Chapitre 6

Suites

Sommaire

6.1 Activités

ACTIVITÉ 6.1.
On donne ci-dessous le tableau d'effectifs, en million, de la population africaine depuis 1950.

Année	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Population	227,3	285	366,8	482,2	638,7	819,5	1011,2

1. Représenter cette évolution dans un repère.
2. Calculer les coefficients multiplicateurs permettant de passer de la population d'une décennie à celle de la suivante à partir de l'année 1950.
3. Un statisticien propose de modéliser la population africaine de la manière suivante : « À partir de 1950, tous les dix ans, la population africaine est multipliée par $1,28$ ».
   (a) Comment justifier sa démarche ?
   (b) Comparer le résultat obtenu par ce modèle en 2010 aux données réelles.
   Le modèle serait-il plus proche de la réalité avec un coefficient multiplicateur de $1,29$?
   (c) Que fait l'algorithme 6.1 page suivante ?
   (d) Le programmer sur sa calculatrice.

(e) Le modifier afin qu'il n'affiche que le dernier terme calculé.

(f) À l'aide de l'algorithme précédent, représenter cette évolution sur le même graphique.

(g) À l'aide de l'algorithme précédent, estimer au cours de quelle décennie la population africaine dépassera 3 milliards.

TABLE 6.1: Algorithme de l'activité 6.1

```
ENTREES
   n
INITIALISATION
   u PREND LA VALEUR 227.3
TRAITEMENT
   POUR k ALLANT DE 1 A n FAIRE
     u PREND LA VALEUR u*1.28
     AFFICHER k
     AFFICHER u
   FIN POUR
```

TABLE 6.2: Algorithme de l'activité 6.2

```
ENTREES
   n
INITIALISATION
   u PREND LA VALEUR 1
   s PREND LA VALEUR 0
TRAITEMENT
   POUR k ALLANT DE 1 A n
     u PREND LA VALEUR u*2
     s PREND LA VALEUR s+u
   FIN POUR
SORTIES
   AFFICHER s
```

ACTIVITÉ 6.2.
On ne sait pas si l'histoire suivante est vraie ou non.
Le Roi demande à l'inventeur du jeu d'échecs de choisir lui-même sa récompense.
Celui-ci répond (en ce temps là, on tutoyait les rois) :
« Place deux grains de blé sur la première case de l'échiquier, quatre grains sur la deuxième, huit sur la troisième, seize sur la quatrième et ainsi de suite. Je prendrai tous les grains qui se trouvent sur l'échiquier ».
Le Roi sourit de la modestie de cette demande.
En réalité, cette demande était-elle vraiment modeste ?

1. On numérote les soixante-quatre cases de l'échiquier de 1 à 64 et, pour chaque entier n ($1 \leqslant n \leqslant 64$), on note u_n le nombre de grains de blé que le Roi doit déposer dans la n-ième case.
   (a) Calculer u_1, u_2, …, u_{10}.
   (b) Comment passe-t-on d'un terme au suivant ?
   (c) Exprimer u_n en fonction de n et calculer u_{64}.
2. On donne l'algorithme 6.2 de la présente page.
   (a) Que fait cet algorithme ?
   (b) Entrer cet algorithme dans votre calculatrice.
   (c) Utiliser cet algorithme pour obtenir S, le nombre total de grains sur l'échiquier.
3. Sachant qu'un grain de blé pèse, en moyenne, 5×10^{-2} gramme et qu'un mètre cube de blé pèse, en moyenne, une tonne, quelles pourraient être les dimensions d'un grenier qui contiendrait le blé gagné par l'inventeur ?
   Le Roi avait-il raison de sourire ?

ACTIVITÉ 6.3.
Un bail est un contrat de location entre un locataire et un propriétaire.Traditionnellement sa durée est de trois ans.
On propose à un locataire deux types de bail :

- Contrat A : Le premier loyer est de 1 000 euros et il augmente chaque mois de 11,5 euros pendant la durée des trois ans.
- Contrat B : Le premier loyer est de 1 000 euros et il augmente chaque mois de 1 % pendant la durée des trois ans.

1. (a) Déterminer, avec éventuellement un algorithme programmé sur votre calculatrice, le loyer du dernier mois avec le contrat A.
   (b) Déterminer, avec éventuellement un algorithme programmé sur votre calculatrice, la somme des loyers que le locataire devrait payer avec le contrat A.
2. Mêmes questions avec le contrat B.
3. Déterminer quel est le contrat le plus avantageux pour le locataire.

ACTIVITÉ 6.4.
Pour chacune des listes de nombres suivantes :

1. Conjecturer, dans chaque cas, une manière d'obtenir le terme suivant.
2. Conjecturer, dans chaque cas, une manière d'obtenir le vingtième terme.

a	b	c	d	e	f
0		1	$\frac{1}{1}$		100
1	-1	1,5	$\frac{3}{2}$	1	20
4	$\frac{1}{2}$	1,75	$\frac{7}{4}$	3	4
9	$-\frac{1}{3}$	1,875	$\frac{15}{8}$	5	0,8
16	$\frac{1}{4}$	1,9375	$\frac{31}{16}$	7	0,16
25	$-\frac{1}{5}$	1,96875	$\frac{63}{32}$	9	0,032

6.2 Généralités sur les suites

6.2.1 Petit historique sur les suites

Par Frédéric Demoulin

L'un des premiers travaux portant sur les suites de nombres semble provenir d'un certain ARCHIMÈDE [1]. Dans son traité *La mesure du cercle*, pour trouver une valeur approchée de π, il avait eu la brillante idée de considérer des polygones réguliers inscrits et circonscrits à un cercle de rayon 1 : d'abord deux triangles équilatéraux, puis deux carrés, deux pentagones, etc.

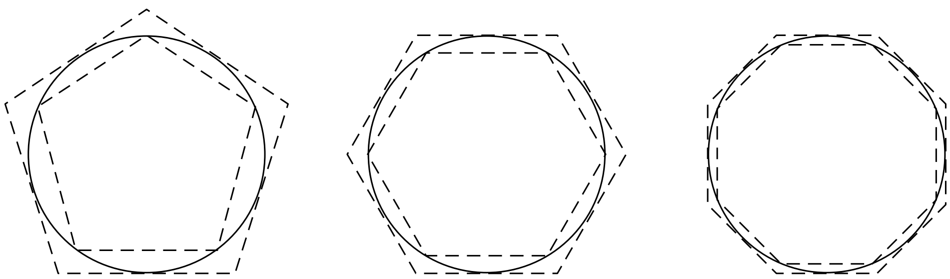

FIGURE 6.1: Exemples de polygones réguliers inscrits et circonscrits è un cercle : pentagone, hexagone et octogone.

Comme on peut le voir sur la figure 6.1, plus le nombre de côtés du polygone inscrit au cercle est grand et plus son périmètre est proche de la circonférence du cercle tout en lui restant inférieur. De même, plus le nombre de côtés du polygone circonscrit au cercle est grand et plus son périmètre est proche de la circonférence du cercle tout en lui restant supérieur. Les périmètres de ces polygones forment ainsi deux suites de nombres qui encadrent la circonférence du cercle, en l'occurence 2π.
Comme ARCHIMÈDE, de nombreux autres grands scientifiques (FIBONACCI, LUCAS, BERNOULLI, NEWTON, MOIVRE, CAUCHY, WALLIS, pour ne citer qu'eux...) vont, historiquement, s'intéresser aux suites dans le but d'approcher des valeurs numériques.
Au cours du XVII^e^ et du XVIII^e^ siècle, l'intuition et le génie de mathématiciens tels EULER ou BERNOULLI amènent à l'établissement de nombreux résultats relatifs aux suites, reléguant parfois au second plan les limites de validité de leurs découvertes.
Il faut donc attendre le début du XIX^e^ siècle pour qu'AUGUSTIN LOUIS CAUCHY [2] pose les fondements rigoureux de la théorie des suites. CAUCHY prend ainsi sa revanche sur les illustres mathématiciens du XVII^e^ et du XVIII^e^. Deux événements décisifs viennent alors donner un élan supplémentaire aux suites : l'introduction de la notation indicielle [3] qui consiste à repérer chaque terme d'une suite par une même lettre affectée d'un indice et le point de vue de PEANO [4] qui définit une suite comme étant une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
Plus récemment, dans la seconde moitié du XX^e^ siècle, le développement des outils de calcul va logiquement donner un nouvel essor à l'étude des suites. À l'heure actuelle, les domaines d'application des suites sont bien vastes : Analyse numérique, Mathématiques financières, Physique, Biologie, etc.

1. Très brillant scientifique grec de Sicile, mathématicien, physicien et ingénieur (287 av. J.C. – 212 av. J.C.).
2. Mathématicien français réputé pour sa finesse et sa rigueur (1789 – 1857).
3. La notation indicielle est due, semble-t-il, au grand mathématicien et astronome italien JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736 – 1813).
4. Mathématicien italien, la définition axiomatique des entiers naturels porte son nom (1858 – 1932).

6.2.2 Définition et notations

Définition 6.1. Une suite numérique u est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une fonction qui à tout entier naturel n associe un réel, noté $u(n)$ ou, plus généralement, u_n.
Ainsi $u : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n \end{cases}$

Exemples.

1. La suite des carrés des nombres entiers est 0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; etc. On peut écrire ces termes sous la forme $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 4$; $u_3 = 9$; etc. On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) de terme général $u_n = n^2$.
2. La suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ n'est définie que pour $n \geqslant 1$, on la note $(u_n)_{n \geqslant 1}$.
3. La suite de terme général $u_n = \sqrt{n-5}$ n'est définie que pour $n \geqslant 5$, on la note $(u_n)_{n \geqslant 5}$.

Remarques (Vocabulaire, notations).
- n est l'indice (ou le rang) et u_n est le terme de rang n.
- *Attention :* (u_n) désigne la suite alors que u_n désigne le terme de rang n.

6.2.3 Modes de génération d'une suite

Relevés chronologiques

Dans la « vie courante », les principales suites rencontrées sont obtenues par des relevés, en général chronologiques, en économie, ou des mesures en physique.
En mathématiques, nous nous intéresserons essentiellement aux suites définies mathématiquement (par des formules) dont l'objet sera la modélisation des suites précédentes et à l'étude de leurs propriétés mathématiques.

Définition par une formule explicite

Une suite *explicite* est une suite dont le terme général s'exprime en fonction de n. Elle est du type $u_n = f(n)$ où f est une fonction. On a donc la définition suivante :

Définition 6.2. Soit f une fonction définie au moins sur $\mathbb{R}^+$. On peut alors définir une suite (u_n) de la façon suivante :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.

Remarques.
- On peut donc calculer directement n'importe quel terme de la suite à partir de l'indice n. C'est le côté agréable des suites explicites.
- Si f n'est définie que sur $[k; +\infty[$, avec $k > 0$, la suite n'est alors définie que pour $n \geqslant k$.

Exemples.

1. La suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 2n - 1$. On a $u_n = f(n)$ avec $f : x \mapsto 2x - 1$. Par exemple $u_4 = 2 \times 4 - 1 = 7$.
2. Les suites de l'exemple précédent sont toutes des suites explicites. Les deux dernières sont définies, respectivement, pour $n \geqslant 1$ et pour $n \geqslant 5$.

Définition par récurrence

Une suite *récurrente* est définie par la donnée des premiers termes et la relation liant les termes de la suite (en général consécutifs). Plus généralement, on peut définir une suite récurrente de la façon suivante :

Définition 6.3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$. On peut alors définir une suite (u_n) par la donnée de $u_0 \in I$ et de la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Exemple. $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$ donne $u_0 = 4$; $u_1 = 2u_0 - 5 = 3$; $u_2 = 2u_1 - 5 = 1$; etc.

Remarques.

- Contrairement aux suites explicites, on ne peut pas, *a priori*, calculer un terme quelconque de la suite, sans avoir obtenu, avant, tous les termes le précédant.
  De nombreux exercices seront consacrés à obtenir, malgré tout, des moyens de calculer directement un terme donné, c'est-à-dire à transformer, lorsque c'est possible, la suite récurrente en une suite explicite.
- Toutes les fonctions f ne conviennent pas. Par exemple si $u_0 = 3$ et $f(x) = \sqrt{x-2}$, c'est-à-dire $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 2}$, on a $u_1 = \sqrt{u_0 - 2} = \sqrt{1} = 1$. Par contre on ne peut pas calculer u_2, donc la suite n'est pas définie pour $n > 1$.

6.2.4 Représentation graphique d'une suite

Définition 6.4. Dans un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la représentation graphique d'une suite (u_n) est l'ensemble des points M_n de coordonnées $(n; u_n)$.

Remarque. Contrairement à une fonction, la représentation graphique d'une suite n'est pas une courbe mais un nuage de points car la suite n'est définie que pour $n \in \mathbb{N}$. $u_{1,5}$ n'a, mathématiquement, pas de sens et donc le point $(1,5; u_{1,5})$ non plus.

6.2.5 Monotonie d'une suite

Une suite est une fonction particulière, on retrouve donc naturellement la notion de sens de variation pour une suite.

Définition 6.5. Soit (u_n) une suite. On dit que :

- la suite (u_n) est *croissante* si, pour tout entier n : $u_{n+1} \geqslant u_n$;
- la suite (u_n) est *décroissante* si, pour tout entier n : $u_{n+1} \leqslant u_n$;
- la suite (u_n) est *constante* ou *stationnaire* si, pour tout entier n, $u_n = u_{n+1}$.

Définition 6.6. Soit (u_n) une suite. On dit que (u_n) est *monotone* si son sens de variation ne change pas (elle reste croissante ou décroissante)

Remarque. On obtient les définitions de *strictement* croissante, décroissante ou monotone en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

Étudier la monotonie d'une suite c'est donc étudier ses variations.

6.3 Deux suites particulières : arithmétiques et géométriques

6.3.1 Suites arithmétiques

Définition et premières propriétés

Définition 6.7 (par récurrence)**.** On appelle *suite arithmétique* toute suite (u_n) telle que

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = u_n + r \text{ où } r \in \mathbb{R}$$

r est appelé *la raison* de la suite arithmétique.

Remarque. Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, il suffit de montrer que, pour tout n, la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante. Cette constante sera alors la raison de la suite.

EXERCICE.

1. La suite formée par les nombres entiers naturels pairs est-elle une suite arithmétique ? Et celle formée par les nombres entiers naturels impairs ?
2. La suite définie par : pour tout n, $u_n = 3n - 2$ est-elle arithmétique ?
3. La suite définie par : pour tout n, $u_n = n^2$ est-elle arithmétique ?
4. Parmi les suites rencontrées dans les activités d'introduction, lesquelles sont arithmétiques ?

Propriété 6.1 (Formule explicite)**.** *Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et raison r. Alors, pour tout entier naturel n et tout entier naturel p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a :*
$u_n = u_p + (n-p)r$
Et en particulier, avec $p = 0$:
$u_n = u_0 + nr$

Nous l'admettrons.

Variations d'une suite arithmétique

Propriété 6.2. *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors :*

- *si $r > 0$, (u_n) est* .... ;
- *si $r < 0$, (u_n) est* .... ;
- *si $r = 0$, (u_n) est* ....

Preuve. Pour tout $n \geqslant 0$, on a $u_{n+1} - u_n = u_n + r - u_n = r$, ce qui donne le résultat. ♢

6.3.2 Suites géométriques

Définition et premières propriétés

Définition 6.8 (par récurrence)**.** On appelle *suite géométrique* toute suite (u_n) telle que

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = q \times u_n \text{ où } q \in \mathbb{R}$$

q est appelé *la raison* de la suite géométrique.

Remarques.

1. Si $q = 0$, tous les termes de la suite, hormis peut-être u_0 sont nuls.
   Si $u_0 = 0$, tous les termes de la suite sont nuls.
   En dehors de ces deux cas triviaux, inintéressants, tous les termes de la suite sont différents de zéro.

2. Pour démontrer qu'une suite est géométrique (en dehors des deux cas triviaux), il suffit de montrer que, pour tout n, le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant. Cette constante sera alors la raison de la suite.

EXERCICE. 1. La suite définie par : pour tout n, $u_n = n^2$ est-elle géométrique ?

2. Parmi les suites rencontrées dans les activités d'introduction, lesquelles sont géométriques ?

Propriété 6.3 (Formule explicite)**.** *Soit* (u_n) *une suite géométrique de premier terme* u_0 *et raison* q*. Alors, pour tout entier naturel n et tout entier naturel p tel que* $0 \leqslant p \leqslant n$*, on a :*
$u_n = q^{n-p} u_p$
Et en particulier, avec $p = 0$ *:*
$u_n = q^n u_0$

Nous l'admettrons.

Variations d'une suite géométrique

On ne s'intéresse, en première, qu'aux variations de suites géométriques de raison positive.

Propriété 6.4. *Soit* (u_n) *une suite géométrique de raison* $q \geqslant 0$*. Alors, si* $u_0 > 0$ *:*
- *si* $q = 0$, (u_n) *est* .... *pour* $n \geqslant 1$
- *si* $0 < q < 1$, (u_n) *est* .... *;*
- *si* $q = 1$, (u_n) *est* .... *;*
- *si* $q > 1$, (u_n) *est* ....

Preuve. Hormis le premier cas, trivial : pour tout $n \geqslant 0$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, ce qui donne le résultat. ♢

Il pourra être utile de plutôt retenir la propriété suivante qui permet d'étudier la monotonie de davantage de type de suites :

Propriété 6.5. *Soit* $q \in \mathbb{R}$ *:*
- *Si* $0 < q < 1$ *alors* $q^n > q^{n+1}$ *;*
- *Si* $q > 1$ *alors* $q^n < q^{n+1}$.

La preuve en sera faite en classe.

6.4 Exercices et problèmes

6.4.1 Exercices

EXERCICE 6.1.
Pour chacune des suites données ci-dessous :
- $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $v_n = 5 - 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $w_n = (n+1)^2 - n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $x_n = \frac{3^n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Calculer les trois premiers termes.
2. La suite est-elle géométrique ? arithmétique ?
3. Si elle est arithmétique ou géométrique calculer le terme de rang 100.

EXERCICE 6.2.
Les suites (u_n) de cet exercice sont arithmétiques.

1. La suite (u_n) est de raison $r = 8$. On sait que $u_{100} = 650$. Que vaut u_0 ?
2. La suite (u_n) est de raison r. On sait que $u_{50} = 406$ et $u_{100} = 806$. Déterminer r et u_0.

EXERCICE 6.3.
On considère une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $q = -2$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Calculer u_{20}.

EXERCICE 6.4.
Les suites (u_n) de cet exercice sont géométriques.

1. La suite (u_n) est de raison $q = \frac{1}{2}$. On sait que $u_8 = -1$. Que vaut u_0 ?
2. La suite (u_n) est de raison q. On sait que $u_4 = 10$ et $u_6 = 20$. Déterminer q et u_0.

6.4.2 Problèmes

PROBLÈME 6.1.
Un étudiant loue un chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bail :

- *Premier contrat* : un loyer de 200 € pour le premier mois, puis une augmentation de 5 € par mois jusqu'à la fin du bail ;
- *Second contrat* : un loyer de 200 € pour le premier mois, puis une augmentation de 2 % par mois jusqu'à la fin du bail.

Question : Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ?

Indications :

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois.
2. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois, c'est-à-dire celui du 36$^{\text{è}}$ mois.
3. Répondre à la question.

PROBLÈME 6.2.
Le nombre d'adhérents d'un club sportif augmente de 5 % chaque année. En 1990, il y avait 500 adhérents.
Question : le nombre d'adhérents peut-il doubler et, si oui, en quelle année ?

Indications :
Pour chaque année à partir de 1990 on note u_n le nombre d'adhérents l'année $1990 + n$.

1. Quelle est la valeur de u_0 ? de u_1 ?
2. Préciser la nature de la suite (u_n) puis exprimer u_n en fonction de n.
3. Étudier la monotonie de (u_n).
4. Utiliser la calculatrice pour répondre à la question.

PROBLÈME 6.3.
Monsieur X désire financer un voyage dont le coût est de 6 000€.
Pour ce faire, il a placé 2 000 € le 31 décembre 2002 sur son livret bancaire, à intérêts composés au taux annuel de 3,5 % (ce qui signifie que, chaque année, les intérêts sont ajoutés au capital et produisent à leur tour des intérêts). À partir de l'année suivante, il prévoit de placer, chaque 31 décembre, 700 € supplémentaires sur ce livret.
Question : En quelle année aura-t-il assez d'argent pour financer son voyage ?

Indications :
On désigne par C_n le capital, exprimé en euros, disponible le 1er janvier de l'année $(2003+n)$, où n est un entier naturel. Ainsi, on a $C_0 = 2000$.

1. (a) Calculer le capital disponible le 1er janvier 2004.
   (b) Établir, pour tout entier naturel n, une relation entre C_{n+1} et C_n.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = C_n + 20000$.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
   (b) Exprimer u_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $C_n = 22000 \times (1,035)^n - 20000$.
3. Étudier la monotonie de la suite (C_n) puis, à l'aide de la calculatrice, répondre à la question.

PROBLÈME 6.4.
Un fournisseur fait une étude sur la fidélité de sa clientèle depuis l'année $n = 0$, où il y a eu 200 clients. Chaque année, sa clientèle est composée de 50% des clients de l'année précédente auxquels s'ajoutent 400 nouveaux clients.
Question : En supposant que cette évolution se poursuive, comment va se comporter le nombre de clients sur le long terme ?

Indications :

1. Soit u_n le nombre de clients l'année n.
   Justifier que $u_{n+1} = 0,5u_n + 400$, puis calculer u_1,u_2, u_3 et u_4.
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 800$.
   (a) Vérifier que $v_{n+1} = 0,5v_n$.
   (b) Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
   (c) En déduire l'expression de v_n, puis celle de u_n, en fonction de n.
   (d) Étudier la monotonie de (u_n). Interpréter le résultat.
   (e) Calculer u_{100}, u_{1000} et u_{10000}.
   Que peut-on alors conjecturer concernant le nombre de clients du fournisseur ?

PROBLÈME 6.5.
Le 1er janvier 2005, une grande entreprise compte 1500 employés.
Une étude montre que lors de chaque année à venir, 10% de l'effectif du 1er janvier partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 100 jeunes dans l'année.
Question : En supposant que cette évolution se poursuive, comment va se comporter le nombre d'employés sur le long terme ?

Indications :
Pour tout entier n on appelle u_n le nombre d'employés le 1er janvier de l'année $(2005+n)$.

1. Déterminer u_0, u_1, u_2 et u_3

2. (a) Montrer que $u_{n+1} = 0,9u_n + 100$.
   (b) Cette suite est-elle arithmétique ? Cette suite est-elle géométrique ?
3. On pose $v_n = u_n - 1000$.
   (a) Déterminer v_0, v_1, v_2 et v_3.
   (b) Montrer que (v_n) est géométrique.
   (c) En déduire v_n en fonction de n.
   (d) En déduire u_n en fonction de n.
   (e) Étudier la monotonie de (u_n) et interpréter le résultat.
   (f) Conjecturer le comportement de (u_n) quand n devient grand et interpréter le résultat.

PROBLÈME 6.6.
Une ville comprenait 300 000 habitants au premier janvier 1950. On estime que la ville accueille tous les ans 2% de nouveaux arrivants et a un taux annuel de natalité de 3%. On constate curieusement un nombre fixe de décès et de départ de 800 personnes par an. On veut déterminer à partir de quelle année la population de la ville sera supérieure au double de la population en 1950.
Question : À partir de quelle année la population de la ville sera supérieure au double de la population en 1950 ?

Indications :

1. Quelle était la population estimée de la ville le premier janvier 1951 ?
2. On note p_n la population de la ville à l'année $1950 + n$.
   Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
3. On pose $q_n = p_n - 16000$.
   (a) Montrer que cette suite est une suite géométrique.
   (b) Exprimer q_n puis p_n en fonction de n.
4. Montrer que (p_n) est croissante.
5. En déduire, à l'aide de la calculatrice, la réponse à la question.