
$\overrightarrow{\Omega M''} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega M'} = \frac{1}{k}\left(k\overrightarrow{\Omega M}\right) = \overrightarrow{\Omega M}$ donc $M'' = M$. ◇

Conservations

- L'homothétie **ne conserve pas** les longueurs quand $|k| \neq 1$.
  On a vu que $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$, donc $M'N' = |k|MN$. Il en résulte que, lorsque $k \neq 1$ et $k \neq -1$, une homothétie n'est pas une isométrie. Plus précisément on admettra la propriété suivante :

  Propriété 16.8. *Une homothétie de rapport k multiplie*
  · *les longueurs par $|k|$,* · *les aires par $|k|^2 = k^2$,* · *les volumes par $|k|^3 (\neq k^3)$.*
- L'homothétie **conserve** :
  · *les rapports de longueurs* :
  Soient M, N, P et Q quatre points distincts et M', N', P' et Q' leurs images respectives par l'homothétie h de rapport k.
  On a $\dfrac{M'N'}{P'Q'} = \dfrac{|k|MN}{|k|PQ} = \dfrac{MN}{PQ}$.
  · *l'alignement et le parallélisme* :
  $\overrightarrow{MN} = c\overrightarrow{MP} \Leftrightarrow k\overrightarrow{MN} = kc\overrightarrow{MP} \Leftrightarrow \overrightarrow{M'N'} = c\overrightarrow{M'P'}$;
  $\overrightarrow{u} = c\overrightarrow{v} \Leftrightarrow k\overrightarrow{u} = kc\overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u'} = c\overrightarrow{v'}$.
  · *les angles géométriques* (en particulier les angles droits).
  Nous verrons cela en même temps que les effets d'une homothétie sur les angles orientés (paragraphe 16.4).

Images de quelques figures usuelles

Propriété 16.9. *L'image d'une droite Δ par une homothétie est une droite Δ' parallèle à Δ*

Preuve. Soit A un point de Δ et $\overrightarrow{v}$ un vecteur directeur de Δ ; on a alors $\Delta = \left(A; \overrightarrow{v}\right)$.
Considérons la droite $\Delta' = \left(A'; \overrightarrow{v}\right)$ où $A' = h(A)$.

- Tout point M de Δ est tel qu'il existe un réel c tel que $\overrightarrow{AM} = c\overrightarrow{v}$, donc $M' = h(M)$ est tel que $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM} = kc\overrightarrow{v}$ et il appartient bien à Δ' et on a $h(\Delta) \subset \Delta'$.
- Tout point de N de Δ' est tel qu'il existe un réel c tel que $\overrightarrow{A'M'} = c\overrightarrow{v}$, mais alors on peut trouver un point N sur Δ dont N' est l'image : le point tel que $\overrightarrow{AN} = \frac{c\overrightarrow{v}}{k}$ et on a $\Delta' \subset h(\Delta)$.

Finalement, comme $\Delta' \subset \left(A'; \overrightarrow{v}\right)$ et $\left(A'; \overrightarrow{v}\right) \subset \Delta'$, on peut en conclure que $\left(A'; \overrightarrow{v}\right) = \Delta'$.
Or $\left(A'; \overrightarrow{v}\right)$ est parallèle à $\left(A; \overrightarrow{v}\right) = \Delta$. ♢

Remarque. Pour tracer l'image d'une droite Δ, il suffit de connaître l'image d'un point de cette droite puis de tracer la parallèle à Δ passant par cette image.

Propriété 16.10. *L'image d'un segment $[AB]$ par une homothétie de rapport k est un segment $[A'B']$ ayant la même direction que celle de $[AB]$ et de longueur $A'B' = |k|AB$.*

Preuve. La démonstration est identique à la précédente avec un réel $0 \leq c \leq 1$. ♢

Propriété 16.11. *L'image d'un plan par une homothétie est un plan parallèle.*
L'homothétie conserve la coplanarité.

Preuve. La démonstration est identique à la précédente avec le plan $\mathscr{P} = \left(A; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ et le plan $\mathscr{P}' = \left(A'; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. ♢

Propriété 16.12. *L'image d'un triangle (resp. d'un quadrilatère, d'un polygone) par une homothétie est un triangle (resp. un quadrilatère, un polygone) semblable.*

Preuve dans le cas d'un triangle. Soit un triangle de mesures a, b et c. L'image de chaque côté est un segment, donc l'image du triangle est bien un triangle. Comme de plus $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = |k|$, les deux triangles sont donc semblables. ♢

Propriété 16.13. *L'image d'un cercle $\mathscr{C}(\Omega; r)$ par une homothétie h de rapport k est un cercle $\mathscr{C}'(\Omega'; r')$ tel que $\Omega' = h(\Omega)$ et $r' = |k|r$.*
L'image d'une sphère $\mathscr{S}(\Omega; r)$ par une homothétie h de rapport k est une sphère $\mathscr{S}'(\Omega'; r')$ telle que $\Omega' = h(\Omega)$ et $r' = |k|r$.

On l'admettra.

16.4 Transformations et angles orientés

Propriété 16.14. *Une symétrie centrale, une translation, une rotation ou une homothétie conservent les mesures des angles orientés : $\left(\overrightarrow{u'}; \overrightarrow{v'}\right) = \left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}\right)$*
Une symétrie axiale transforme un angle orienté en un angle orienté de mesure opposée : $\left(\overrightarrow{u'}; \overrightarrow{v'}\right) = -\left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}\right)$

Preuve. Soient A, B et C tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. On note A', B', C' $\overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{v'}$ leurs images respectives.

- Translation t de vecteur $\overrightarrow{w}$.
  $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{w} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB}$ et, de même, $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$.
  Donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u'}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v'}$ et $\left(\overrightarrow{u'}; \overrightarrow{v'}\right) = \left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}\right)$
- Homothétie h de rapport k.
  $\left(\overrightarrow{u'}; \overrightarrow{v'}\right) = \left(k\overrightarrow{u'}; k\overrightarrow{v'}\right) = \left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}\right)$ d'après les propriétés des angles orientés.
- Symétrie centrale.
  Une symétrie centrale est une homothétie de rapport -1, donc elle conserve les angles orientés.
- Symétrie axiale : on l'admettra.

♢

Remarque. Comme $\widehat{ABC} = \left|\left(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}\right)\right|$, les angles géométriques sont donc conservés pour toutes ces transformations.

16.5 Transformations et barycentres

Propriété 16.15. *Les symétries, translation, rotation et homothétie conservent les barycentres : si G est le barycentre d'un système de points pondérés alors son image G' est le barycentre des images des points pondérés des mêmes coefficients.*

Preuve. Nous ne la ferons que dans le cas de trois points mais elle est identique pour un nombre n fini quelconque de points.

- Translation t : on sait que $\overrightarrow{u'} = \overrightarrow{u}$ donc $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{G'A'} + \beta\overrightarrow{G'B'} + \gamma\overrightarrow{G'C'} = \overrightarrow{0}$
- Homothétie h de rapport k : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \alpha k\overrightarrow{GA} + \beta k\overrightarrow{GB} + \gamma k\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{G'A'} + \beta\overrightarrow{G'B'} + \gamma\overrightarrow{G'C'} = \overrightarrow{0}$
- Symétrie centrale : c'est une homothétie de rapport -1.
- Symétrie axiale : admis.

♢

16.6 Exercices

Sauf indication contraire, dans tous les exercices on se place dans le plan.

Exercice 16.1.

Partie A

$\mathscr{C}$ est un cercle de centre O, M est un point de $\mathscr{C}$. La médiatrice de $[OM]$ coupe $\mathscr{C}$ en deux points P_1 et P_2. On note s la réflexion d'axe (OM).

1. Démontrer que l'image de P_1 par s est P_2.
2. Démontrer que l'image par s de la tangente à $\mathscr{C}$ en P_1 est la tangente à $\mathscr{C}$ en P_2.
3. En déduire que les tangentes à $\mathscr{C}$ en P_1 et P_2 et la droite (OM) sont concourantes en un point O' puis que $O'P_1 = O'P_2$.

Partie B

Dans la figure 16.1 de la présente page, les trois droites sont tangentes au cercle. On sait que $AT = 4$ cm. Quel est le périmètre du triangle ABC ?

On pourra utiliser les résultats de la partie A.

FIG. 16.1 – Figure de l'exercice 16.1

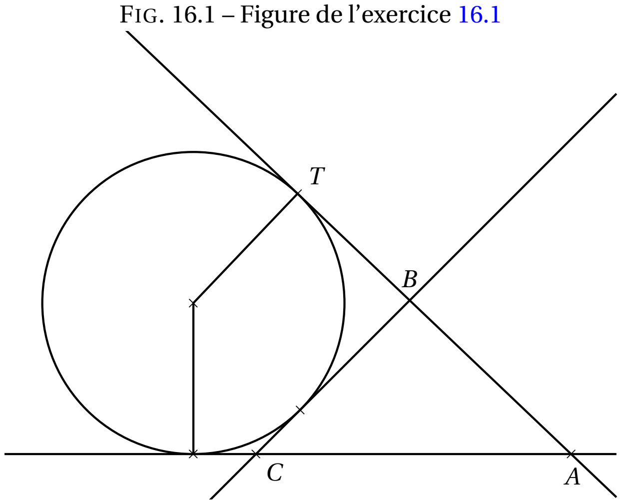
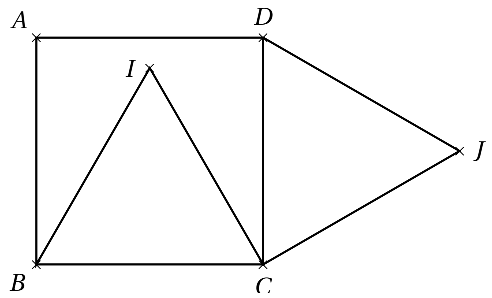


FIG. 16.2 – Figure de l'exercice 16.2



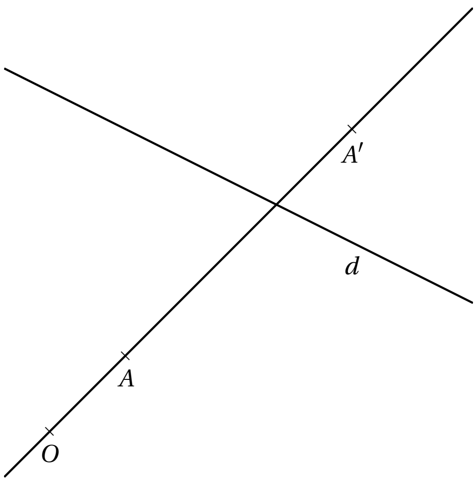
Exercice 16.2.

Dans la figure 16.2 de la présente page, $ABCD$ est un carré de sens direct et les triangles DCJ et BCI sont équilatéraux de sens direct.

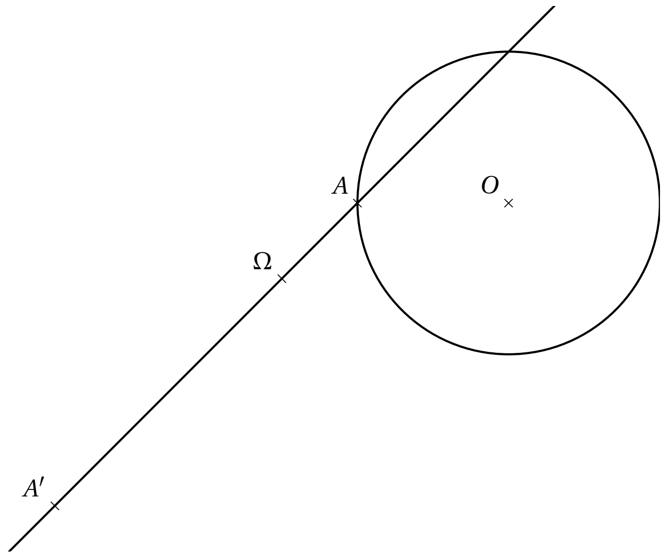
1. Soit K le point tel que AKC soit équilatéral de sens direct. Montrer que B, D et K sont alignés.
2. À l'aide d'une transformation, montrer que les points A, I et J sont alignés et que $BD = IJ$.

Exercice 16.3.

Construire l'image de la droite d par l'homothétie de centre O qui transforme A en A'.



Exercice 16.4.
$\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon r. A est un point de $\mathscr{C}$. Soit h l'homothétie de centre Ω transformant A en A'. Construire le cercle $\mathscr{C}'$, image de $\mathscr{C}$ par h (justifier).



Exercice 16.5.
Soit h une homothétie de centre O de rapport $k \neq 1$. Montrer qu'une droite d est globalement invariante par h si et seulement si O appartient à d.

Exercice 16.6.
Soit ABC un triangle, A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

1. Montrer qu'il exite une homothétie h de centre C transformant B en A' et A en B'.
   Donner en fonction de l'aire $\mathscr{A}$ du triangle ABC, l'aire $\mathscr{A}_1$ du triangle $A'B'C$.
2. De la même manière, donner en fonction de $\mathscr{A}$, les aires $\mathscr{A}_2$ et $\mathscr{A}_3$ des triangles $AB'C'$ et $A'BC'$.
3. Déduire des question précédentes que l'aire $\mathscr{A}'$ du triangle $A'B'C'$ est le quart de l'aire $\mathscr{A}$.
4. Retrouver ce résultat en utilisant une homothétie de centre G, isobarycentre de A, B et C.

Exercice 16.7.
Soit ABC un triangle, A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

1. Montrer que A', B' et C' sont les images des sommets par une homothétie h que l'on précisera.
2. Montrer que h transforme les hauteurs en les médiatrices des côtés.
3. Justifier que h transforme l'orthocentre H en O le centre du cercle circonscrit à ABC.
4. En déduire que le centre de gravité G du triangle, H et O sont alignés.
   Remarque. La droite qui contient ces trois points est appellée *droite d'Euler* du triangle.

Exercice 16.8.
On considère un trapèze $ABCD$ de bases $[AB]$ et $[CD]$ et O le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD).

1. Justifier qu'il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA}$.
2. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k. Déterminer $A' = h(A)$.
3. Soit $B' = h(B)$. Justifier que $B' \in (CD)$. En déduire que $B' = D$.
4. Soient I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.
   En utilisant h, montrer que O, I et J sont alignés.
5. On suppose dans cette question que $ABCD$ n'est pas un parallélogramme.
   Soit O' le point d'intersection des droites (AD) et (BC).
   (a) Montrer que O', I et J sont alignés.
   (b) En déduire un moyen d'obtenir, à la règle seulement, les milieux des bases d'un trapèze qui n'est pas un parallélogramme.

Exercice 16.9.
On considère un trapèze $ABCD$ de bases $[AB]$ et $[CD]$ et O le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD).

1. Justifier qu'il existe une homothétie h de centre O trasnformant (AB) en (CD). Soit k son rapport.

2. Exprimer $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AO}$ et de k.
3. La droite Δ passant par O et parallèle à (CD) coupe (AD) en E et (BC) en F.
   Exprimer $\overrightarrow{OE}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$.
4. Montrer que O est le milieu de $[EF]$.
5. Les droites (BE) et (AF) coupent (CD) respectivement en K et en F.
   Montrer que $\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CL}$.

Exercice 16.10.

On considère un parallélogramme $ABCD$. Soit I le milieu de $[CD]$, J le point d'intersection des droites (BI) et (AC) et K le point d'intersection des droites (AI) et (BD).

1. Que représente J pour le triangle BCD ?
2. Déterminer une homothétie h transformant (JK) en (AB).
3. Justifier que (JK) est aprallèle à (AB).
4. Que représente l'aire du triangle IJK par rapport à l'aire du parallélogramme ?

Exercice 16.11.

Soit ABC un triangle, A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

À tout point M on associe le point $f_k(M) = M'$ défini par : $\overrightarrow{MM'} = k\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$.

1. Montrer que l'application $f_{\frac{1}{2}}$ est une homothétie dont on précisera les caractéristiques.
   Quelle est alors l'image du triangle ABC par f ?
2. Montrer que l'application f_{-1} est une translation dont on précisera les caractéristiques.
3. Donner la nature et les éléments caractéristiques de f_k lorsque $k \neq -1$.

Exercice 16.12.

On considère deux points distincts A et B. On considère les applications u et v qui à tout point M du plan associent respectivement $u(M) = I$ milieu de $[AM]$ et $v(M) = G$ barycentre de $\{(A\,;-1)\,;(B\,;2)\,;(M\,;1)\}$.

1. Faire une figure.
2. Montrer que u et v sont des transformations du plan dont on précisera les caractéristiques.
3. En déduire :
   (a) les lieux des points I et G lorsque M décrit le cercle de diamètre $[AB]$;
   (b) les lieux des points I et G lorsque M décrit la droite perpendiculaire à (AB) passant par B.

Exercice 16.13.

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et A un point de ce cercle.
On considère l'application g qui :

- à tout point $M \neq A$ associe $g(M) = M'$ le projeté orthogonal de O sur la corde $[AM]$;
- à A associe $g(A) = A$.

1. Montrer que g est une transformation dont on précisera les caractéristiques.
2. En déduire le lieu des points M' lorsque M décrit $\mathscr{C}$.

Exercice 16.14.

On se place pour cet exercice dans l'espace.
On considère le cube $ABCDEFGH$, I, J et K les milieux respectifs de $[AE]$, $[AH]$ et $[AG]$ et L le symétrique de A par rapport à G.
On appelle t la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$ et h_1 l'homothétie $h(A\,;2)$ et h' l'homothétie $h'\left(L\,;-\frac{1}{2}\right)$. Sur la figure 16.14 page suivante :

1. Construire I, J, K et L.
2. Construire $t(I) = I_1$, $t(J) = J_1$ et $t(K) = K_1$.
3. Construire $h(I) = I_2$, $h(J) = J_2$ et $h(K) = K_2$.
4. Construire $h'(I) = I_3$, $h'(J) = J_3$ et $h'(K) = K_3$.
5. Construire enfin en bleu, vert et rouge les images du cube $ABCDEFGH$ par, respectivement, t, h et h'

Exercice 16.15.

On donne deux demi-droites d et d' de même origine O et un point A situé dans l'angle aigu formé par ces deux demi-droites (voir la figure 16.3 page ci-contre). Construire *à la règle et au compas* un cercle passant par ce point et tangent aux deux demi-droites.
On pourra d'abord rechercher l'ensemble des cercles du plan qui sont tangents aux deux demi-droites.

Figure de l'exercice 16.14

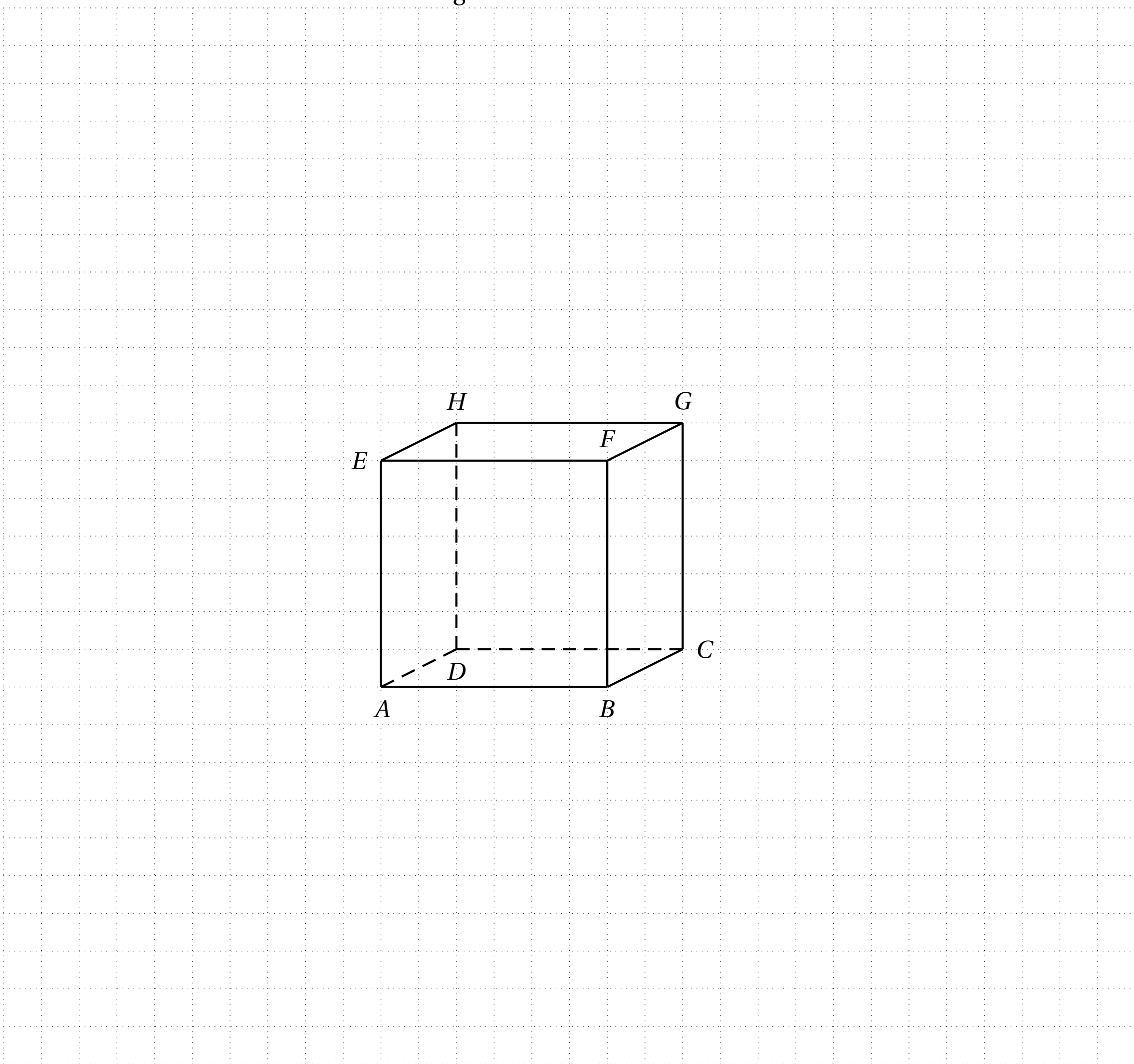
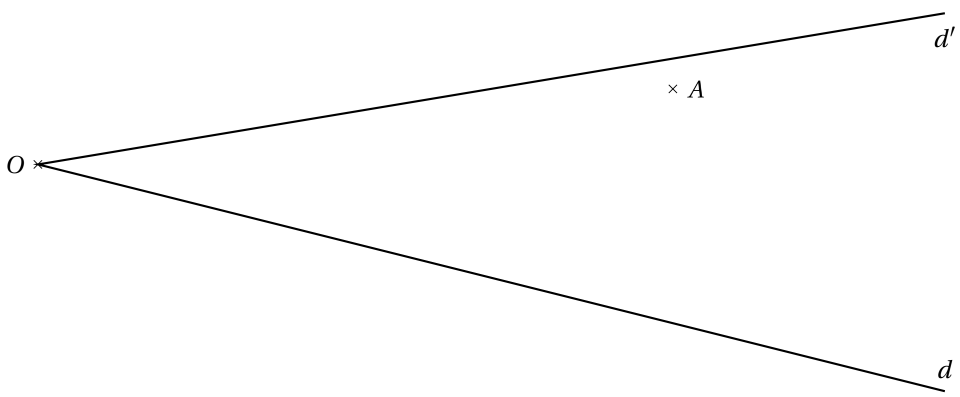


FIG. 16.3 – Figure de l'exercice 16.15



Chapitre 17

Coordonnées polaires

Sommaire

Ce chapitre fait appel à la notion d'angle de vecteurs, traitée dans le chapitre 4 et nécessite quelques outils de trigonométrie du même chapitre ou rappelés dans le chapitre 15. De plus certaines démonstrations font appel au produit salaire traité dans le chapitre 6.

17.1 Coordonnées polaires

17.1.1 Activité

Le plan est muni d'un repère $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$orthonormal et orienté.

1. (a) Placer dans le plan les points A_1, A_2, A_3 et A_4 de coordonnées respectives $(1;1)$, $\left(-1;\sqrt{3}\right)$, $\left(-2\sqrt{3};-2\right)$ et $(4;-4)$.
   (b) Pour tout i variant de 1 à 4, déterminer OA_i et $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OA_i}\right)$.
2. (a) Placer dans ce même repère les points B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 et B_6 sachant que :
   - $OB_1 = 3$ et $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OB_1}\right) = \frac{\pi}{2}$;
   - $OB_2 = 2$ et $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OB_2}\right) = \pi$;
   - $OB_3 = 1$ et $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OB_3}\right) = -\frac{\pi}{4}$;
   - $OB_4 = 3$ et $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OB_4}\right) = \frac{5\pi}{2}$;
   - $OB_5 = 2$ et $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OB_5}\right) = \frac{\pi}{3}$;
   - $OB_6 = 0$.

   (b) Pour tout i variant de 1 à 6, déterminer les coordonnées de B_i.

17.1.2 Définitions

Définition 17.1. Le plan est muni d'un point O et d'un vecteur $\vec{\imath}$. Les coordonnées polaires d'un point M du plan distinct sont les réels ρ et θ tels que :

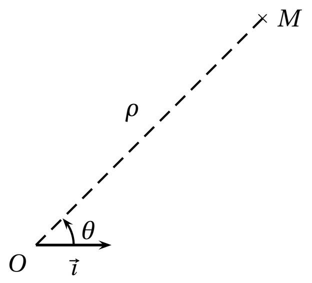
- si $M \neq O$, $\begin{cases} \rho = OM \\ \theta = \left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OM}\right) \end{cases}$
- si $M = O$, $\rho = 0$ et θ quelconque.

On note alors $M[\rho\,;\theta]$ ou $M(\rho\,;\theta)$ s'il n'y a pas de risque de confusion avec un système de coordonnées cartésiennes.

Remarques.
- La figure 17.1 page suivante précise le rôle de ρ et de θ dans les coordonnées polaires.
- Si chaque couple $[\rho\,;\theta]$ définit bien un unique point, un point a plusieurs coordonnées polaires possibles : $M = [\rho\,;\theta] = [\rho\,;\theta+2\pi] =$ etc.
- O est appelé le *pôle* du repère et la droite $\left(O;\vec{\imath}\right)$ l'*axe polaire*.

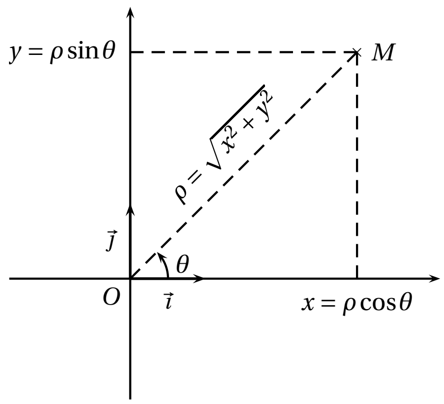
17.1.3 Lien entre coordonnées polaires et cartésiennes

FIG. 17.1 – ρ et θ



Propriété 17.1. *Le plan est muni d'un repère cartésien $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$orthonormal et orienté dans le sens direct et du repère polaire $\left(O;\overrightarrow{\imath}\right)$. On note $(x;y)$ et $[\rho;\theta]$ les coordonnées, respectivement cartésiennes et polaires de M. Alors on a :*

$$\left\{\begin{array}{l} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{array}\right. \quad et \quad \left\{\begin{array}{l} \rho=\sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \ si\ \rho\neq 0 \\ \sin\theta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \ si\ \rho\neq 0 \end{array}\right.$$



Preuve.
- On sait que $x=\overrightarrow{\imath}.\overrightarrow{OM}=\|\overrightarrow{\imath}\|\times\|\overrightarrow{OM}\|\times\cos\left(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{OM}\right)=1\times OM\cos\left(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{OM}\right)=\rho\cos\theta$.
- On sait que $y=\overrightarrow{\jmath}.\overrightarrow{OM}=\|\overrightarrow{\jmath}\|\times\|\overrightarrow{OM}\|\times\cos\left(\overrightarrow{\jmath};\overrightarrow{OM}\right)=1\times OM\cos\left(\left(\overrightarrow{\jmath};\overrightarrow{\imath}\right)+\left(\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{OM}\right)\right)=\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=\rho\sin\theta$.
- $x^2+y^2=(\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2=\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=\rho^2$.
- Enfin comme $x=\rho\cos\theta$ et $y=\rho\sin\theta$, si $\rho\neq 0$, $\cos\theta=\dfrac{x}{\rho}$ et $\sin\theta=\dfrac{y}{\rho}$.

◇

17.2 Courbe en coordonnées polaires

Cette partie est hors programme, mais tellement jolie...

17.2.1 Activité

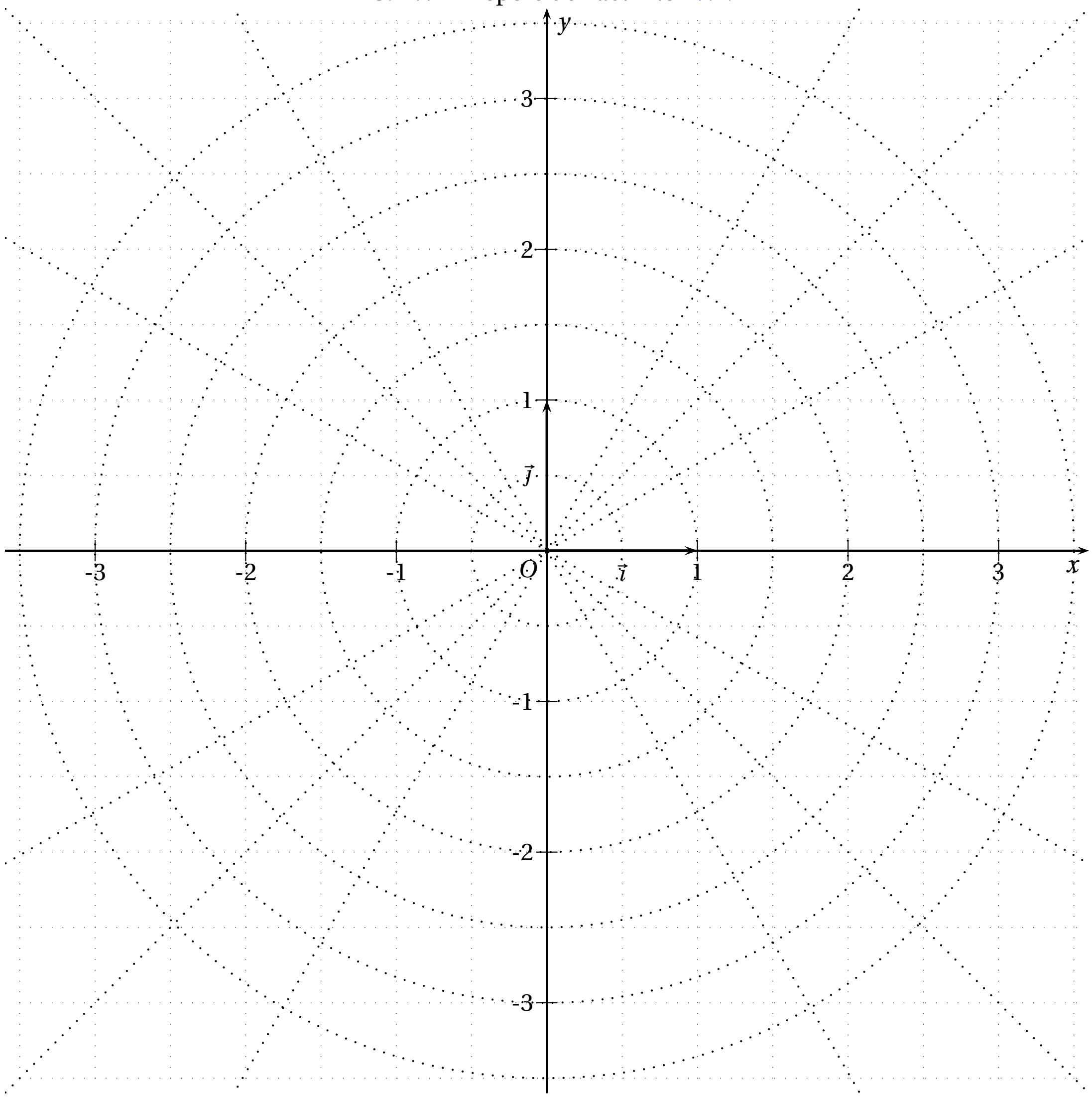
Le plan est muni d'un repère cartésien $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$orthonormal et orienté dans le sens direct et du repère polaire $\left(O;\overrightarrow{\imath}\right)$. On s'intéresse à l'ensemble $\mathscr{C}$ des points $[\rho;\theta]$ du plan vérifiant $\rho=\rho(\theta)=3\cos 2\theta$.

1. Montrer que $\rho(\theta+\pi)=\rho(\theta)$.
   On étudiera la fonction $\rho(\theta)$ que sur l'intervalle $[0;2\pi]$.
2. Résoudre sur $[0;2\pi]$ l'équation $3\cos 2\theta=0$.
   Que peut-on en déduire pour l'ensemble $\mathscr{C}$?
3. Compléter les tableaux de valeurs ci-dessous :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
ρ									
x									
y									

θ	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{6}$
ρ							
x							
y							

FIG. 17.2 – Repère de l'activité 17.2.1



4. Placer les points dans le repère de la présente page et extrapoler l'allure de $\mathscr{C}$ à partir des points placés.
   Remarque. Par convention $[\rho\,;\theta] = [-\rho\,;\theta+\pi]$.

17.2.2 Définition

Définition 17.2. Le plan est muni d'un repère cartésien $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$orthonormal et orienté dans le sens direct et du repère polaire $(O\,;\vec{\imath})$. Une courbe $\mathscr{C}$ définie en coordonnées polaires par $\rho = f(\theta) = \rho(\theta)$ sur un ensemble D est l'ensemble des points M dont les coordonnées polaires vérifient $[\rho(\theta)\,;\theta]$ avec $\theta \in D$.

Remarques.
- Les coordonnées cartésiennes vérifient alors $(\rho(\theta)\cos\theta\,;\rho(\theta)\sin\theta)$.
- En général la fonction ρ est périodique et son étude peut se limiter à un intervalle $[0\,;k]$ où k est un multiple de la période et de 2π.

17.2.3 Quelques équations de figures usuelles en coordonnées polaires

Figure	Équation polaire
Droite passant par l'origine	θ est constant et ρ décrit $\mathbb{R}$
Droite ne passant pas par l'origine	$\dfrac{1}{\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta}$ avec $(\alpha\,;\beta)\neq(0\,;0)$
Cercle de centre O et de rayon r	$\rho = r$ et θ décrit au mons un intervalle d'amplitude 2π
Cercle de centre $A[\rho_0\,;\theta_0]$ passant par l'origine	$\rho = 2\rho_0\cos(\theta-\theta_0)$
Cercle de centre $A[\rho_0\,;\theta_0]$	$\rho^2 - 2\rho_0\rho\cos(\theta-\theta_0)+\rho_0^2 = r^2$

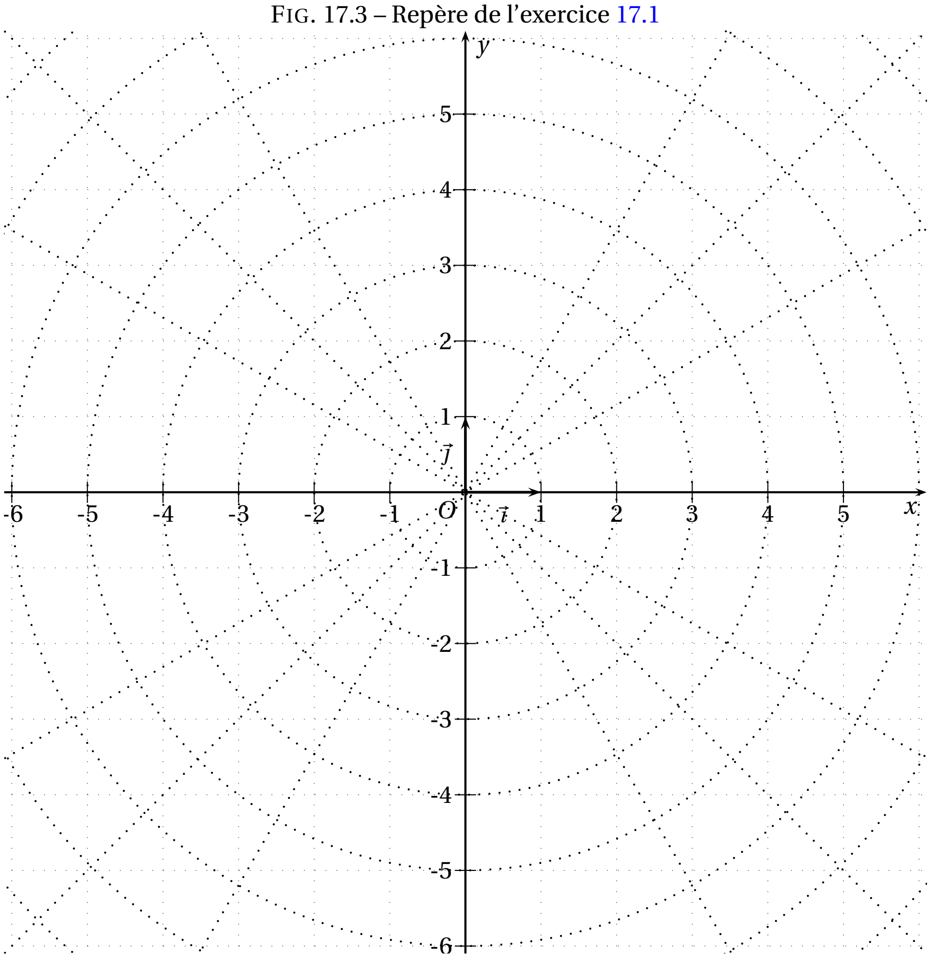
17.3 Exercices

Dans tous les exercices, le plan est muni d'un repère cartésien $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ orthonormal et orienté dans le sens direct et du repère polaire $\left(O; \overrightarrow{\imath}\right)$.

Exercice 17.1.

1. Placer les points au fur et à mesure dans le repère de la présente page.
2. Déterminer les coordonnées polaires des points suivants :
   - $A(-\sqrt{3}\,;1)$;
   - $B(2\,;2\sqrt{3})$;
   - $C(-3\,;-3)$;
   - $D(0\,;-4)$;
   - $E(3\,;-3\sqrt{3})$;
   - $F(-2\,;0)$;
3. Déterminer les coordonnées cartésiennes des points suivants :
   - $G\left[1\,;\frac{\pi}{6}\right]$;
   - $H[2\,;-\pi]$;
   - $I\left[2\,;-\frac{3\pi}{4}\right]$;
   - $J\left[1\,;\frac{\pi}{2}\right]$;
   - $K\left[3\,;\frac{2\pi}{3}\right]$;
   - $L\left[4\,;-\frac{\pi}{3}\right]$;

FIG. 17.3 – Repère de l'exercice 17.1



Exercice 17.2.

On considère un point A de coordonnées polaires $[\rho\,;\theta]$. Soit B tel que OAB est un triangle équilatéral direct. Déterminer les coordonnées cartésiennes de B.

Exercice 17.3.

On considère les points : $A(4\,;0)$ et $B\left(-2\sqrt{2}\,;2\sqrt{2}\right)$.

1. Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.
2. Déterminer les coordonnées polaires des points A et B. Que peut-on en déduire pour le triangle BOA ?
3. Calculer les coordonnées cartésiennes du point I milieu du segment $[AB]$.
4. Calculer la longueur OI et une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OI}\right)$. En déduire les coordonnées polaires du point I.
5. Déduire des question 3 et 4 que : $\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et que $\sin\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Exercice 17.4.

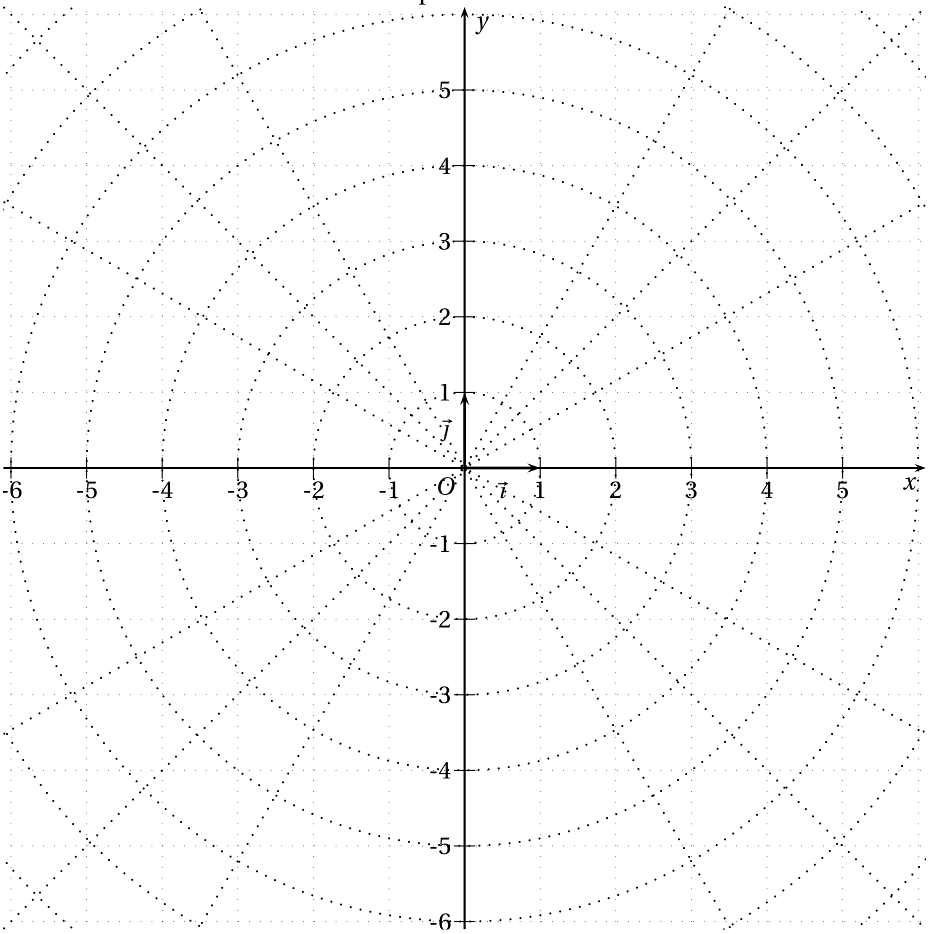
On considère le point M de coordonnées $M\left(2\sqrt{3}\,;2\right)$.

1. Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.
2. Déterminer les coordonnées polaires de M.
3. On considère le point N tel que $ON = \frac{1}{2}OM$ et $\left(\overrightarrow{OM}\,;\,\overrightarrow{ON}\right) = \frac{3\pi}{4}$. Déterminer les coordonnées polaires de N.
4. En utilisant les formules d'addition, calculer $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$. En déduire les coordonnées cartésiennes de N.
5. Montrer que la distance MN est égale à $2\sqrt{5+2\sqrt{2}}$ et donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de $\left(\overrightarrow{MO}\,;\,\overrightarrow{MN}\right)$.

Exercice 17.5.
Représenter dans le repère de la présente page les courbes d'équations polaires :

- $\rho = 1$;
- $\rho = \sin\theta$;
- $\rho = \dfrac{1}{\cos(\theta+1)}$.

FIG. 17.4 – Repère de l'exercice 17.5



Exercice 17.6.
À l'aide de la calculatrice, représenter les courbes d'équations polaires :

- $\rho = a\theta$ en faisant varier a (spirales d'ARCHIMÈDE) ;
- $\rho = 2p\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$;
- $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$ en faisant varier a (lemniscates de BERNOUILLI) ;
- $\rho = a\cos\theta + b$ en faisant varier a et b (limaçons de PASCAL) ;
- $\rho = a(1+\cos\theta)$ (cardioïdes) ;
- $\rho = a\sin b\theta$ en faisant varier a et b.