Un corrigé du devoir surveillé n°4 – Sujet A

EXERCICE 4.1 (10,5 points).

1. Déterminer la mesure principale d'un angle dont une mesure est :

   (a) $\frac{7\pi}{4}$:

   $\frac{7\pi}{4} \notin]-\pi\,;\pi]$ donc ce n'est pas la mesure principale, cependant nous sommes proches de cet intervalle et en enlevant 2π nous obtenons celle-ci :

   $$\frac{7\pi}{4} \equiv \frac{7\pi}{4} - 2\pi \pmod{2\pi} \equiv \frac{7\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} \pmod{2\pi} \equiv -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$$

   Comme $-\frac{\pi}{4} \in]-\pi\,;\pi]$ c'est la mesure principale de $\frac{7\pi}{4}$.

   (b) $\frac{38\pi}{3}$:

   $\frac{38\pi}{3} \notin]-\pi\,;\pi]$ donc ce n'est pas la mesure principale ; regardons combien de fois $2\pi = \frac{6\pi}{3}$ nous pouvons enlever et combien il restera en effectuant la divsion euclidienne de 38 par 6 :

   $$\begin{array}{lrcl} & 38 & = & 6\times 6+2 \\ \Leftrightarrow & \frac{38\pi}{3} & = & 6\times\frac{6\pi}{3}+\frac{2\pi}{3} = 6\times 2\pi + \frac{2\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi} \end{array}$$

   Comme $\frac{2\pi}{3} \in]-\pi\,;\pi]$ c'est la mesure principale de $\frac{38\pi}{3}$

   (c) $\frac{131\pi}{6}$:

   $\frac{131\pi}{6} \notin]-\pi\,;\pi]$ donc ce n'est pas la mesure principale ; regardons combien de fois $2\pi = \frac{12\pi}{6}$ nous pouvons enlever et combien il restera en effectuant la divsion euclidienne de 131 par 12 :

   $$\begin{array}{lrcl} & 131 & = & 10\times 12+11 \\ \Leftrightarrow & \frac{131\pi}{6} & = & 10\times\frac{12\pi}{6}+\frac{11\pi}{6} = \frac{131\pi}{6} = 10\times 2\pi + \frac{11\pi}{6} \\ & & \equiv & \frac{11\pi}{6} \pmod{2\pi} \notin]-\pi\,;\pi] \\ & & \equiv & \frac{11\pi}{6} - 2\pi \pmod{2\pi} \equiv \frac{11\pi}{6} - \frac{12\pi}{6} \pmod{2\pi} \\ & & \equiv & -\frac{\pi}{6} \pmod{2\pi} \in]-\pi\,;\pi] \end{array}$$

   La mesure principale de $\frac{131\pi}{6}$ est donc $-\frac{\pi}{6}$.

2. Simplifier les expressions suivantes :

   (a) $A = \sin(\pi - x) + \sin(-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi + x)$

   $$\begin{array}{rcllll} A & = & \sin(\pi-x) & +\sin(-x) & +\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) & +\sin(\pi+x) \\ & = & \sin(x) & -\sin(x) & +\sin(x) & -\sin(x) \\ & = & 0 & & & \end{array}$$

   (b) $B = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(-x)$

   $$\begin{array}{rclll} B & = & \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) & +\cos(-x) \\ & = & -\sin(x) & -\cos(x) & +\cos(x) \\ & = & -\sin(x) & & \end{array}$$

3. Calculer :

   (a) $C = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

   $$\begin{array}{rcllll} C & = & \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & +\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) & -\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) & +\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) \\ & = & \frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & -\left(-\frac{1}{2}\right) & -\frac{1}{2} \\ & = & 1 & & & \end{array}$$

   (b) $D = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

$$\begin{aligned} D &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

EXERCICE 4.2 (3 points)**.**
La fonction f est définie pour tout réel x par $f : x \longmapsto 2x^2 - x + 1$.

1. Déterminer si f est dérivable en 1 et, si oui, donner son nombre dérivé en 1.

$$\begin{aligned} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \frac{2(1+h)^2-(1+h)+1-2}{h} = \frac{2(1+2h+h^2)-1-h+1-2}{h} \\ &= \frac{2+4h+2h^2-1-h+1-2}{h} = \frac{3h+2h^2}{h} = \frac{h(3+2h)}{h} \\ &= 3+2h \text{ quand } h \neq 0 \end{aligned}$$

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 3+2h = 3$ donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 3$.

2. Donner une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

Pour obtenir l'équation réduite on peut, entre autre, utiliser la formule :
$y = f'(1)(x-1) + f(1) = 3(x-1) + 2 = 3x - 1$

EXERCICE 4.3 (6,5 points)**.**
La suite (u_n) est telle que $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - 1$.

1. Déterminer u_1, u_2 et u_3.

$u_1 = 2u_0 - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$,
$u_2 = 2u_1 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$ et
$u_3 = 2u_2 - 1 = 2 \times 9 - 1 = 17$.

2. On donne l'algorithme suivant, écrit en « langage courant » :

```
Entrée
   n
Initialisation
   u ← 3
   s ← 3
Traitement
   Pour k allant de 1 à n
      u ← 2 × u − 1
      s ← s + u
   Fin pour
Sortie
   s
```

(a) Le faire tourner « à la main » si n vaut 3 en indiquant vos résultats successifs dans le tableau ci-dessous et indiquer le résultat qu'il renvoie :

k	u	s
	3	3
1	5	8
2	9	17
3	17	34

L'algorithme renvoie 34

(b) Que fait cet algorithme dans le cas général ?

Cet algorithme calcule et affiche la somme des u_n de u_0 jusqu'à u_n.

(c) En donner une traduction sous la forme d'une fonction écrite en Python.

```
def somme(n) :
    u = 3
    s = 3
    for k in range(n) :
        u = 2 * u - 1
        s = s + u
    return s
```

Remarque. On peut remplacer « range(n) » par « range($1, n+1$) ».