Un corrigé du devoir maison n°1

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
$\mathscr{P}$ est la parabole d'équation $y = x^2$ et A et B sont deux points distincts de la parabole $\mathscr{P}$.
On s'intéresse dans ce devoir au point C, intersection de la droite (AB) avec l'axe des ordonnées (Oy).

Partie I : Graphiquement

1. On suppose dans cette question que le point A est d'abscisse 2 et le point B d'abscisse -1.
   (a) Tracer la parabole et placer A et B.

   Voir la figure 1.1.

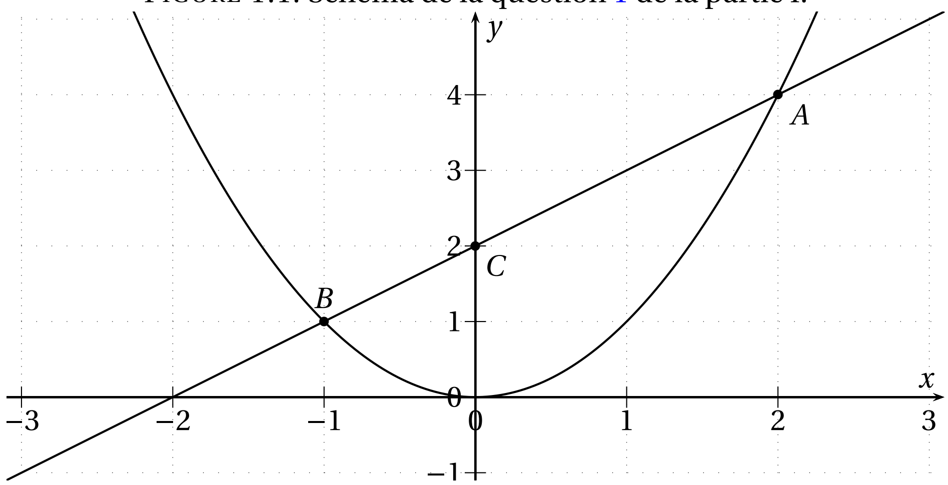
   (b) Tracer la droite (AB).

   Voir la figure 1.1.

   (c) Déterminer par lecture graphique l'ordonnée de C.

   L'ordonnée de C semble être égale à 2.

FIGURE 1.1: Schéma de la question 1 de la partie I.



2. Dans cette question on fait varier les abscisses des points A et B.
   Sans justifier, reproduire sur votre copie et compléter le tableau ci-dessous :

Abscisse de A	1	−1	0	−3	4	2
Abscisse de B	3	−2	4	0,5	−1	3
Ordonnée de C	−3	−2	0	1,5	4	−6

   Conjecturer le lien entre les abscisses de A et de B et l'ordonnée de C.
   L'énoncer sous forme de propriété.

   Il semble que l'ordonnée de C soit égale à l'opposé du produit des abscisses de A et B.

   Propriété. *Soit $A\left(x_A\,;\,y_A\right)$ et $B\left(x_B\,;\,y_B\right)$ deux points de la parabole d'équation $y = x^2$. Alors la droite (AB) coupe l'axe des ordonnées au point $C\left(0\,;\,y_C\right)$ qui est tel que :*

$$y_c = -x_A \times x_B$$

Partie II : Par le calcul

Dans cette partie, tous les résultats devront être justifiés par le calcul.

1. Un cas particulier.
   On suppose dans cette question que le point A est d'abscisse -3 et le point B d'abscisse $-0,5$.

   (a) Déterminer les ordonnées respectives de A et de B.

   Comme A et B sont des points de la parabole d'équation $y = x^2$, on a $y_A = x_A^2 = (-3)^2 = 9$ et $y_B = x_B^2 = (-0,5)^2 = 0,25$.

   (b) Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

   Comme $x_A \neq x_B$, la droite (AB) admet une équation de la forme $y = mx + p$, dite *équation réduite*, avec $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0,25-9}{-0,5-(-3)} = -3,5$ et $p = y_A - mx_A = 9 - (-3,5) \times (-3) = -1,5$ d'où $(AB) : y = -3,5x - 1,5$.

   (c) Déterminer par le calcul l'ordonnée de C.

   C étant l'intersection de (AB) avec l'axe des ordonnées, on a $x_C = 0$ et $y_C = -3,5 \times 0 - 1,5 = -1,5$.

   Ce résultat confirme-t-il votre conjecture ?

   $-x_A \times x_B = -(-3) \times (-0,5) = -1,5 = y_C$ donc cela confirme notre conjecture.

2. Cas général.
   On suppose dans cette question que le point A est d'abscisse α et le point B d'abscisse β.

   (a) Déterminer les ordonnées respectives de A et de B.

   Comme A et B sont des points de la parabole d'équation $y = x^2$, on a $y_A = \alpha^2$ et $y_B = x_B^2 = \beta^2$.

   (b) Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

   Comme A et B sont des points distincts de la parabole, $x_A \neq x_B$, la droite (AB) admet une équation de la forme $y = mx + p$ avec $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta - \alpha} = \frac{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)}{\beta-\alpha} = \beta + \alpha$ et $p = y_A - mx_A = \alpha^2 - (\beta + \alpha) \times \alpha = \alpha^2 - \alpha\beta - \alpha^2 = -\alpha\beta$ d'où $(AB) : y = (\alpha + \beta)x - \alpha\beta$.

   (c) Déterminer par le calcul l'ordonnée de C.

   C étant l'intersection de (AB) avec l'axe des ordonnées, on a $x_C = 0$ et $y_C = (\alpha + \beta) \times 0 - \alpha\beta = -\alpha\beta$.

   Conclure.

   On vient de démontrer que, quels que soient A et B deux points distincts de la parabole, la droite coupe l'axe des ordonnées au point C d'ordonnée $y_C = -\alpha\beta = -x_A \times x_B$.
   On a donc démontré la propriété.