Chapitre 4

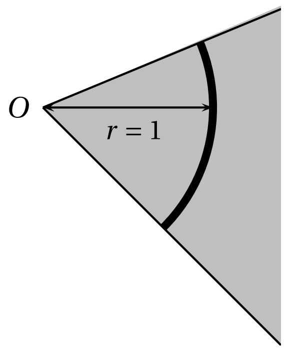
Enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique

Sommaire

4.1 Notion d'angle

4.1.1 Une nouvelle mesure d'angle : le radian

Définition 4.1 (Angle, mesure de l'angle en radian)**.** Dans un plan, un *angle* de sommet O est l'ensemble des points du plan délimité par deux demi-droites de même sommet O.
La *mesure* de cet angle, en radian, est la longueur de l'arc de cercle de centre O et de rayon 1 intercepté par cet angle.



EXERCICE 4.1.
Le plan est muni d'un repère orthonormé.

1. Quel est le périmètre d'un cercle de rayon 1 ?
2. En déduire la mesure en radian d'un angle de 360°.
3. On admet que la longueur de l'arc intercepté par un secteur angulaire est proportionnelle à la mesure de l'angle. Compléter alors le tableau suivant (les valeurs exactes sont attendues) :

Mesure de l'angle en degré	0	30	45	60	90	180	360
Mesure de l'angle en radian							

4.1.2 Angles orientés géométriques

Orientation d'un cercle ou du plan

Définition 4.2 (Orientation du plan)**.** On utilisera le vocabulaire suivant :

Orienter un cercle : C'est choisir un sens de parcours sur ce cercle appelé *sens direct* (ou positif). L'autre sens est appelé *sens indirect* (négatif ou rétrograde).

Orienter le plan : C'est orienter tous les cercles du plan dans le même sens.

L'usage est de choisir pour sens direct le sens contraire des aiguilles d'une montre (appelé aussi *sens trigonométrique*).

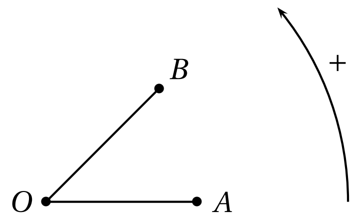
Dans la suite du chapitre, on supposera que le plan est orienté dans ce sens.

Cercle trigonométrique

Définition 4.3 (Cercle trigonométrique)**.** *Un cercle trigonométrique* est un cercle orienté dans le sens direct et de rayon 1. Lorsque le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ orthonormé, le cercle trigonométrique est le cercle orienté dans le sens direct, de centre O et de rayon 1.

Angles orientés géométriques

Quand le plan est orienté les mesures des angles, qu'elles soient en degré ou en radian, sont positives quand l'angle est dans le sens direct, négatives quand l'angle est dans le sens indirect.
Ainsi, sur le schéma ci-contre, $\widehat{AOB}=\frac{\pi}{4}$ alors que $\widehat{BOA}=-\frac{\pi}{4}$.



4.1.3 Angles orientés de vecteurs

Angle orienté de vecteurs

Définition 4.4 (Angle orienté de vecteurs)**.** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté. On appelle *angle orienté*, noté $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$, le couple de ces deux vecteurs.

Mesures des angles orientés

Définition 4.5 (Mesure d'un angle orienté de vecteurs)**.** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté et O, A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
Une mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ est une mesure de l'angle géométrique orienté $\widehat{AOB}$.

Définition 4.6 (Mesure principale)**.** La *mesure principale* d'un angle orienté est l'unique mesure de cet angle orienté qui appartient à $]-\pi\,;\,\pi]$.

On admettra que cette mesure est unique.

Remarques.

- Si une des mesures de $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ est α, alors toutes les mesures sont de la forme $\alpha + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Par abus de langage, on confond un angle et ses mesures. On écrit par exemple $(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ peut aussi s'écrire :
  $(\vec{u}\,;\,\vec{v}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \equiv \frac{\pi}{2}\ (2\pi) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ qui se lit « $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ est *congru* à $\frac{\pi}{2}$ *modulo* 2π ».

Propriété 4.1. *Soient un vecteur non nul $\vec{u}$ du plan orienté et $k \in \mathbb{R}^*$.*

- $(\vec{u}\,;\,\vec{u}) \equiv 0 \pmod{2\pi}$.
- $(\vec{u}\,;\,-\vec{u}) \equiv \pi \pmod{2\pi}$.
- *Si $k > 0$ alors* $(\vec{u}\,;\,k\vec{u}) \equiv 0 \pmod{2\pi}$.
- *Si $k < 0$ alors* $(\vec{u}\,;\,k\vec{u}) \equiv \pi \pmod{2\pi}$.

Propriété 4.2 (Relation de CHASLES (admise))**.** *Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté.*

$$(\vec{u}\,;\,\vec{v}) + (\vec{v}\,;\,\vec{w}) \equiv (\vec{u}\,;\,\vec{w}) \pmod{2\pi}$$

On en déduit :

Propriété 4.3. *Soit $\vec{u}$ et $\vec{u}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté, k et k' deux réels non nuls.*

- $(\vec{u}\,;\,\vec{v}) \equiv -(\vec{v}\,;\,\vec{u}) \pmod{2\pi}$.
- $(-\vec{u}\,;\,\vec{v}) \equiv (\vec{u}\,;\,\vec{v}) + \pi \pmod{2\pi}$.
- $(\vec{u}\,;\,-\vec{v}) \equiv (\vec{u}\,;\,\vec{v}) + \pi \pmod{2\pi}$.
- $(-\vec{u}\,;\,-\vec{v}) \equiv (\vec{u}\,;\,\vec{v}) \pmod{2\pi}$.
- *Si k et k' sont de même signe,* $(k\vec{u}\,;\,k'\vec{v}) \equiv (\vec{u}\,;\,\vec{v}) \pmod{2\pi}$.
- *Si k et k' sont de signes opposés,* $(k\vec{u}\,;\,k'\vec{v}) \equiv (\vec{u}\,;\,\vec{v}) + \pi \pmod{2\pi}$.

Les preuves seront faites en classe.

4.1.4 Angles orientés

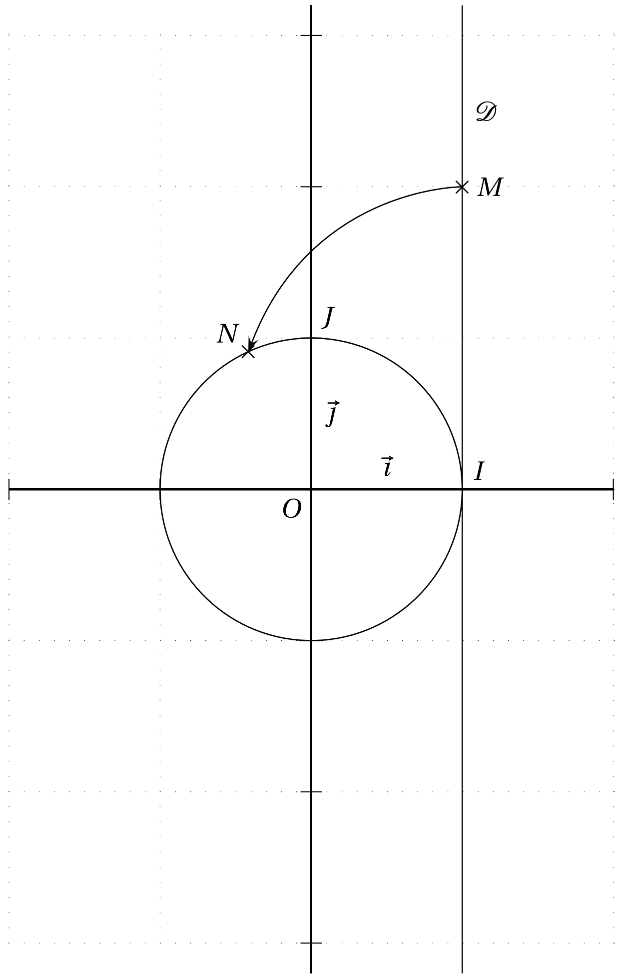
Sauf cas particulier, en mathématiques, on n'oriente pas le plan pour les angles géométriques, qui ne sont alors pas orientés, mais on oriente systématiquement le plan pour les angles de vecteurs.
Lorsqu'on parle d'un angle géométrique, il est sous-entendu qu'il n'est pas orienté, et lorsqu'on parle d'un angle de vecteurs, il est sous-entendu qu'il est orienté.

4.2 Cosinus et sinus d'un réel x

Dans cette section on considère que le plan est muni d'un repère orthonormé orienté (aussi bien pour les angles géométriques que pour les angles de vecteurs). L'unité des mesures des angles est le radian.

4.2.1 Enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique

ACTIVITÉ 4.1.
On a représenté sur la figure ci-contre le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = 1$ qui coupe l'axe (Ox) en I.
À tout nombre a, on associe le point $M(1\,;\,a)$ de la droite $\mathscr{D}$.
« L'enroulement » de la droite $\mathscr{D}$ autour du cercle $\mathscr{C}$ met en coïncidence le point M avec un point N de $\mathscr{C}$.
Plus précisément, si a est positif, le point N est tel que $\overset{\frown}{IN} = IM = a$, l'arc étant mesuré dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et, si a est négatif, le point N est tel que $\overset{\frown}{IN} = IM = |a|$, l'arc étant mesuré dans le sens des aiguilles d'une montre.
Le point N est le point du cercle $\mathscr{C}$ associé au nombre a par « enroulement de la droite des réels $\mathscr{D}$ sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ ».



1. Placer les points M_a de la droite $\mathscr{D}$ dont les ordonnées a respectives sont : $0; \frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}; \pi; -\pi$.
2. Placer les points N_a du cercle associés à ces nombres a.
3. Indiquer un nombre associé à chacun des points I, J, $I'(-1;0)$ et $J'(0;-1)$.
4. Existe-t-il plusieurs nombres associés à un même point ? Donner quatre nombres associés au point J.

4.2.2 Cosinus et sinus d'un angle orienté

Définition 4.7 (Cosinus et sinus d'un réel)**.** Pour tout réel x, il existe un point N unique du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ tel que x soit une mesure de $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{ON}\right) = \widehat{ION}$.

- L'abscisse du point N est le cosinus de x, noté $\cos(x)$.
- L'ordonnée du point N est le sinus de x noté $\sin(x)$.

Remarque. Quand il n'y a pas de risque de confusion, on note parfois $\cos x$ ou $\sin x$ à la place de $\cos(x)$ ou $\sin(x)$ pour alléger les écritures.

Définition 4.8 (Cosinus et sinus d'un angle orienté)**.** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Le cosinus (resp. le sinus) de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}\,;\vec{v})$ est le cosinus (resp. le sinus) de l'une quelconque de ses mesures. On note $\cos(\vec{u}\,;\vec{v})$ et $\sin(\vec{u}\,;\vec{v})$.

Lien entre cosinus de l'angle orienté et cosinus de l'angle géométrique non orienté

Notons α la mesure en radians de l'angle géométrique non orienté $\widehat{AOB}$ formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et notons x la mesure principale de $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$. On a $\alpha = |x|$. Deux cas se présentent :

- si $x \geqslant 0$, $|x| = x$ et par suite $\cos(\alpha) = \cos(x)$;
- si $x \leqslant 0$, $|x| = -x$ et par suite $\cos(\alpha) = \cos(-x) = \cos(x)$

On a donc $\cos(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \cos(\widehat{AOB})$.
Ce n'est pas vrai pour le sinus : $\sin(\widehat{AOB}) = |\sin(\vec{u}\,;\,\vec{v})|$

4.2.3 Premières propriétés

Les preuves seront faites en classe.

Propriété 4.4. $\forall x \in \mathbb{R}$:

- $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$
- $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$
- $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$

Remarque. Pour alléger les écritures, on note souvent $(\cos(x))^2 = \cos^2(x) = \cos^2 x$ et $(\sin(x))^2 = \sin^2(x) = \sin^2 x$; le premier point devient alors : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Propriété 4.5 (Sinus et cosinus des angles usuels)**.**

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

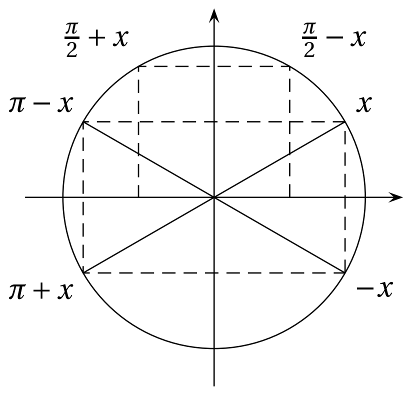
4.2.4 Lignes trigonométriques

Les formules ci-dessous sont vraies pour tout réel x, mais pour faciliter la mémorisation, on se place dans le premier cadran. Elles pourront être démontrées plus tard dans l'année.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi - x) = \sin(x)$$



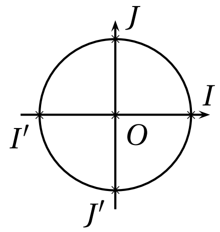
$$\cos(\pi + x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \sin(-x) = -\sin(x)$$

4.3 Exercices

4.3.1 Angles orientés

Dans tous les exercices le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ orthonormé direct.
Sauf définition particulière propre à un exercice, les points I, J, I', J' sont les points tels que $\overrightarrow{OI}=-\overrightarrow{OI'}=\vec{\imath}$, $\overrightarrow{OJ}=-\overrightarrow{OJ'}=\vec{\jmath}$.



EXERCICE 4.2.
On considère les points A, B, C et D du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ associés, respectivement, aux réels $\frac{37\pi}{6}$, $\frac{29\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{5\pi}{12}$.

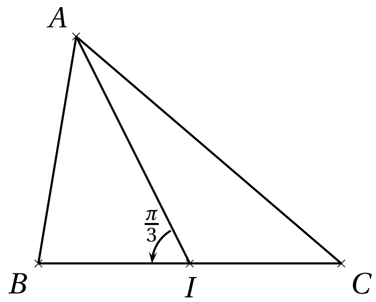
1. Déterminer les mesures principales des angles orientés $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OA}\right)$ et $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OB}\right)$.
2. Démontrer que $(OA)\perp(OC)$.
3. Déterminer les mesures principales des angles orientés $\left(\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right)$.
4. Préciser une mesure en degré de l'angle $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}\right)$

EXERCICE 4.3.
Sur un cercle trigonométrique $\mathscr{C}$, on considère les points A et B tels que $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)=\frac{5\pi}{6}$ et $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)=-\frac{2\pi}{3}$.
Déterminer la mesure principale des angles suivants :

1. $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OJ'}\right)$;
2. $\left(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OB}\right)$;
3. $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$;
4. $\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{OB}\right)$;
5. $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{BO}\right)$;
6. $\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{BO}\right)$;
7. $\left(2\overrightarrow{OA};-3\overrightarrow{OB}\right)$.

EXERCICE 4.4.
ABC est un triangle et I est le milieu de $[BC]$. On sait que $\left(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}\right)=\frac{\pi}{3}$.
Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants (on justifiera par le calcul et on ne s'autorisera pas les lectures graphiques) :

1. $\left(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{IB}\right)$;
2. $\left(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{IC}\right)$;
3. $\left(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{CB}\right)$.



4.3.2 Trigonométrie

On donne plus bas des cercles trigonométriques qui peuvent être utilisés à loisir.

EXERCICE 4.5.
Après avoir placé les points du cercle trigonométrique correspondant aux nombres réels suivants, déduire graphiquement les valeurs exactes de leurs cosinus et sinus :

- $\frac{17\pi}{4}$
- $\frac{14\pi}{3}$
- $\frac{19\pi}{6}$
- $-\frac{21\pi}{2}$

EXERCICE 4.6.
En vous aidant éventuellement du cercle trigonométrique, compléter les tableaux suivants avec les valeurs exactes :

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{-8\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{3}$	$\frac{-28\pi}{3}$
$\cos(x)$							
$\sin(x)$							

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{-11\pi}{4}$	$\frac{19\pi}{4}$	$\frac{31\pi}{4}$
$\cos(x)$							
$\sin(x)$							

EXERCICE 4.7.
Déterminer les valeurs exactes de $\sin\left(\frac{31\pi}{6}\right)$ et $\cos\left(\frac{31\pi}{6}\right)$.

EXERCICE 4.8.
On donne $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
Déterminer les valeurs exactes de $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

EXERCICE 4.9.
Simplifier les expressions suivantes :

$A = \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

$B = \sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(-x)$

$C = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

$D = \sin(\pi + x) + \cos(\pi + x) - \sin(-x)$

$E = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(-x)$

EXERCICE 4.10.
Calculer, sans utiliser la calculatrice :

$A = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

$B = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

$C = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$D = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(\pi) + \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

$E = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$F = \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$G = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1$