Un corrigé du devoir surveillé n°2

EXERCICE 2.1 (6 points)**.**
On donne les fonctions trinômes suivantes, toutes définies sur $\mathbb{R}$:

- $A(x) = x^2 + x - 1$
- $B(x) = 2x^2 - x + 1$
- $C(x) = -2x^2 - 4x + 1$
- $D(x) = 4x^2 - 4x + 1$

1. Résoudre l'équation $A(x) = 0$.

   $A(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = 1$ et $c = -1$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4 = 5 > 0$ donc $A(x)$ admet deux racines distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
   $A(x) = 0$ a donc deux solutions : $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

2. Déterminer le signe de $B(x)$ selon les valeurs de x.

   $B(x)$ est un trinôme (de la forme $ax^2 + bx + c$) donc il est du signe de a, ici positif, sauf entre ses éventuelles racines.
   $\Delta = -7 < 0$, donc il n'a pas de racines.
   $B(x)$ est donc strictement négatif, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

3. Donner la forme canonique de $C(x)$.

   $C(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = -2$, $b = -4$ et $c = 1$. Sa forme canonique est $C(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ où $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-4} = -1$ et $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{16+8}{-8} = 3$.
   La forme canonique de $C(x)$ est donc $-2(x+1)^2 + 3$.

4. Donner la forme factorisée de $D(x)$, si elle existe.

   Cherchons si $D(x)$ admet des racines.
   $\Delta = 0$ donc $D(x)$ admet une racine double, $x_0 = \alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$ et une forme factorisée : $D(x) = a(x - x_0)(x - x_0) = a(x - x_0)^2 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.

EXERCICE 2.2 (4 points – Environ 15 min)**.**
Le plan est muni d'un repère où les points A, B et C sont de coordonnées $A(2;3)$, $B(4;-1)$ et $C(-2;0)$.

Plusieurs méthodes sont possibles ; une première est utilisée pour la première question, une autre pour la seconde.

1. Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}_1 = (AB)$.

   $\mathscr{D}_1 = (AB)$ passe par A et admet $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur donc :
   $M(x;y) \in \mathscr{D}_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ colinéaires $\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right) = 0 \Leftrightarrow$
   $\begin{vmatrix} x-2 & 2 \\ y-3 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -4(x-2) - 2(y-3) = 0 \Leftrightarrow -4x - 2y + 14 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 7 = 0$

2. Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}_2$ passant par C et parallèle à $\mathscr{D}_1$.

$\mathscr{D}_2$ passe par C et admet $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ comme vecteur directeur donc elle admet une équation de la forme $ax+by+c=0 \Leftrightarrow -4x-2y+c=0$. Or $C\in\mathscr{D}_2$ donc $-4x_C-2y_C+c=0 \Leftrightarrow -4\times(-2)-2\times 0+c=0 \Leftrightarrow c=-8$.
D'où $\mathscr{D}_2 : -4x-2y-8=0 \Leftrightarrow 2x+y+4=0$.

EXERCICE 2.3 (5 points – Environ 15 min)**.**
Le plan est muni d'un repère dans lequel les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3 admettent les équations cartésiennes suivantes :

- $\Delta_1 : y=-\frac{2}{3}x+4$
- $\Delta_2 : 2x+3y+4=0$
- $\Delta_3 : -2x+y+4=0$

Là aussi plusieurs méthodes possibles ; une première est proposée pour la première question, une seconde pour la suivante.

1. Montrer que $\Delta_1 \parallel \Delta_2$.

   L'équation de Δ_1 est donnée sous forme réduite : $y=mx+p$ avec $m=-\frac{2}{3}$.
   Mettons l'équation de Δ_2 sous la même forme : $2x+3y+4=0 \Leftrightarrow 3y=-2x-4 \Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}=m'x+p'$.
   $m=m'$ donc les deux droites ont le même coefficient directeur donc elles sont parallèles.

2. (a) Montrer que Δ_2 et Δ_3 sont sécantes.

   $\Delta_2 : 2x+3y+4=0 \Leftrightarrow ax+by+c=0$ donc la droite admet comme vecteur directeur $\vec{v}_2\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.
   De la même façon, Δ_3 admet comme vecteur directeur $\vec{v}_3\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$.
   Examinons si ces vecteurs sont colinéaires : $\det(\vec{v}_2;\vec{v}_3)=\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=6+2=8\neq 0$ donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles : elles sont sécantes.

   (b) Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection en détaillant sa façon de les obtenir.

   $M(x;y)\in\Delta_2\cap\Delta_3 \Leftrightarrow \begin{cases}2x+3y+4=0 & L_1\\ -2x+y+4=0 & L_2\end{cases}$.
   En faisant L_1+L_2, on obtient $4y+8=0 \Leftrightarrow y=-2$.
   On remplace dans L_1 : $2x-6+4=0 \Leftrightarrow x=1$.
   Le point d'intersection de Δ_2 et de Δ_3 a donc pour coordonnées $(1;-2)$.
   Une autre façon de formuler la conclusion : $\Delta_2\cap\Delta_3=\{(1;-2)\}$.

EXERCICE 2.4 (Bonus $\Leftrightarrow$ hors barème)**.**
Soit ax^2+bx+c un trinôme (donc avec $a\neq 0$) possédant deux racines disctinctes x_1 et x_2. Montrer que le sommet de la parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$ a pour abscisse $\frac{x_1+x_2}{2}$.

On sait que l'abscisse du sommet est $-\frac{b}{2a}$.
Calculons $\frac{x_1+x_2}{2}$.
$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}{2}=\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{-2b}{2a}\times\frac{1}{2}=-\frac{b}{2a}$.
Donc le sommet de la parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$ a pour abscisse $\frac{x_1+x_2}{2}$.
